

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
СХІДНОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ВОЛОДИМИРА ДАЛЯ**

Соколов В.І., Кроль О.С., Єпіфанова О.В.

ГІДРАВЛІКА

Навчальний посібник

СЄВЕРОДОНЕЦЬК 2017

УДК 532.5 : 621.225

С 59

Рекомендовано Вченою радою Східноукраїнського національного
університету імені Володимира Даля
(протокол № 7 від 27.01.2017 р.)

Рецензенти:

*Драгобецький В.В., професор, доктор технічних наук,
завідувач кафедри технології машинобудування
Кременчугського національного університету
імені Михайла Остроградського.*

*Полонський Л.Г., професор, доктор технічних наук,
завідувач кафедри технології машинобудування
Житомирського державного технологічного університету*

Соколов В.І.

С 59 Гідравліка: Навчальний посібник / В.І. Соколов, О.С. Кроль,
О.В. Єпіфанова. – Сєвєродонецьк: вид-во СНУ ім. В. Даля, 2017. – 160 с.

ISBN 978-617-11-0085-5

У навчальному посібнику розглянуті теоретичні та прикладні питання гідравліки: фізичні властивості рідини, рівновага рідин та газів, сили тиску рідини на поверхні, основи кінематики та динаміки рідини, гідравлічні опори, витікання рідини через отвори та насадки, взаємодія струменів з перешкодою, гідравлічний удар, гідравлічний розрахунок трубопроводів.

Рекомендований для студентів вищих навчальних закладів, що навчаються за спеціальностями 131 «Прикладна механіка», 133 «Галузеве машинобудування», 192 «Будівництво та цивільна інженерія», може бути корисна аспірантам та інженерно-технічним робітникам, що займаються гідравлічними розрахунками.

УДК 532.5 : 621.225

ISBN 978-617-11-0085-5

© Соколов В.І., Кроль О.С.,
Єпіфанова О.В., 2017
© Східноукраїнський національний
університет імені Володимира Даля,
2017

З М І С Т

ВСТУП.....	5
Глава І. ГІДРОСТАТИКА.....	6
1.1. Основні фізичні властивості рідин.....	6
1.1.1. Визначення рідини.....	6
1.1.2. Густина рідини.....	7
1.1.3. Стисливість і температурне розширення рідини.....	8
1.1.4. Опір розтягуванню.....	10
1.1.5. Поверхневий натяг рідин. Капілярність.....	11
1.1.6. В'язкість рідин.....	13
1.1.7. Випаровуваність. Тиск насичених парів.....	18
1.1.8. Контрольні питання.....	18
1.2. Рівновага рідини і газу.....	19
1.2.1. Розподіл сил в суцільному середовищі.....	19
1.2.2. Властивості напружень поверхневих сил.....	21
1.2.3. Гідростатичний тиск та його властивості.....	24
1.2.4. Диференціальні рівняння рівноваги рідини (рівняння Ейлера).....	25
1.2.5. Інтегрування рівнянь рівноваги рідини. Рівновага рідини в полі сили тяжіння. Основне рівняння гідростатики.....	29
1.2.6. Рівновага газу в полі сили тяжіння. Барометрична формула.....	34
1.2.7. Одиниці виміру тиску. Прилади для вимірювання тиску.....	36
1.2.8. Класифікація приладів.....	38
1.2.9. Відносна рівновага рідини.....	43
1.2.10. Контрольні питання.....	47
1.3. Сили тиску рідини на поверхні.....	47
1.3.1. Сила тиску рідини на плоску горизонтальну поверхню.....	47
1.3.2. Сила тиску рідини на похилу плоску поверхню.....	49
1.3.3. Сила тиску рідини на криволінійну поверхню.....	52
1.3.4. Закон Архімеда. Плавання тіл.....	56
1.3.5. Контрольні питання.....	60
Глава ІІ. ГІДРОДИНАМІКА.....	61
2.1. Основи кінематики та динаміки рідини.....	61
2.1.1. Основні поняття та визначення.....	61
2.1.2. Витрата. Рівняння витрати.....	65
2.1.3. Рівняння Бернуллі для елементарної струминки ідеальної рідини.....	66
2.1.4. Рівняння Бернуллі для елементарної струминки реальної рідини.....	71
2.1.5. Рівняння Бернуллі для потоку в'язкої нестисливої рідини.....	71
2.1.6. Контрольні питання.....	75

2.2. Гідравлічні опори.....	75
2.2.1. Види гідравлічних опорів.	75
2.2.2. Основи теорії подібності.	78
2.2.3. Загальні формули для визначення втрат напору.	81
2.2.4. Режими руху рідини. Число Рейнольдса.	84
2.2.5. Ламінарна течія рідини в циліндричній трубі.....	87
2.2.6. Турбулентна течія рідини в трубах.....	91
2.2.7. Дотичні напруження в турбулентному потоці.....	96
2.2.8. Вплив шорсткості стінок на механізм турбулентного потоку.	99
2.2.9. Напівемпіричні теорії турбулентності.....	101
2.2.10. Вплив різних факторів на величину коефіцієнта тертя λ	106
2.2.11. Емпіричні формули для визначення коефіцієнта тертя λ	109
2.2.12. Місцеві опори.....	115
2.2.13. Коефіцієнти місцевих опорів.	119
2.2.14. Контрольні питання.....	121
2.3. Витікання рідини через отвори і насадки.....	122
2.3.1. Витікання з донного отвору в тонкій стінці.....	122
2.3.2. Коефіцієнти швидкості, стиснення і витрати.	124
2.3.3. Витікання з отворів в боковій стінці.	128
2.3.4. Витікання при змінному напорі.....	130
2.3.5. Витікання із затопленого отвору.....	132
2.3.6. Витікання через насадки.....	133
2.4. Взаємодія струменя з перешкодою.....	138
2.5. Гідравлічний удар.....	141
2.5.1. Контрольні питання.....	148
Глава III. ГІДРАВЛІЧНИЙ РОЗРАХУНОК ТРУБОПОВОДІВ.....	149
3.1. Розрахунок простих трубопроводів.....	149
3.1.1. Основні положення.....	149
3.1.2. Три основні задачі розрахунку простого трубопроводу.....	151
3.2. Розрахунок складних трубопроводів.....	153
3.2.1. Послідовне з'єднання.....	153
3.2.2. Паралельне з'єднання.....	154
3.2.3. Розгалужене з'єднання.....	156
3.2.4. Складні трубопроводи.....	157
3.2.5. Контрольні питання.....	158
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....	159

Набагато легше для людської свідомості дослідити та обчислити шляхи руху далеких зірок і планет, ніж умови руху води в найменшому струмочку на земній кулі.

Г. Галілей

ВСТУП

В основу навчального посібника покладені курси лекцій, що читають автори студентам технічних спеціальностей. Автори прагнули ширше висвітлювати практичне застосування розглянутих теоретичних питань і висновків, створюючи тим самим передумови до більш глибокого вивчення і розуміння курсу.

Значення гідравліки як дисципліни загальнотехнічного характеру незмірно зростає у зв'язку з тими запитами, які пред'являються в даний час до конструювання, проектування й розрахунку пристроїв, машин і приводів сучасного технологічного обладнання в усіх галузях промисловості.

У навчальному посібнику розглянуті теоретичні та прикладні завдання гідравліки: фізичні властивості рідини, рівновага рідин і газів, сили тиску рідини на поверхні, основи кінематики і динаміки рідини, гідравлічні опори, витікання рідини через отвори і насадки, взаємодія струменя з перешкодою, гідравлічний удар, гідравлічний розрахунок трубопроводів.

Авторами переглянутий традиційний підхід до викладання курсу. В першій і другій частинах основи гідромеханіки представлені на більш раціональній теоретичній базі, що вимагає від студентів знання спеціальних розділів вищої математики, фізики, теоретичної механіки. Матеріали навчального посібника є базою для розуміння і практичного застосування гідромеханіки при розрахунках гідравлічних систем.

Автори сподіваються, що навчальним посібником зможуть користуватися також інженерно-технічні працівники, що зайняті проектуванням, впровадженням і експлуатацією гідросистем різного призначення.

ГІДРОСТАТИКА

1.1. Основні фізичні властивості рідин

Стан і поведінка рідин, які зустрічаються в природі і застосовуються в техніці, знаходяться в безпосередній залежності від їх фізичних властивостей. Тому першим завданням, що передує вивченню законів рівноваги текучого середовища, є визначення фізичних властивостей рідин, виявлення чинників, що впливають на них і встановлення одиниць їх вимірювання.

1.1.1. Визначення рідини

Основні відмінності механіки рідин від механіки твердого тіла обумовлені різними властивостями досліджуваного об'єкта. Рідини внаслідок плинності не можуть, як тверді тіла, зберігати незмінно форму свого об'єму. Терміну *«рідина»* в аерогідромеханіці надають більш широкий зміст, ніж це прийнято в повсякденному житті. У поняття *«рідина»* включають всі тіла, для яких властива текучість, тобто здатність змінювати форму під дією як завгодно малих сил. Таким чином, в це поняття включають як рідини звичайні (що мало стискаються), які називають крапельними, так і газоподібні (що стискаються). Краплинні рідини відрізняються тим, що в малій кількості під дією поверхневого натягу приймають сферичну форму (краплю), а у великому - зазвичай утворюють вільну поверхню розділу з газом. Важливою особливістю крапельних рідин є те, що вони мізерно мало змінюють свій об'єм при зміні тиску, що дозволяє їх вважати практично нестисливими. Гази, навпаки, можуть значно зменшуватися в об'ємі під дією тиску і необмежено розширюватися при відсутності його, тобто вони володіють великою стисливістю. З позиції фізики крапельна рідина значно відрізняється від газу, з позиції аерогідромеханіки відмінність між ними не така велика, що дозволяє використовувати єдину умовну модель рідини. Ця модель, тобто умовна рідина, розглядається як суцільне (безперервне)

середовище (континуум), що деформується, будь-який нескінченно малий об'єм якого характеризується тими ж властивостями, що і об'єм кінцевих розмірів.

Введення поняття суцільного середовища дозволяє розглядати всі механічні характеристики рідини (швидкість, густина, тиск та ін.) як функції координат точки в просторі, що дозволяє широко застосовувати в аерогідромеханіці математичний апарат теорії безперервних функцій.

1.1.2. Густина рідини

Основною характеристикою рідини є її густина ρ . У просторі, зайнятому рідиною, утворюється скалярне поле густини.

Рідина, величина густини якої в різних точках різна, тобто $\rho = f(x, y, z)$, називається неоднорідною. Для визначення поняття густини в даній її точці слід вибрати елементарний об'єм ΔW , що охоплює цю точку і містить масу рідини Δm . Тоді, стягуючи поверхню об'єму ΔW до цієї точки, визначають величину густини в ній як границю відношення

$$\rho = \lim_{\Delta W \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta W}. \quad (1.1)$$

Густина однорідної рідини у всіх точках постійна і являє собою відношення маси рідини M до об'єму W , тобто

$$\rho = \frac{M}{W}. \quad (1.2)$$

Вага рідини G , що припадає на одиницю об'єму W , називається питомою вагою γ

$$\gamma = \frac{G}{W}. \quad (1.3)$$

Густина і питома вага пов'язані між собою відомим співвідношенням

$$\gamma = \rho \cdot g. \quad (1.4)$$

Відносною питомою вагою рідини δ називається відношення питомої ваги даної рідини до питомої ваги води при температурі 4°C :

$$\delta = \frac{\gamma_p}{\gamma_s}. \quad (1.5)$$

Густина і питома вага рідин змінюються зі зміною тиску і температури, причому густину крапельних рідин можна вважати практично незалежною від тиску. Вона є тільки функцією температури.

З підвищенням температури густина рідин, як правило, зменшується. Винятком з цього правила є вода, яка найбільшу густину має при температурі 4°C .

Для стислих рідин (газів) значення густини ρ при будь-якому значенні температури t і тиску p , якщо відомо значення густини ρ_0 при температурі t_0 і тиску p_0 можна визначити за формулою:

$$\rho = \rho_0 \frac{p(273 + t_0)}{p_0(273 + t)} \quad (1.6)$$

або за рівнянням стану ідеальних газів:

$$\frac{p}{\rho} = RT, \quad (1.7)$$

де R – газова постійна, для повітря $R = 287 \text{ Дж}/(\text{кг}^{\circ}\text{K})$.

Реальні гази не підкоряються рівнянню стану. Відхилення їх властивостей від цього рівняння зростають з підвищенням тиску і зниженням температури і при високому тиску враховуються введенням поправочних коефіцієнтів, що встановлюються дослідним шляхом.

Деякі значення густини і питомої ваги різних рідин для нормальних умов (температура -0°C , тиск - 101325 Па) наведені в таблиці 1.1.

1.1.3. Стисливість і температурне розширення рідини

Стисливість крапельних рідин характеризується коефіцієнтом стисливості (або об'ємного стиснення) β_w , що представляє собою відносну зміну об'єму ΔW рідини на одиницю зміни тиску Δp .

$$\beta_w = -\frac{1}{W} \cdot \frac{\Delta W}{\Delta p}. \quad (1.8)$$

Знак мінус тут означає, що додатному прирощенню тиску p відповідає від'ємне прирощення об'єму W .

Величина, зворотна коефіцієнту стисливості, називається модулем об'ємної пружності K :

$$K = \frac{1}{\beta_w} \quad (1.9)$$

Т а б л и ц я 1.1

Величини густини деяких рідин

Рідина	Питома вага, H / M^3	Густина, $кг / M^3$
Вода прісна	9790	998,2
Вода морська	10010 ... 10090	Тисячі дві ... 1029
Гас	7770 ... 8450	792 ... 840
Масло мінеральне	8000 ... 8750	877 ... 892
Бензин авіаційний	7250 ... 7370	739 ... 751
Спирт етиловий безводний	7440	789,3
Ртуть	132900	13547
Кисень	12,8	1,3
Водень	0,81	0,08
Азот	11,3	1,15
Повітря	11,6	1,2
Водяна пара	7,25	0,74
Окис вуглецю	11,2	1,15

Коефіцієнт стисливості крапельних рідин мало залежить від температури і тиску (так наприклад, для води при зміні температури від 0 до 20⁰C і тиску від 0,5 до 8 МПа модуль об'ємної пружності K змінюється в межах (1,89 ... 2,22) 10³ МПа). В середньому для води приймають:

$$K = 2 \cdot 10^9 \text{ Па} \text{ або } \beta_w = 0,5 \cdot 10^{-9} \text{ Па}^{-1}.$$

Як вже зазначалося вище, через малу стисливість крапельних рідин і незначний її вплив на розглянуті явища, при розрахунках стисливостю зазвичай нехтують і вважають ці рідини практично нестисливими за винятком окремих випадків, які завжди особливо обговорюють.

Температурне розширення крапельних рідин характеризується коефіцієнтом температурного розширення β_t , який виражає відносне збільшення об'єму ΔW при збільшенні температури на 1⁰C, тобто

$$\beta_t = \frac{1}{W} \cdot \frac{\Delta W}{\Delta t}. \quad (1.10)$$

Коефіцієнт температурного розширення для крапельних рідин мізерно малий (наприклад, для води при зміні температури від 0 до 100⁰C і тиску 0,1 МПа - $\beta_t = 0,000014$ ⁰C⁻¹).

Якщо приймати, що густина крапельних рідин не залежить від тиску, тоді наближено залежність зміни густини від температури буде мати вигляд

$$\rho_t = \rho_0 \frac{1}{1 + \beta_t(t - t_0)}, \quad (1.11)$$

де ρ_0, t_0 - густина і температура рідини при нормальних умовах.

На відміну від крапельних рідин газів характеризуються значною стисливістю і високими значеннями коефіцієнта температурного розширення. Залежність густини газів від тиску і температури встановлюється рівнянням стану (1.7).

У технічних розрахунках густину газів зазвичай призводять до нормальних фізичних умов ($t = 0^\circ\text{C}$; $p = 101325 \text{ Па}$) або до стандартних умов ($t = 20^\circ\text{C}$; $p = 101325 \text{ Па}$).

Густина повітря при стандартних умовах

$$\rho_0 = 1,2 \text{ кг/м}^3.$$

Для ізотермічного процесу маємо

$$\frac{p}{\rho} = \text{const}, \text{ або } p v = \text{const},$$

а для адіабатичного процесу

$$\frac{p}{\rho^k} = \text{const}, \text{ або } p v^k = \text{const},$$

де $k = \frac{c_p}{c_v}$ - показник адіабати (C_p і C_v - теплоємність газів при постійному

тиску і об'ємі відповідно); $v = \frac{1}{\rho}$ - питомий об'єм.

Оскільки об'єм газу в більшій мірі залежить від температури і тиску, висновки, що отримані при вивченні крапельних рідин, можна поширювати на газів лише в тих випадках, якщо зміна тиску і температури невелика.

1.1.4. Опір розтягуванню

За молекулярною теорією опір розтягуванню всередині крапельних рідин може бути досить значним. Як показують роботи з фізики рідин в деяких особливих випадках, наприклад при дослідях з ретельно відфільтрованою і дегазованою водою, в них можна отримати досить великі короточасні напруження розтягнення (до 23 - 28 МПа). Однак технічно чисті рідини, що містять зважені тверді частинки і дрібні бульбашки газів, прак-

тично не надають помітного опору зусиллям, що розтягують. Сили зчеплення між молекулами цих рідин проявляються лише на їх поверхні у вигляді так званих сил поверхневого натягу, де і виявляється відома опірність рідини розриву. Сили опору розриву у рідин мізерно малі. Так, для розриву води достатня сила, приблизно в 10^6 разів менше сили, необхідної для розриву сталі. Тому в подальшому будемо вважати, що напруження розтягнення в крапельних рідинах відсутні.

1.1.5. Поверхневий натяг рідин. Капілярність

Молекули рідини, що розташовані біля поверхні контакту з іншою рідиною, газом або твердим тілом, знаходяться в умовах, відмінних від умов молекул, що знаходяться всередині деякого об'єму рідини. Енергія поверхневих молекул рідини відрізняється від енергії молекул, що знаходяться в об'ємі рідини, на деяку величину, яка називається поверхневою енергією. Ця енергія пропорційна площі поверхні розділу S

$$E_n = \sigma \cdot S, \quad (1.12)$$

де σ - коефіцієнт пропорційності, або коефіцієнт поверхневого натягу, що залежить від природи дотичних середовищ, $[H/м]$.

Цей коефіцієнт можна представити у вигляді

$$\sigma = -\frac{R}{l}, \quad (1.13)$$

де R - сила поверхневого натягу; l - довжина лінії, яка обмежує поверхню розділу.

Сили поверхневого натягу здійснюють на рідину додатковий тиск, що нормальний до її поверхні, який може бути визначений таким способом (рис. 1.1).

Нехай елемент поверхні рідини або поверхні розділу двох рідин утворює вигнутий прямокутник зі сторонами dl_1 і dl_2 . Внаслідок

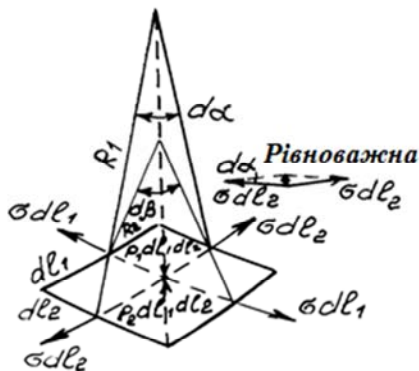


Рис. 1.1. Визначення сили поверхневого натягу

різниці тисків $p_1 - p_2$ на розглянуту площадку буде діяти сила $(p_1 - p_2)dl_1 dl_2$, яка повинна бути врівноважена силою поверхневого натягу.

З рис. 1.1 видно, що сила $(p_1 - p_2)dl_1 dl_2$ буде врівноважена чотирма складовими поверхневих сил. Дві з них, що рівні σdl_1 , утворюють між собою кут $d\beta$, а дві інших, що рівні σdl_2 , утворюють між собою кут $d\alpha$. Так як кути $d\alpha$ і $d\beta$ дуже малі, можна покласти

$$d\alpha = \frac{dl_1}{R_1} \text{ і } d\beta = \frac{dl_2}{R_2}.$$

Тоді рівнодіючі сили σdl_1 і σdl_2 відповідно дорівнюватимуть

$$\sigma d\beta dl_1 = \frac{\sigma dl_1 dl_2}{R_2} \text{ і } \sigma d\alpha dl_2 = \frac{\sigma dl_1 dl_2}{R_1},$$

а умова рівноваги всіх сил, що прикладені до площадки, буде

$$p = p_1 - p_2 = \sigma \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right], \quad (1.14)$$

де R_1, R_2 - радіуси кривизни кривих dl_1 і dl_2 , або радіуси взаємно перпендикулярних кривих, що проведені через центр площадки dl_1, dl_2 .

Для циліндричних поверхонь один з радіусів перетворюється в нескінченність і

$$p = \frac{\sigma}{R}.$$

Особливо сильно поверхневий натяг виявляється в трубках малого діаметра (капілярних), де, завдяки дії додаткового тиску, що викликається цим натягом, положення поверхні рідини змінюється в порівнянні з нормальним його рівнем. Для сферичних поверхонь (капілярів) $R_1 = R_2$ і формула (1.14) приймає вид

$$p = \frac{2\sigma}{R}, \quad (1.15)$$

де R - радіус трубки.

Середні значення коефіцієнта поверхневого натягу σ для деяких рідин на границі розділу з повітрям представлені в таблиці 1.2.

Т а б л и ц я 1.2

Значення коефіцієнта поверхневого натягу

рідина	вода	спирт	бензол	нафта	гліцерин	ртуть
σ , Н / м	0,073	0,0225	0,029	0,025	0,065	0,490

Результуюча поверхневих сил для опуклої поверхні спрямована всередину рідини, а для увігнутої поверхні - навпаки, тому поведінка рідини в капілярах, занурених у рідину, буде залежати від взаємодії рідини з трубою, тобто від явища змочуваності. Якщо рідина буде змочувальна (вода в скляній трубці), то меніск буде увігнутий і результуюча поверхневих сил буде спрямована назовні. При незмочувальній рідині (ртуть в скляній трубці) меніск буде опуклим і результуюча сила спрямована всередину рідини.

Висоту підйому (опускання) рідини визначають за формулою для напівсферичного меніска

$$h = \frac{2 \cdot \sigma}{\rho \cdot g \cdot R} = \frac{4 \cdot \sigma}{\rho \cdot g \cdot d} = \frac{k}{d}, \quad (1.16)$$

де d - діаметр трубки [мм],

k - коефіцієнт, що залежить від роду рідини [мм²] і має наступні значення табл. 1.3.

Т а б л и ц я 1.3

Значення коефіцієнта k для різних рідин

рід рідини	вода	ртуть	спирт
k , мм ²	+30	-10,1	+11,5

1.1.6. В'язкість рідин

В'язкістю називається властивість рідини чинити опір зсуву її шарів. Це властивість проявляється в тому, що в рідині при певних умовах виникають дотичні напруження. В'язкість є властивістю, що протилежна плинності: більш в'язкі рідини (гліцерин) є менш текучими і навпаки. Для подальших міркувань приймемо гіпотезу, що при русі рідини уздовж твердої стінки швидкість рідини на самій стінці дорівнює 0, тобто $u = 0$. Закони

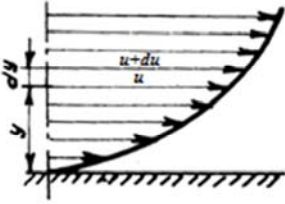


Рис. 1.2. Розподіл швидкості уздовж стінки

руху рідини, де ця гіпотеза неправильна, тобто швидкість на стінці $u \neq 0$ вивчає несиметрична гідромеханіка.

При течії рідини уздовж твердої стінки відбувається гальмування потоку, обумовлене в'язкістю (рис.1.2).

Швидкість u зменшується по мірі зменшення відстані від стінки аж до $u = 0$ при $y = 0$, а між шарами відбувається прослизання, що супроводжується виникненням дотичних напружень (напружень тертя).

Аналогічно явищу зсуву в твердих тілах можна припустити залежність між напруженням і деформацією у вигляді

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}, \quad (1.17)$$

де μ - коефіцієнт пропорційності, який отримав назву динамічної в'язкості рідини.

du - приріст швидкості;

dy - приріст координати.

Вперше цю гіпотезу висловив Ньютон в 1686 р., а потім вона отримала експериментальне підтвердження, тобто дотичне напруження в рідині залежить від її роду і характеру течії та при шаруватій течії змінюється прямо пропорційно так званому поперечному градієнту швидкості.

Одиниці виміру динамічної в'язкості в системі СІ - $[Па \cdot с]$, На практиці динамічну в'язкість часто вимірюють в одиницях: Пуаз ($П$) або сантипуаз ($сП$).

$$1 Па \cdot с = 10 П.$$

Із закону тертя Ньютона, що виражається рівнянням (1.17), слідує, що напруження тертя можливі тільки в рухомій рідині, тобто в'язкість рідини проявляється тільки при її течії. У рідині, яка покоїться, дотичні напруження вважатимемо рівними нулю. Однак, існують так звані аномальні, неньютонівські рідини, в яких дотичні напруження можливі також при спокої, а в'язкість залежить від градієнта швидкості. Фізичні властивості таких рідин в класичній гідроаеромеханіці не розглядаються.

Повна сила тертя за умови постійних дотичних напружень по поверхні S дорівнює

$$T = \mu \cdot \frac{du}{dy} \cdot S. \quad (1.18)$$

В'язкість рідин в більшій мірі залежить від температури, при цьому в'язкість крапельних рідин при збільшенні температури зменшується, а в'язкість газів зростає, і, навпаки, що пояснюється відмінністю природи в'язкості в крапельних і газоподібних рідинах. У рідинах в'язкість викликається силами молекулярного зчеплення, які зі збільшенням температури зменшуються, а в газах в'язкість обумовлена безладним, тепловим рухом молекул, інтенсивність якого збільшується зі зростанням температури. Вплив температури на в'язкість рідин можна оцінити формулою

$$\mu = \mu_0 \cdot e^{-\beta(T-T_0)}, \quad (1.19)$$

де μ і μ_0 - динамічні в'язкості при температурі T і T_0 ;

β - коефіцієнт, що залежить від роду рідини, для мінеральних олій $\beta=0,02 \dots 0,03$.

Залежність динамічної в'язкості прісної води від температури можна визначити за емпіричною формулою Пуазейля

$$\mu = \frac{0,00179}{1 + 0,0368 \cdot t + 0,000221 \cdot t^2},$$

(у цій формулі розмірність μ дана в пуаз [П], t - температура води в $^{\circ}\text{C}$).

Для визначення динамічної в'язкості повітря застосовується формула Міллікена

$$\mu = 1,745 \cdot 10^{-6} + 5,03 \cdot 10^{-9} \cdot t,$$

що дає при $t = 15^{\circ}\text{C}$ $\mu = 1,82 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}$.

Динамічна в'язкість інших газів має приблизно таке ж значення.

Поряд з динамічною в'язкістю μ застосовують кінематичну в'язкість ν , що представляє собою відношення динамічної в'язкості рідини до її густини

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}. \quad (1.20)$$

Крім розмірності кінематичної в'язкості в системі SI [$\text{м}^2/\text{с}$] використовується розмірність *Стокс* [St], або *сантистокс* (cSt),

$$1 \text{ } St = 1 \text{ } cSt^2/\text{с}, \text{ або } 1 \text{ } St = 10^{-4} \text{ } \text{м}^2/\text{с}.$$

В'язкість рідини визначають також в умовних (технічних) одиницях за часом закінчення витікання певної кількості рідини через заданий капіляр. Для визначення умовної в'язкості в різних країнах користуються вискозиметрами Енглера, Сейболта, Редвуда, Барбе та ін. В країнах *СНД* для

визначення в'язкості служить віскозиметр ВУ (значення умовної в'язкості в *градусах Енглера* ($^{\circ}E$) та *градусах ВУ* ($^{\circ}BU$) однакові).

Співвідношення між найбільш поширеними одиницями умовної в'язкості дані в табл. 1.4. Значення динамічної та кінематичної в'язкості для деяких рідин представлені в табл. 1.5.

Т а б л и ц я 1.4

Формули перекладу умовних одиниць в'язкості

Технічні одиниці	формули перекладу	
	Технічних одиниць в сантистокс	Сантистокс в технічні одиниці
<i>Градус ВУ</i> ($^{\circ}BU$) <i>Градуси Енглера</i> ($^{\circ}E$)	Формула Уббелодє $\nu = 7,31^{\circ}A - \frac{6,31}{^{\circ}E}$ Формула Фогеля $\nu = ^{\circ}A \cdot 7,6 \left(1 - \frac{1}{^{\circ}E}\right)$	$^{\circ}A = 0,0683 \left(\nu + \sqrt{\nu^2 + 185} \right)$
<i>Секунди Сейболта - Універсал</i> (SSU)	$\nu = 0,22SSU - \frac{180}{SSU}$	$SSU = 2,27 \left(\nu + \sqrt{\nu^2 + 158} \right)$
<i>Секунди Сейболта - Фузол</i> (SSF)	$\nu = 2,20SSF - \frac{203}{SSF}$	$SSF = 0,227 \left(\nu + \sqrt{\nu^2 + 1810} \right)$
<i>Секунди Редвуд-1 - стандарт</i> ($^{\circ}R$)	$\nu = 0,26^{\circ}R - \frac{1,72}{^{\circ}R}$	$^{\circ}R = 1,92 \left(\nu + \sqrt{\nu^2 + 179} \right)$
<i>Секунди Редвуд-2 - Адміралті</i> ($^{\circ}RA$)	$\nu = 2,39^{\circ}RA - \frac{40,3}{^{\circ}RA}$	$^{\circ}RA = 0,209 \left(\nu + \sqrt{\nu^2 + 385} \right)$
<i>Градуси Барбе</i> ($^{\circ}B$)	$\nu = \frac{4850}{^{\circ}B}$	$^{\circ}B = \frac{4850}{\nu}$

Т а б л и ц я 1.5

Величини динамічної і кінематичної в'язкості для деяких рідин

Рідина	$\mu, Па \cdot c$	$\nu \cdot 10^4, м^2 / c$
Вода прісна ($t = 20^{\circ}C$)	0,00101	0,01012
Гліцерин безводний ($t = 20^{\circ}C$)	0,512	4,1
Гас ($t = 15^{\circ}C$)	0,0016 ... 0,0025	0,02 ... 0,03
Бензин ($t = 15^{\circ}C$)	0,0006 ... 0,00065	0,0083 ... 0,0093
Ртуть ($t = 20^{\circ}C$)	0,0015	0,00111
Спирт етиловий, безводний ($t = 20^{\circ}C$)	0,00119	0.0151
Масло мінеральне ($t = 20^{\circ}C$)	0,0275 ... 1,29	0,313 ... 14,5

Залежність кінематичної в'язкості повітря, води і мінеральної олії від температури приведена на рис.1.3.

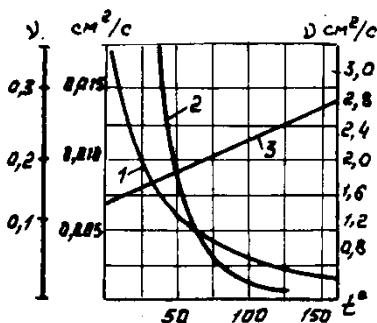


Рис. 1.3. Залежність кінематичної в'язкості від температури

Кінематична в'язкість газів залежить як від температури, так і від тиску, зростаючи зі збільшенням температури і зменшуючись зі збільшенням тиску (табл. 1.6 і 1.7).

Таблиця 1.6

Залежність кінематичної в'язкості газів від температури

Газ	$\nu \cdot 10^4, \text{м}^2/\text{с}, \text{при температурі, } ^\circ\text{C}$				$R, \text{Дж} / \text{кг} \cdot ^\circ\text{K}$
	0	20	50	100	
Повітря	0,133	0,151	0,178	0,232	287
Метан	0,145	0,165	0,197	0,256	520
Етилен	0,075	0,086	0,104	0,138	296

В'язкість крапельних рідин залежить також і від тиску, проте в більшості випадків, для тиску до $2 \cdot 10^7 \text{ Па}$ (200 ат), цією зміною в звичайних гідравлічних розрахунках нехтують.

Таблиця 1.7

Залежність кінематичної в'язкості повітря від тиску

Тиск, кПа	104,1	98,7	93,3
$\nu, \text{См}, \text{при } t = 15^\circ\text{C}$	0,14	0,148	0,152
$\nu, \text{См}, \text{при } t = 30^\circ\text{C}$	0,156	0,164	0,174

1.1.7. Випаровуваність. Тиск насичених парів

Випаровуваність властива всім краплинним рідинам. Одним з показників, що характеризують це явище, є температура кипіння рідини. Але більш повною характеристикою випаровуваності є тиск (пружність) насичених парів $p_{н.п.}$, тобто такий тиск, при якому пари рідини знаходяться в рівновазі з рідиною і число молекул, які переходять з рідини в пар, дорівнює числу молекул, що здійснюють зворотний перехід. Тиск насичених парів можна визначити також як тиск, що відповідає точці кипіння рідини при даній температурі. Чим більше тиск насичених парів при даній температурі, тим більше випаровуваність рідин. Тиск насичених парів різних рідин в значній мірі залежить від температури і, як правило, збільшується з її підвищенням (таблиця 1.8.)

Т а б л и ц я 1.8

Тиск насичених парів (Па)

Рідина	Температура рідини, °C					
	0	20	40	60	80	100
Вода	613	2332	7350	19894	47334	101325
Нафта	3430	7840	13720	37240	85260	-
Бензин	6468	10682	22538	-	-	-

У машинобудівній гідравліці вивчаються і інші фізичні властивості рідин, такі, як розчинність газів в рідинах та ін. Для вивчення даного курсу цілком достатньо вищевикладених основних властивостей.

1.1.8. Контрольні питання

1. Дайте визначення рідини.
2. Від чого залежить густина рідини?
3. Дайте визначення в'язкості рідини.
4. Чим викликаний поверхневий натяг в рідині?
5. Що таке капілярність?
6. Поясніть залежність в'язкості рідини і газу від температури.

1.2. Рівновага рідини і газу

Однією з найважливіших задач в статичі текучого середовища (гідростатиці) є визначення законів рівноваги рідини, визначення тисків, їх властивостей.

1.2.1. Розподіл сил в суцільному середовищі

Рідини і газу завжди схильні до дії деяких сил, які є в основному розподіленими, тобто прикладеними в усіх точках поверхні або об'єму. Однак у виняткових випадках у рідинах можуть діяти і зосереджені сили.

За характером дії розподілені сили можна розділити на **поверхневі** і **масові (об'ємні)**. До перших відносяться сили в'язкості і тиску, а до других - сили тяжіння, інерції, електромагнітні та ін.

Поверхневі сили є результатом безпосередньої дії на частинки середовища сусідніх з ними частинок або інших тіл. Для якісного і кількісного опису поверхневих сил служить поняття про напруження. В об'ємі суцільного середовища W , яке знаходиться в умовах спокою чи руху проведемо довільну поверхню S (рис. 1.4, а) і подумки відкинемо частину рідини, що розташована праворуч від поверхні. Щоб рідина, що залишилася при цьому зберігала стан спокою або руху, докладемо до неї по поверхні S розподілену систему сил, що еквівалентна тій дії, яку чинила відкинута частина рідини об'ємом W_1 на решту об'ємом W_2 . Нехай на елементарну площадку ΔS , яка характеризується напрямком (одичинним вектором нормалі) $\vec{n}$, діє сила $\Delta \vec{R}$.

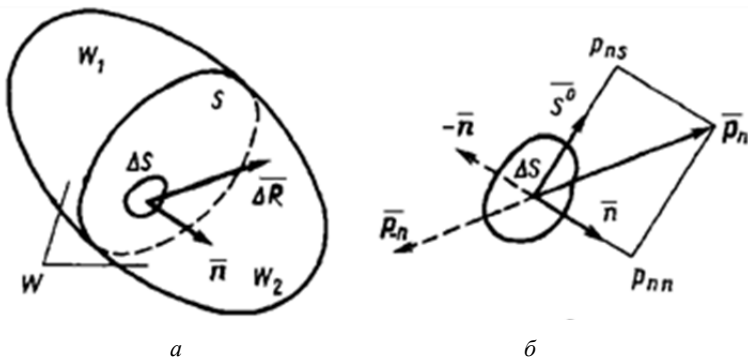


Рис. 1.4. Поверхневі сили та їх напруження:
а – довільна поверхня в об'ємі суцільного середовища;
б – напруження на довільній поверхні

Тоді

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \vec{R}}{\Delta S} \right) = \vec{p}_n \quad (1.21)$$

назвемо напруженням поверхневих сил в тій точці, до якої стягується площадка ΔS . Зауважимо, що індекс n тут позначає не проекцію (бо $\vec{p}_n$ - вектор), а орієнтацію площадки ΔS в просторі, тобто вказує, що $\vec{p}_n$ - напруження на площадці з нормаллю $\vec{n}$.

Стосовно площадки, вектор $\vec{p}_n$ в загальному випадку може бути спрямований як завгодно і тому він має нормальну і дотичну складові. З рис. 1.4, б видно, що

$$\vec{p}_n = p_{ns} \vec{s}^0 + p_{nn} \vec{n}, \quad (1.22)$$

де p_{nn} - проекція вектору $\vec{p}_n$ на напрям нормалі; p_{ns} - проекція вектору $\vec{p}_n$ на напрям $\vec{s}^0$, тобто дотичний до площадки ΔS .

В окремому випадку може бути $p_{ns} = 0$ і $\vec{p}_n = p_{nn} \vec{n}$.

Оскільки в кожній точці поверхні S , всередині середовища, можна вказати дві нормалі: $\vec{n}$ і $-\vec{n}$ (Рис. 1.4, б), то їм будуть відповідати два напруження: $\vec{p}_n$ і $\vec{p}_{-n}$. Тоді сили $\vec{p}_n \Delta S$ і $\vec{p}_{-n} \Delta S$ будуть виражати взаємну дію через площадку ΔS об'ємів рідини, розташованих по обидві сторони від неї. Згідно з третім законом Ньютона $\vec{p}_n \Delta S = -\vec{p}_{-n} \Delta S$ або $\vec{p}_n = -\vec{p}_{-n}$.

Відповідно векторам $\vec{p}_n$ і $\vec{p}_{-n}$ будемо розрізняти дві сторони площадки ΔS , до яких ці вектори прикладені, приписуючи цим сторонам різні знаки.

Для характеристики масових сил введемо поняття про щільність їх розподілу. Якщо на елементарний об'єм ΔW середовища діє сила $\Delta \vec{G}$, вектор $\vec{g}$, який визначається умовою

$$\vec{g} = \lim_{\Delta W \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta \vec{G}}{\Delta W \rho} \right] \quad (1.23)$$

називається **щільністю розподілу масових сил** в тій точці, до якої стягується об'єм ΔW . Вочевидь, $\vec{g}$ є масовою силою, що припадає на одиницю маси середовища, і має розмірність прискорення. Надалі її проекції на осі декартових прямокутних координат позначаються через X, Y, Z .

Величини $\vec{p}_n$ і $\vec{g}$ є основними характеристиками сил, що діють в рідині. Вони можуть грати роль як зовнішніх, так і внутрішніх сил. Нагадаємо, що в механіці внутрішніми силами системи матеріальних тіл називають сили взаємодії між тілами, що належать системі, а зовнішніми - сили впливу на тіла системи інших тіл, котрі не належать до даної системи. У механіці суцільного середовища матеріальними об'єктами, що утворюють систему, є частки або об'єми суцільного середовища. Відповідно напруження $\vec{p}_n$ і $\vec{p}_{-n}$ будуть внутрішніми, якщо вони діють в точках поверхні розділу між частинками або об'ємами, що утворюють обрану систему. Якщо ж поверхня є граничною для даної сукупності частинок системи, то напруження $\vec{p}_{-n}$ - зовнішнє. Аналогічно величина $\rho \vec{g} W$ може бути внутрішньою силою, якщо вона створюється тілом, включеним в дану систему. Так, наприклад, сила тяжіння буде внутрішньою для системи океан-суша і зовнішньою для будь-якого виділеного об'єму води в океані.

1.2.2. Властивості напружень поверхневих сил

Виділимо в рідині, що знаходиться в стані спокою, елементарний об'єм ΔW у вигляді тетраедра, грані якого $\Delta S_x, \Delta S_y, \Delta S_z$ лежать в координатних площинах, а четверта ΔS_n нормальна напрямку $\vec{n}$ (рис. 1.5). Звернемо увагу на те, що грані $\Delta S_x, \Delta S_y, \Delta S_z$ є від'ємними площадками, оскільки нормалі до них служать вектори $-\vec{i}, -\vec{j}, -\vec{k}$.

Нехай $\vec{p}_x, \vec{p}_y, \vec{p}_z$ - напруження, що діють на відповідних гранях тетраедра; $\vec{a}$ - вектор прискорення його центру мас. Тоді векторне рівняння руху рідинного тетраедра, що виражає другий закон Ньютона, матиме вигляд

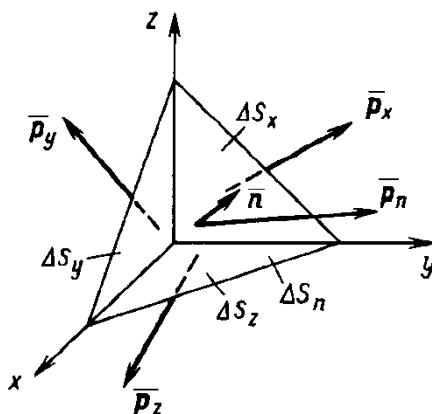


Рис. 1.5. Напруження, що діють на гранях тетраедра

$$\vec{g} \rho \Delta W + \vec{p}_n \Delta \vec{S}_n - \vec{p}_x \Delta S_x - \vec{p}_y \Delta S_y - \vec{p}_z \Delta S_z = \vec{a} \rho \Delta W.$$

Врахуємо, що

$$\lim_{\Delta S_n \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta W}{\Delta S_n} \right] = 0,$$

а

$$\frac{\Delta S_x}{\Delta S_n} = \cos(n, x) = \alpha_{nx}, \frac{\Delta S_y}{\Delta S_n} = \cos(n, y) = \alpha_{ny}, \frac{\Delta S_z}{\Delta S_n} = \cos(n, z) = \alpha_{nz}.$$

Тоді, розділивши всі члени останнього рівняння на ΔS_n , в границі отримаємо

$$\vec{p}_n = \vec{p}_x \alpha_{nx} + \vec{p}_y \alpha_{ny} + \vec{p}_z \alpha_{nz}. \quad (1.24)$$

Отже, напруження на будь-якій площадці ΔS_n можна виразити через напруження на трьох взаємно ортогональних площадках, якими можуть бути і координатні площадки. Співвідношення (1.24) в проекціях на осі координат має вигляд

$$\begin{aligned} p_{nx} &= p_{xx} \alpha_{nx} + p_{yx} \alpha_{ny} + p_{zx} \alpha_{nz}; \\ p_{ny} &= p_{xy} \alpha_{nx} + p_{yy} \alpha_{ny} + p_{zy} \alpha_{nz}; \\ p_{nz} &= p_{xz} \alpha_{nx} + p_{yz} \alpha_{ny} + p_{zz} \alpha_{nz}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Тут, як можна бачити, для кожної з проекцій p_{ij} вживається два індекси, перший з яких вказує орієнтацію площадки (її нормаль), а другий вісь, на яку проектується вектор. Так, наприклад, величина p_{xx} є проекцією на вісь x (другий індекс) напруження $\vec{p}_x$, що діє на площадку, нормальній до осі x (перший індекс). Тому p_{xx}, p_{yy}, p_{zz} являють собою нормальні до відповідних площадок напруження. Різноманітні індекси визначають дотичні напруження, наприклад, p_{yz} є проекцією на вісь z напруження $\vec{p}_y$, прикладеного до площадки, що нормальна до осі y .

Надалі для стислості проекції p_{ij} напружень будемо називати просто напруженнями.

Відомо, що між дотичними напруженнями існує зв'язок виду

$$p_{xy} = p_{yx}; p_{yz} = p_{zy}; p_{zx} = p_{xz},$$

який називається **законом парності дотичних напружень**.

Отже, напружений стан рідини в точці визначається шістьма незалежними скалярними величинами, три з яких є нормальними напруженнями

ми, а три - дотичними (знаки та чисельні значення проекцій векторів залежать від вибору осей координат, тоді як скалярні величини не залежить від нього, тому проекції векторів, а також інші аналогічні за властивостями величини, іноді називають псевдоскалярами). Сукупність дев'яти величин типу p_{ij} , що пов'язані співвідношеннями (1.25), утворюють **тензор напружень**.

З вищевикладеного виходить, що напружений стан в точці середовища, що рухається, визначається тензорною величиною.

У реальних рідинах і газах нормальні напруження можуть створюватися як тиском одних частинок на інші, так і дією сил в'язкості. Дотичні напруження є результатом дії сил в'язкості і залежать від тиску лише остільки, оскільки від нього залежить коефіцієнт в'язкості. Для моделі ідеальної рідини, яка позбавлена в'язкості і в якій всі дотичні напруження дорівнюють нулю, повні напруження спрямовані по нормалі до відповідних площадок і згідно рівнянням (1.25) виражаються формулами

$$p_{nx} = p_{xx}\alpha_{nx}; p_{ny} = p_{yy}\alpha_{ny}; p_{nz} = p_{zz}\alpha_{nz}. \quad (1.26)$$

При цьому напруження повинні бути стискаючими, тобто спрямованими по внутрішнім нормалям, так як по одній з гіпотез механіки суцільних середовищ технічні рідини не витримують зусиль, що розтягують, (через наявність розчиненого повітря). Тому величини p_{nx}, p_{ny}, p_{nz} можна вичислити із співвідношення

$$\begin{aligned} p_{nx} &= \vec{p}_n \vec{i} = p_n \cos(n, x) = p_n \alpha_{nx}; \\ p_{ny} &= p_n \alpha_{nx}; p_{ny} = p_n \alpha_{nx}. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Зіставляючи рівняння (1.26) і (1.27), отримуємо

$$p_n = p_{xx} = p_{yy} = p_{zz}.$$

Ці рівняння показують, що при відсутності дотичних напружень нормальні напруження не залежать від орієнтації площадок і являють собою **тиск p в точці суцільного середовища**, Тобто

$$p = -p_n = -p_{xx} = -p_{yy} = -p_{zz}. \quad (1.28)$$

Згідно виразу (1.28) вектор напруження в даному випадку можна представити у вигляді

$$\vec{p}_n = -p\vec{n}.$$

Знак мінус показує, що напруження направлено по внутрішній нормалі, тобто є стискаючим.

Зауважимо, що дотичні напруження дорівнюють нулю також в будь-якій в'язкій рідині, що знаходиться в спокої, так як при існуванні будь-яких скільки завгодно малих зсувних зусиль через легку рухливість середовища відбулося б відносно переміщення шарів, тобто рідина була б виведена зі стану спокою. Отже, отриманий висновок про незалежність нормальних напружень від орієнтацій площадок справедливий для будь-якої рідини, що знаходиться у стані спокою. Тиск p в цьому випадку називається **гідростатичним**.

1.2.3. Гідростатичний тиск та його властивості

Як було зазначено вище, в рідині і газі, що покоються, дотичні напруження в будь-якій точці дорівнюють нулю, присутні тільки нормальні напруження стиснення (тому що рідини і гази не витримують зусиль, що розтягують), які рівні між собою (1.28). Величина, що дорівнює модулю нормального напруження стиснення, називається **гідростатичним тиском** в точці або просто тиском p .

Гідростатичний тиск в точці може бути також представлений наступним чином (рис. 1.4.). На елементарну площадку ΔS , яка характеризується одиничним вектором нормалі $\vec{n}$, діє поверхнева сила ΔR . Нормальна складова цієї сили ΔP . Напруження стиснення, що виникає від дії цієї сили, визначиться як частка від ділення сили ΔP на площу ΔS

$$p_n = p_{nn} = \frac{\Delta P}{\Delta S}. \quad (1.29)$$

Значення цього напруження прийнято називати середнім гідростатичним тиском. Границя відношення (1.29) при $\Delta S \rightarrow 0$ називається **гідростатичним тиском** в точці - p [H / M^2].

$$p = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta S} \quad (1.30)$$

Хоча властивості гідростатичного тиску були вказані в п. 2.2, підкреслимо їх ще раз:

1. Гідростатичний тиск направлений по внутрішній нормалі до площадки, на яку він діє.
2. Величина гідростатичного тиску не залежить від орієнтації (від кута нахилу) площадки.
3. Тиск на вільній поверхні рідини передається всім точкам рідини одночасно і без спотворень (**закон Паскаля**).

1.2.4. Диференціальні рівняння рівноваги рідини (рівняння Ейлера)

Виділимо в рідині, що знаходиться в стані спокою, нескінченно малий об'єм у формі паралелепіпеда зі сторонами, паралельними осям координат і рівними відповідно dx , dy , dz (рис.1.6.), і розглянемо рівновагу сил, що діють на цей паралелепіпед.

Такими силами є: поверхневі сили гідростатичного тиску на грані паралелепіпеда з боку навколишньої рідини і масові (об'ємні) сили, що пропорційні його масі.

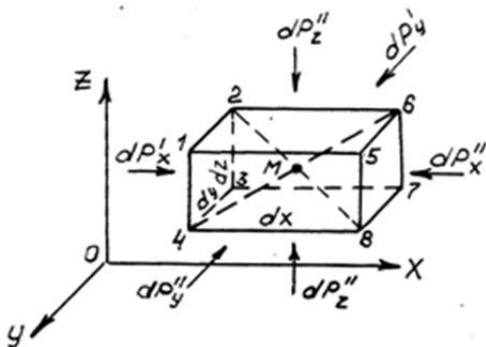


Рис. 1.6. До виводу рівнянь рівноваги рідини

Складемо рівняння проекцій цих сил на координатні осі. При цьому обмежимося докладним розглядом лише одного з них, наприклад рівняння проекцій на вісь x . Будемо припускати, що гідростатичний тиск є безперервна функція координат простору і що його значення в центрі тяжіння паралелепіпеда (т. M) дорівнює p .

Тоді сила гідростатичного тиску на грань 1-2-3-4 дорівнює

$$dP'_x = p'_x \cdot dy \cdot dz$$

Сила гідростатичного тиску на грань 5-6-7-8 аналогічно:

$$dP''_x = p''_x \cdot dy \cdot dz .$$

Так як гідростатичний тиск є функцією координат, то значення p'_x і p''_x можна визначити

$$p'_x = p - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx ;$$

$$p_x'' = p + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx.$$

Проекція масової сили $dG \cdot \cos(d\vec{G}, Ox)$ дорівнює добутку елементарної маси dm на проекцію прискорення X

$$dG \cdot \cos(d\vec{G}, Ox) = g_x dm = \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot X.$$

Рівняння рівноваги в проекції на вісь x має вигляд

$$dP_x' - dP_x'' + dG \cdot \cos(d\vec{G}, Ox) = 0. \quad (1.31)$$

Підставив в (1.31) величини, що отримані раніше, маємо

$$\left[\left(p - \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) - \left(p + \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) \right] dy \cdot dz + \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot X = 0,$$

або

$$-\frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz + \rho \cdot dx dy dz \cdot X = 0. \quad (1.32)$$

Розділив рівняння (1.32) на масу паралелепіпеда dm , отримаємо

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + X = 0.$$

Виконавши аналогічні операції з проекціями зовнішніх сил на осі y і z , маємо систему диференціальних рівнянь рівноваги рідини, вперше отриману в 1755 р. Ейлером

$$\begin{cases} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0; \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0; \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \end{cases} \quad (1.33)$$

Помножимо кожне рівняння (1.33) відповідно на dx , dy , dz і складемо їх

$$X dx + Y dy + Z dz - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) = 0$$

або

$$\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz = \rho (Xdx + Ydy + Zdz) . \quad (1.34)$$

Так як ліва частина рівняння (1.34) являє собою повний диференціал функції dp , тобто

$$\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz = dp ,$$

отже

$$dp = \rho (Xdx + Ydy + Zdz) . \quad (1.35)$$

Дотримання умов рівноваги вимагає при цьому, щоб і права частина рівняння (1.35) була повним диференціалом іншої функції U координат $U = f(x, y, z)$, приватні похідні якої за координатами рівні проекціям прискорень об'ємних сил

$$\frac{\partial U}{\partial x} = X; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Y; \quad \frac{\partial U}{\partial z} = Z. \quad (1.36)$$

Така функція називається силовою, або потенційною, а сили, що задовольняють умовам (1.36), силами, що мають потенціал.

Таким чином, рівняння (1.34) приймає вид

$$dp = \rho \cdot dU . \quad (1.37)$$

Ці ж рівняння можна отримати, використовуючи рівняння руху суцільного середовища в напруженнях

$$\begin{aligned} X + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z} \right) &= \frac{du_x}{dt}; \\ Y + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial z} \right) &= \frac{du_y}{dt}; \\ Z + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} \right) &= \frac{du_z}{dt}. \end{aligned} \quad (1.38)$$

або

$$\vec{g} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} \right) = \frac{d\vec{u}}{dt} . \quad (1.39)$$

Вважаючи $\frac{d\bar{u}}{dt} = 0$ і враховуючи, що в нерухомій рідині дотичні напруження відсутні, рівняння (1.39) можна записати

$$\bar{g} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \bar{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{p}_z}{\partial z} \right) = 0.$$

Використовуючи поняття градієнта скалярної функції p , це рівняння можна представити у вигляді співвідношення

$$\rho \bar{G} = \text{grad } p. \quad (1.40)$$

Рівняння (1.40) є рівнянням рівноваги рідини в векторній формі, справедливе як для абсолютної, так і для відносної рівноваги рідини.

З'ясуємо умови інтегрованості цього рівняння. Для цього застосуємо до нього диференціальну операцію rot , вважаючи $\rho = \text{const}$,

$$\text{rot } \rho \bar{G} = \rho \text{rot } \bar{G} = \text{rot grad } p.$$

Як відомо, вихор потенційного вектору дорівнює нулю, тобто $\text{rot grad } p = 0$.

З урахуванням цього отримаємо

$$\text{rot } \bar{G} = 0. \quad (1.41)$$

Умова (1.41) показує, що $\bar{G}$ - потенційний вектор, тобто поле напруження масових сил в цьому випадку має потенціал U

$$\bar{G} = \text{grad } U \quad (1.42)$$

або

$$\rho \text{grad } U = \text{grad } p, \quad (1.43)$$

або

$$dp = \rho dU,$$

що відповідає формулі (1.37).

Рівняння $dp = \rho(Xdx + Ydy + Zdz)$ називають основним диференціальним рівнянням рівноваги рідини, воно має загальний характер і може бути використано і для стисливої рідини. У цьому рівнянні невідомі тільки дві величини ρ і p (значення проекцій одиничних масових сил і координати

точки передбачаються заданими). Отже, для отримання однозначного рішення рівняння (1.35) потрібно скористатися так званим характеристичним рівнянням, яке визначало б зв'язок між фізичними властивостями і станом даної рідини, наприклад зв'язок між густиною рідини, її температурою і тиском.

Поверхня, в кожній точці якої значення даної функції постійно, називається поверхнею рівня. Рівняння поверхні рівного тиску просто виходить з рівняння (1.35). Так для поверхні рівня $p = \text{const}$ в будь-якій точці, $dp = 0$ і, отже, права частина рівняння також дорівнює нулю. Густина рідини ρ відмінна від нуля, тому:

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0 \quad (1.44)$$

або

$$dU = 0 .$$

З останнього рівняння випливає, що поверхня рівня одночасно є і поверхнею рівного потенціалу або так званою *еквіпотенційною поверхнею*.

1.2.5. Інтегрування рівнянь рівноваги рідини. Рівновага рідини в полі сили тяжіння. Основне рівняння гідростатики

Щоб інтегрувати рівняння рівноваги, підставимо в (1.40) значення $\vec{G}$, що виражене через потенціал U , та отримаємо

$$\rho \text{grad} U = \text{grad} p \quad (1.44)$$

або

$$\text{grad}(p - \rho U) = 0 . \quad (1.45)$$

Операція обчислення градієнта аналогічна диференціюванню по координатах x, y, z . Згідно (1.45) вираз під знаком градієнта постійний і не залежить від координат x, y, z . На підставі цього отримуємо інтеграл рівняння рівноваги

$$p - \rho U = C , \quad (1.46)$$

де C - постійна інтегрування, яка не залежить від координат, тобто постійна для всіх точок простору. Визначимо цю постійну з граничних умов:

Нехай при x_0, y_0, z_0 відомі значення U і p , тобто $U = U_0, \quad p = p_0$. Підставляючи ці значення в (1.46), отримуємо

$$p - p_0 = \rho (U - U_0),$$

звідки

$$p = p_0 + \rho(U - U_0). \quad (1.47)$$

Величина $\rho(U - U_0)$ представляє результат дії на рідину тільки масових сил і не залежить від тиску p_0 . В силу цього, якщо в точках на границі рідини збільшити тиск p_0 на деяку величину, не порушуючи при цьому рівноваги рідини, то відповідно до (1.47) у всіх точках об'єму, зайнятого рідиною, тиск збільшиться на цю ж величину. Це становить відомий **закон Паскаля**, згідно з яким **прикладений до поверхні рідини зовнішній тиск передається рідиною в усіх напрямках однаково**.

Розглянемо важливий окремий випадок, коли на однорідну ($\rho = \text{const}$) рідину, що знаходиться в стані покою, діє лише одна масова сила - сила тяжіння, а прискорення - прискорення вільного падіння $-g$. При цьому проєкції прискорень об'ємних сил дорівнюватимуть:

$$X = 0, Y = 0, Z = -g.$$

Підставимо ці величини в (1.35), отримаємо

$$dp = -\rho g dz \quad (1.48)$$

або, що те ж саме

$$dp + \rho g dz = 0 \quad (1.49)$$

Інтегруємо останнє рівняння, знайдемо

$$p + \rho g z = C \quad (1.50)$$

або

$$z + \frac{p}{\rho g} = C. \quad (1.51)$$

Рівняння (1.51) називається **основним рівнянням гідростатики**, воно висловлює закон розподілу гідростатичного тиску в рідині, що знаходиться в стані спокою.

Для визначення постійної інтегрування розглянемо рівновагу рідини в судині довільної форми з вільною поверхнею (рис. 1.7).

Тиск в кожній точці на вільній поверхні $p = p_0$, відстань від довільної площини порівняння (площина xOy) до вільної поверхні дорівнює z_0 . Тоді

$$z_0 + \frac{p_0}{\rho g} = C$$

і основне рівняння гідростатики прийме наступний вигляд

$$z + \frac{p}{\rho g} = z_0 + \frac{p_0}{\rho g} \quad (1.52)$$

або

$$p = p_0 + \rho g(z_0 - z) . \quad (1.53)$$

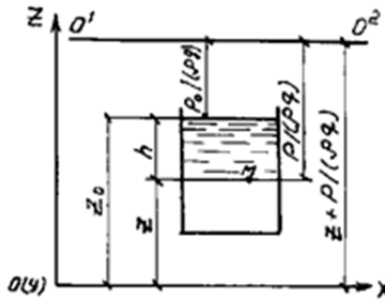


Рис. 1.7. Рівновага рідини в полі сили тяжіння

Так як $z_0 - z = h$ - глибина занурення точки M , тому

$$p = p_0 + \rho g h . \quad (1.54)$$

Це рівняння являє собою іншу форму запису **основного рівняння гідростатики**, що дозволяє визначити тиск в будь-якій точці рідини, знаючи тиск на вільній поверхні і глибину занурення цієї точки відносно вільної поверхні.

Рівняння (1.54) можна отримати з рівняння (1.47)

$$p = p_0 + \rho(U - U_0) .$$

Вважаючи $U = -g z$, $U_0 = -g z_0$, знайдемо

$$p = p_0 + \rho g(z_0 - z) ,$$

або

$$p = p_0 + \rho g h .$$

Це рівняння можна отримати і більш простим шляхом, розглянувши рівновагу рідини в судині (рис.1.8), на вільну поверхню якої діє тиск p_0 . Знайдемо гідростатичний тиск p в довільно взятій точці M , що розташована на глибині h .

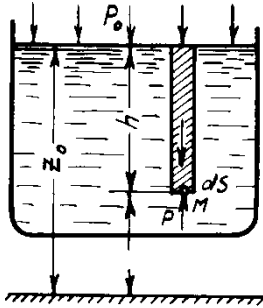


Рис.1.8. Схема для виводу основного рівняння гідростатики

Виділимо близько точки M елементарну горизонтальну площадку dS і побудуємо на ній вертикальний циліндричний об'єм висотою h . Розглянемо умову рівноваги зазначеного об'єму рідини, виділеного із загальної маси рідини. Тиск рідини на нижню основу циліндра тепер буде зовнішнім і направлений по нормалі всередину об'єму, тобто вгору.

Напишемо суму сил, що діють на даний об'єм в проекції на вертикаль

$$p dS - p_0 dS - \rho g h dS = 0 .$$

Останній член рівняння являє собою вагу рідини в виділеному обсязі (об'ємі). Скоротивши вираз на dS і згрупувавши члени, знайдемо

$$p = p_0 + \rho g h .$$

Позначивши координату точки M через z , а координату вільної поверхні - через z_0 і замінивши h на $z_0 - z$, отримаємо

$$z + \frac{p}{\rho g} = z_0 + \frac{p_0}{\rho g} .$$

Так як точка M була взята довільно, можна стверджувати, що для всього розглянутого нерухомого об'єму

$$z + \frac{p}{\rho g} = Const ,$$

або

$$p + \rho g z = Const .$$

Координата z називається **геометричною висотою**. Величина $\frac{p}{\rho g}$ має лінійну розмірність і називається **п'єзометричною висотою**. Сума $z + \frac{p}{\rho g}$ називається **гідростатичним напором**.

Таким чином, гідростатичний напір є величиною постійною для всього об'єму нерухомої рідини.

У гідравліці величина p називається **повним або абсолютним** гідростатичним тиском, p_0 - зовнішнім тиском або тиском на поверхні, а величина $\rho g h$ при постійній густині залежить тільки від глибини занурення точки і називається **надлишковим** тиском (звернемо увагу, що в аеродинаміці надлишковим тиском прийнято називати різницю між абсолютним і атмосферним тиском).

З рівняння (1.54) виходить, що розподіл гідростатичного тиску по вертикалі лінійно залежить від глибини занурення даної точки і може бути графічно представлений у вигляді трапеції для абсолютного тиску (рис.1.9, а) або прямокутного трикутника для надлишкового тиску (рис.1.9, б). Кут нахилу лінії тиску залежить від густини рідини.

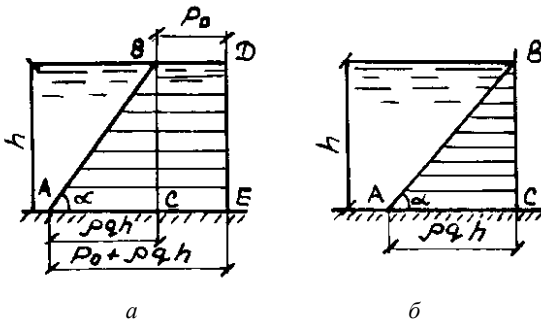


Рис. 1.9. Епюри розподілу гідростатичного тиску:
а – абсолютного, б – надлишкового

1.2.6. Рівновага газу в полі сили тяжіння. Барометрична формула

Диференціальні рівняння рівноваги (1.35) і поверхні рівня (1.43) мають загальний характер та можуть бути використані при розрахунку стисливої рідини або газу, густина якого є величиною змінною, що залежить від стану газу.

Оскільки $X = 0$, $Y = 0$, $Z = -g$, рівняння поверхні рівня для газу набуває вигляду

$$-g dz = 0; \quad z = \text{const}. \quad (1.55)$$

Отже, поверхнею рівного тиску для газу, що знаходиться в рівновазі, буде будь-яка горизонтальна площина, проведена всередині займаного газом об'єму (рис. 1.10).

Зміна тиску в газі буде залежати не тільки від координати точки M всередині нього, а й від зв'язку тиску, густини і температури газу між собою, який встановлюється рівнянням газового стану $p = f(\rho, T)$.

Для однорідної атмосфери ($\rho = \text{const}$), розподіл тиску не відрізняється від розподілу тиску в крапельній рідині, що знаходиться в стані покою, дійсно при $X = 0$, $Y = 0$, $Z = -g$

$$dp = -\rho g dz;$$

$$p = -\rho g z + C.$$

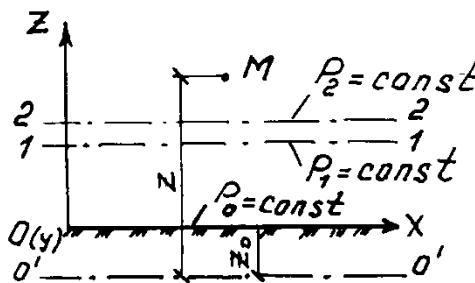


Рис. 1.10. Рівновага газу в полі сили тяжіння

Визначивши постійну інтегрування з граничних умов (наприклад, на поверхні землі), отримаємо

$$p = p_0 + \rho g(z_0 - z).$$

Отримане рівняння показує, що зі збільшенням висоти до розглянутої точки тиск зменшується, тому що в обраній системі координат $z > z_0$.

Для ізотермічного стану газу його густина змінюється відповідно до рівняння Клапейрона (1.7)

$$\frac{p}{\rho} = RT \quad \text{або} \quad \rho = \frac{p}{RT}. \quad (1.56)$$

Після підстановки рівняння (1.56) в диференціальне рівняння рівноваги (1.35) отримаємо

$$dp = -g \frac{p}{RT} dz.$$

Після розділення змінних

$$g dz = -RT \frac{p}{dp}. \quad (1.57)$$

Інтегруючи вираз (1.57), отримаємо

$$g z = -RT \ln p + C.$$

З урахуванням граничних умов на поверхні землі напишемо

$$g(z - z_0) = -RT \ln \left(\frac{p}{p_0} \right). \quad (1.58)$$

Так як $z - z_0 = h$, то вираз для тиску p набуде вигляду

$$p = p_0 e^{-\frac{g h}{RT}}. \quad (1.59)$$

Рівняння (1.59) показує, що при ізотермічному стані тиск в газі, що знаходиться в стані спокою, змінюється по експоненціальному закону, зменшуючись зі збільшенням висоти.

При постійній температурі газу (закон Бройля - Маріотта) густина є лінійною функцією тиску

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{p}{p_0}.$$

Після підстановки цього виразу в диференціальне рівняння (1.35) та інтегрування його аналогічно попередньому випадку отримаємо

$$z = \frac{P_0}{\rho_0 g} \ln \frac{P_0}{P}. \quad (1.60)$$

Вирішив рівняння щодо p , знайдемо залежність тиску газу від висоти при постійній температурі,

$$p = p_0 e^{-\frac{z}{h_0}}, \quad (1.61)$$

де

$$h_0 = \frac{P_0}{\rho_0 g}.$$

Застосувавши рівняння (1.60) до двох висот z_1 і z_2 отримаємо співвідношення

$$z_1 = h_0 \ln \frac{P_0}{P_1} \text{ і } z_2 = h_0 \ln \frac{P_0}{P_2}.$$

Віднявши з z_1 величину z_2 , отримаємо так звану **барометричну формулу** для вимірювання різниці висот за заданим значенням тиску p_1 і p_2 у вигляді

$$z_1 - z_2 = h_0 \ln \frac{P_2}{P_1}. \quad (1.62)$$

1.2.7. Одиниці виміру тиску. Прилади для вимірювання тиску

Як слідує з визначення гідростатичного тиску (1.30), його розмірність в СІ - H/m^2 , і ця одиниця отримала назву *Паскаль* - (*Па*). Також використовуються похідні одиниці - *кПа* (*кілопаскаль*) та *МПа* (*мегапаскаль*).

$$1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2 = 10^{-3} \text{ кПа} = 10^{-6} \text{ МПа}$$

У техніці в даний час продовжують застосовувати також систему одиниць МКГСС, в якій за одиницю тиску приймають $кгс/м^2$. Використовують також і позасистемні одиниці - технічну атмосферу (*ат*), фізичну атмосферу (*атм*) і *бар*

$$1 \text{ ат} = 1 \text{ кгс/см}^2 = 10\,000 \text{ кгс/м}^2 = 9,81 \cdot 10^4 \text{ Па};$$

$$1 \text{ бар} = 10^5 \text{ Па} = 1,02 \text{ ат.}$$

Часто тиск в рідинах або газах чисельно виражають у вигляді відношення цього тиску до гідростатичного тиску $\frac{P}{\rho g}$, тоді використовують такі одиниці вимірювання тиску - метри водяного стовпа (м вод. ст.) і міліметри ртутного стовпа (мм рт. ст.).

$$1 \text{ ат} = 10 \text{ м вод. ст.} = 735 \text{ мм рт. ст.}, 1 \text{ атм} = 760 \text{ мм рт. ст.}$$

В англійських країнах можуть використовувати одиницю вимірювання тиску - фунт на квадратний дюйм або psi

$$\text{psi} = \frac{\text{pound}}{\text{square inch}} (\text{фунт} / \text{дюйм}^2);$$

$$(1 \text{ фунт} = 454 \text{ г}, 1 \text{ дюйм} = 25,4 \text{ мм}).$$

Співвідношення між деякими одиницями, що не входять до системи СІ, приведені в таблиці 1.9.

Т а б л и ц я 1.9

Співвідношення між одиницями тиску

Одиниці, що не входять до СІ	бар	система СІ
1 ат	0,981 бар	98,1 кПа
1 м вод. ст. = 0,1 ат	98,1 мбар	9,81 кПа
1 мм. вод. ст. = 10^{-4} ат	98,1 мкбар	9,81 Па
1 бар		100 кПа
1 мм рт. ст.	1,333 мбар	133,3 Па
1 атм	1,013 бар	101,3 кПа
1 фунт-сила / кв. ярд	53,2 мкбар	5,32 Па
1 фунт-сила / кв. фут	478,8 мкбар	47,88 Па
1 фунт-сила / кв. дюйм	68,95 мбар	6,895 кПа
1 дюйм вод. ст.	2,49 мбар	249,1 Па
1 дюйм рт. ст.	33,86 мбар	3,386 кПа

У технічній механіці рідини тиск, як і багато інших фізичних одиниць (наприклад, температура) може вимірюватися в абсолютних або відносних величинах, тобто відрховуватися від абсолютного або відносного нуля. За відносний нуль в гідромеханіці приймають атмосферний тиск (рис.1.11).

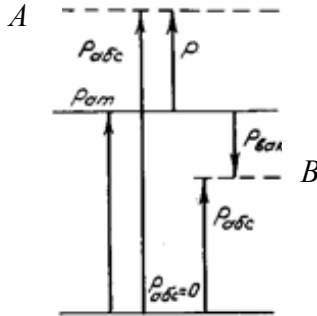


Рис. 1.11. Вимірювання тиску

Тоді тиск в т. A відносно до абсолютного нуля - $p_{абс\ A}$, а в відносних одиницях тиск в т. A - p_A . Тиск, відмінний від атмосферного називається **надлишковим (манометричним) тиском**. Зауважимо, що абсолютний тиск завжди позитивний, а надмірний може бути і додатним і від'ємним. Так, надлишковий тиск в т. B - від'ємний. Від'ємний надлишковий тиск називається **вакуумом**. Тоді

$$p_{абс} = p_{атм} + p, \quad (1.63)$$

а

$$p_{вак} = p_{атм} - p_{абс} \quad (1.64)$$

або

$$p_{вак} = -p. \quad (1.65)$$

Для вимірювання тиску існують різні прилади, які можна розділити на два класи - рідинні та механічні. Принцип дії рідинних приладів полягає в тому, що тиск, який вимірюється в точці підключення, зрівноважується тиском стовпа рідини, висота якого служить мірою тиску. Робота механічних манометрів заснована на використанні закону Гука при деформації під дією тиску пружних елементів приладів - пружин, які можуть бути виконані у вигляді зігнутої трубки, мембрани, сильфону та ін.

1.2.8. Класифікація приладів

Прилади для вимірювання тиску рідини досить різноманітні і класифікуються за різними ознаками - принципу дії, роду вимірюваної величини, класу точності, діапазону вимірюваної величини.

За родом вимірюваної величини прилади поділяють на 4 групи:

1. Барометри - прилади для вимірювання атмосферного тиску.
2. Манометри і вакуумметри - прилади для вимірювання додатного надлишкового тиску і вакууму – від’ємного надлишкового тиску, взятого з додатним знаком. Прилади, що вимірюють обидва ці тиску, називаються мановакуумметрами.
3. Диференціальні манометри - прилади для вимірювання різниці тисків.
4. Прилади для вимірювання малих величин додатного надлишкового тиску або вакууму - мікроманометри.

Прилади для вимірювання тиску мають такі класи точності: 0,005; 0,02; 0,05; 0,1; 0,2; 0,4; 0,5; 1,0; 2,0; 2,5; 4,0; 6,0. Прилади з класами точності 0,005 ... 0,4 використовуються як зразкові, а решта - як робочі (або технічні).

За принципом дії розрізняють прилади рідинні, пружинні, поршневі, електричні, комбіновані та ін.

Рідинні прилади. Принцип їх дії полягає в тому, що тиск, який вимірюється в точці підключення, зрівноважується тиском стовпа рідини, висота якого служить мірою тиску.

П’езометр застосовується для вимірювання додатних і від’ємних надлишкових тисків та представляє собою прозору трубку, один кінець якої відкритий і з’єднаний з атмосферою, а другий приєднаний до місця вимірювання тиску (рис.1.12).

За показаннями п’езометрів 1 і 3 визначаються додатні надлишкові тиски відповідно в точці А і на вільній поверхні p_0

$$p_A = \rho g h = \gamma h; \quad p_0 = \rho g h_1 = \gamma h_1,$$

де ρ і γ - густина і питома вага рідини в судині та п’езометричних трубках.

Для вимірювання від’ємного надлишкового тиску п’езометрична трубка повинна бути вигнута і підключена до місця вимірювання тиску таким чином, як це показано на рис. 1.12. При цьому рівень рідини (тієї ж самої, що і в судині) в правому відкритому кінці п’езометра буде нижче, ніж в точці приєднання приладу, який буде називатися *U* - образним п’езометром.

U - образний мановакуумметр (рис. 1.13) відрізняється від нього тим, що в ньому використовується робоча рідина, питома вага якої γ_p зна-

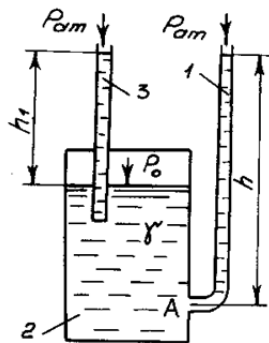


Рис 1.12. Схема підключення п’езометрів

чно перевищує питому вагу γ рідини в судині. Це дозволяє зменшити висоту підйому рідини в приладі, а відповідно і його габарити, та збільшити діапазон тисків, що вимірюються.

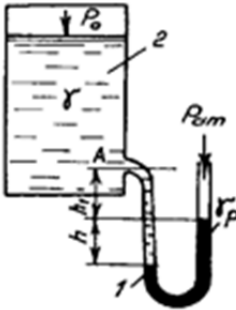


Рис.1.13. Схема підключення U-образного мановакуумметра

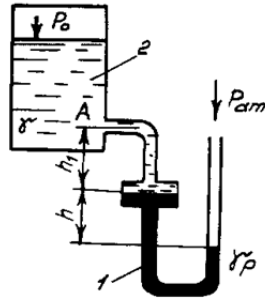


Рис. 1.14. Схема підключення чашкового мановакуумметра

Надлишковий тиск в точці A визначається з виразу

$$p_A = \rho_p g h - \rho g (h + h_1)$$

Чашковий мановакуумметр (рис.1.14) є модифікацією U-образного приладу, у якого одне з колін замінено чашкою. Її діаметр великий, в порівнянні з діаметром трубки, що дозволяє знехтувати зміною рівня рідини в чашці, приймаючи його за «0» відліку. При необхідності поправку можна врахувати, виходячи з рівності зміни об'ємів рідини в трубці і чашці.

За показаннями приладу (рис. 1.14) від'ємний надлишковий тиск в точці A знаходиться згідно залежності

$$p_A = \rho_p g h - \rho g h_1 = -(\rho_p h + \rho h_1) g = -(\gamma_p h + \gamma h_1).$$

При додатному надмірному тиску в точці приєднання приладу рівень робочої рідини в трубці буде вище рівня в чашці, а різниця $(\gamma_p h - \gamma h_1)$ - додатною.

Диференціальний манометр (рис.1.15) обома кінцями зігнутої прозорою трубки 1 приєднується до точок, різницю тисків в яких необхідно визначити.

У наведеному прикладі це різниця тисків p_1 і p_2 на рівнях центрів судин 3 і 2, що заповнені однаковою рідиною з густиною ρ .

Поверхнею рівного тиску буде горизонтальна площина 0-0, в якій тиски, що створені стовпами рідини в лівій і правій трубках, будуть однакові.

Ця умова записується рівнянням

$$p_2 + \rho g(z_2 - \Delta h) + \rho_p g \Delta h = p_1 + \rho g z_1,$$

з якого отримуємо після деяких перетворень

$$\begin{aligned} \Delta p &= p_1 - p_2 = \\ &= (\rho_p - \rho)g \Delta h - \rho g(z_1 - z_2), \end{aligned}$$

тобто для визначення різниці тисків в точках приєднання приладу необхідно знати не тільки його показання Δh , але і різницю висот $(z_1 - z_2)$ мірних точок.

Для збільшення точності при вимірюванні малих тисків в газах (до $5 \cdot 10^3$ Па) застосовують **чашкові мікроманометри з похилою трубкою** (рис.1.16).

При вимірюванні додатного надлишкового тиску P_0 чашка 1, що заповнена робочою рідиною, з'єднується з місцем його вимірювання в будь-якому газовому середовищі, а верхній кінець похилої трубки 2 - з атмосферою.

Під дією тиску рідина в трубці переміщується на величину l , а значення тиску, що вимірюється визначається з виразу

$$p_0 = \rho g l \sin \alpha,$$

де α - кут нахилу трубки відносно горизонтальної площини.

Завдяки простоті пристрою, високої точності вимірювань тиску і стабільності забезпечення цієї точності протягом часу, рідинні прилади

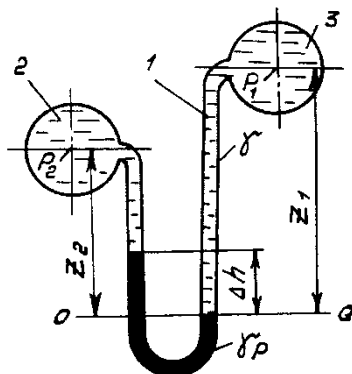


Рис. 1.15. Диференціальний манометр

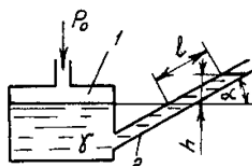


Рис. 1.16. Мікроманометр

стали широко застосовуватися в лабораторній практиці, а також як зразкові при перевірці і градуюванні шкал інших приладів для вимірювання тиску.

Практично точність вимірювання тиску рідинними приладами визначається головним чином точністю вимірювання висот.

Помилки у величинах визначення густини, неточності градуювання шкал зазвичай незначні.

До недоліків рідинних приладів слід віднести їх крихкість, нетранспортабельність, вузький діапазон вимірюваних тисків, що не перевищують $0,4 \text{ МПа}$ для ртутних манометрів, громіздкість. При використанні ртуті та інших важких рідин, пари яких отруйні, необхідно дотримуватися запобіжних заходів, що виключають контакт цих рідин з атмосферою і викид в неї.

Пружинні прилади. Їх робота заснована на використанні закону Гука при деформаціях під дією тиску інших елементів приладів - пружин, які можуть бути виконані у вигляді зігнутої трубки, мембрани, сифону та ін.

Манометр з одновитковою трубчастою пружиною (рис.1.17) представляє собою поміщену в корпус 1 вигнуту по колу трубку 4 з овальною формою в поперечному перерізі.

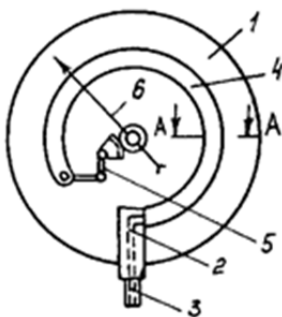


Рис. 1.17. Схема манометра з трубчастою пружиною

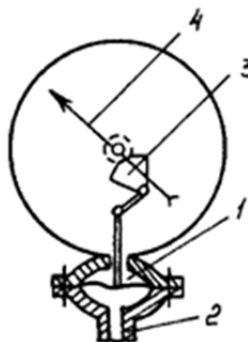


Рис. 1.18. Схема манометра з мембраною

Один кінець її запаюний і через передатний механізм 5 з'єднаний зі стрілкою 6. Другий кінець закріплений на тримачі 2 зі штуцером 3, за допомогою якого прилад встановлюється в місце вимірювання тиску.

При додатному надмірному тиску трубка під його впливом частково розпрямляється, і її деформація передається на стрілку, яка повертається на деякий кут, пропорційний вимірюваному тиску.

У вакууметрі під впливом атмосферного тиску, що більше внутрішнього тиску, трубка згинається.

Деякі трубчасті прилади, що називаються мановакуумметри, вимірюють додатний надлишковий тиск і вакуум.

В залежності від матеріалу, форми і розмірів пружного елемента трубчасті манометри загальнотехнічного призначення мають шкали з граничними значеннями від 0,05 до 1000 МПа.

У приладах з мембранної пружиною (рис. 1.18) пружний елемент - мембрана - являє собою гофровану, металеву, круглу пластинку 1, що защемлена між фланцями. Під дією тиску рідини, що надходить через штуцер 2, мембрана прогинається і деформація передається на стрілку 4 приладу.

Мембранні прилади застосовуються для вимірювання вакууму і надлишкового тиску, що не перевищує 2,5 МПа.

Цінними якостями пружинних приладів є портативність, універсальність, простота пристрою і застосування, величезний діапазон вимірюваних тисків. До основних недоліків цих приладів слід віднести нестабільність їхніх показань, яка викликана залишковими деформаціями пружного елемента і зміною його механічних характеристик, зносом передатного механізму та ін., що змушує періодично повіряти пружинні прилади.

1.2.9. Відносна рівновага рідини

Відносною рівновагою рідини називається такий стан, при якому кожна її частка зберігає своє становище відносно твердої стінки судини, що рухається. При цьому можна розглядати два завдання - визначення форми поверхні рівня і розподіл тиску, які вирішуються за допомогою раніше виведених рівнянь (1.35) і (1.44). Зрозуміло, що, крім масових сил, слід враховувати і сили інерції.

Вертикальний рух судини з рідиною з постійним прискоренням. Нехай судина, що заповнена рідиною, рухається вертикально з постійним прискоренням a (рис. 1.19). Для визначення форми поверхні рівного тиску скористаємося рівнянням (1.43)

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0.$$

Проекції одиничних сил на координатні осі будуть

$$X = 0 \quad Y = 0 \quad Z = -g \pm a$$

(знак «-» відповідає підйому, а знак «+» спуску резервуара з постійним прискоренням).

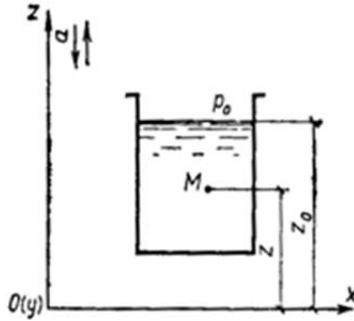


Рис. 1.19. Вертикальне переміщення судини

Складемо рівняння поверхні рівня

$$(-g \pm a)dz = 0 . \quad (1.66)$$

Якщо $a \neq g$, то $dz = 0$, і, отже, $z = \text{const}$, тобто при рівноприскореному русі судини з рідиною по вертикалі, поверхні рівного тиску являють собою горизонтальні площини.

Характер розподілу тиску отримаємо, використовуючи рівняння (1.35)

$$dp = \rho(Xdx + Ydy + Zdz) . \quad (1.67)$$

Підставив значення проекцій одиничних масових сил, отримаємо

$$dp = \rho(-g \pm a)dz . \quad (1.68)$$

Інтегруємо це рівняння при граничних умовах $z=z_0$ і $p=p_0$, після чого отримаємо закон розподілу тиску уздовж будь-якої вертикалі

$$p - p_0 = \rho g \left(1 \pm \frac{a}{g} \right) (z_0 - z) . \quad (1.69)$$

Це рівняння показує, що при русі судини з рідиною по вертикалі з постійним прискоренням a розподіл тиску підпорядковується лінійному закону.

Горизонтальний рух судини з постійним прискоренням. Розглянемо горизонтальне переміщення судини з рідиною з постійним прискоренням a (рис.1.20).

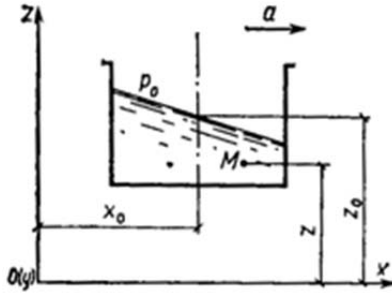


Рис. 1.20. Горизонтальне переміщення судини

В цьому випадку проекції масових сил рівні

$$X = -a \quad Y = 0 \quad Z = -g .$$

Поверхня рівного тиску при цьому визначається рівнянням

$$-(adx + g dz) = 0 . \quad (1.70)$$

Після інтегрування отримаємо

$$z = \frac{const - ax}{g} = const - \frac{ax}{g} . \quad (1.71)$$

З рівняння (1.71) слідує, що поверхнями рівного тиску будуть похилі площини. Кут їх нахилу до горизонту дорівнює

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{a}{g} .$$

Закон розподілу тиску отримаємо після інтегрування рівняння (1.35) з урахуванням того, що $X = -a$ $Y = 0$ $Z = -g$, а граничні умови мають вигляд

$$\begin{aligned} x = x_0, z = z_0, p = p_0 . \\ p = p_0 + \rho a (x_0 - x) + \rho g (z_0 - z) . \end{aligned} \quad (1.72)$$

Рівняння (1.72) показує, що при горизонтальному русі судини з рідиною з постійним прискоренням a розподіл тиску також підпорядковується лінійному закону для будь-якої вертикалі.

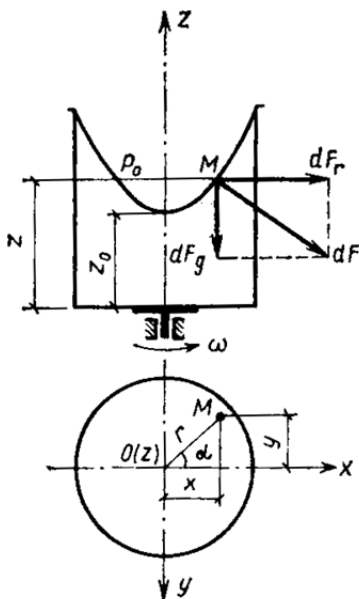


Рис. 1.21. Обертання судини з рідиною

Обертання циліндричної судини з рідиною з постійною кутовою швидкістю ω . Нехай циліндрична судина, яка заповнена рідиною, обертається з постійною кутовою швидкістю ω навколо осі z (рис.1.21).

Визначимо форму вільної поверхні і знайдемо розподіл тиску. Виберемо поблизу вільної поверхні частинку рідини масою dm ; на цю частку діє масова сила dF , яка спрямована по нормалі до вільної поверхні. Розкладемо цю силу на дві складові: горизонтальну (відцентрову) силу

$$dF_r = \omega^2 r dm$$

і вертикальну, яка визначається полем сили тяжіння,

$$dF_g = -g dm .$$

Проекції одиничних масових сил отримаємо, якщо поділимо діючі сили на dm ,

$$X = \omega^2 r \cos \alpha = \omega^2 x; Y = \omega^2 r \sin \alpha = \omega^2 y; Z = -g .$$

Диференціальне рівняння поверхні рівня в нашому випадку прийме наступний вигляд

$$\omega^2 x dx + \omega^2 y dy - g dz = 0,$$

або

$$\omega^2 r dr - g dz = 0 .$$

Інтегруючи це рівняння, отримаємо для поверхні рівного тиску

$$\omega^2 \frac{r^2}{2} - g dz = const . \quad (1.73)$$

Таким чином, при обертанні посудини з рідиною з постійною швидкістю навколо вертикальної осі поверхнями рівного тиску буде сімейство параболоїдів обертання, віссю симетрії яких є вісь z .

Закон розподілу тиску по вертикальній координаті і радіусу знайдемо з диференціального рівняння (1.35), яке в даному випадку прийме наступний вигляд

$$dp = \rho(\omega^2 x dx + \omega^2 y dy - g dz)$$

або

$$dp = \rho(\omega^2 r dr - g dz). \quad (1.74)$$

Після інтегрування з урахуванням граничних умов ($r = 0$, $z = z_0$, $p = p_0$) отримаємо закон розподілу тиску

$$p = p_0 + \rho \omega^2 \frac{r^2}{2} + \rho g (z_0 - z). \quad (1.75)$$

Рівняння (1.75) показує, що в даному випадку розподіл тиску по вертикальній координаті підпорядковується лінійному закону для будь-якої фіксованої круглої циліндричної поверхні.

1.2.10. Контрольні питання

1. Що таке поверхневі та об'ємні сили, що діють в рідині?
2. Дайте визначення гідростатичного тиску.
3. Перерахуйте і поясніть властивості гідростатичного тиску.
4. Перерахуйте основні одиниці вимірювання тиску та їх взаємозв'язок.
5. У яких випадках використовуються рідинні прилади для вимірювання тиску, механічні?
6. Поясніть форму поверхні рідини в судині, що обертається.

1.3. Сили тиску рідини на поверхні

Однією з практично важливих задач в гідростатиці є визначення сил, що діють з боку рідини на різні поверхні, задачі про теорію плавання та остійності суден та багато інших завдань.

1.3.1. Сила тиску рідини на плоску горизонтальну поверхню

Дія сил гідростатичного тиску, розподіленого по поверхні, яка цей тиск сприймає, може бути замінена дією однієї зосередженої сили - їх рівнодіючої.

При визначенні силового впливу рідини на тверду поверхню вирішують зазвичай два завдання: визначають величину рівнодіючої сили гідростатичного тиску та знаходять точку її прикладання (центр тиску).

Розглянемо спочатку найпростіший випадок - тиск рідини на плоске дно циліндричної посудини (рис. 1.22).

Виділимо в межах площі дна елементарну площадку $d\omega$; Вочевидь, що тиск в кожній її точці буде постійним. Сила тиску dP на цю площадку дорівнює

$$dP = p d\omega ,$$

де $p = p_0 + \rho gh$ - повний гідростатичний тиск в будь-якій точці площі дна.

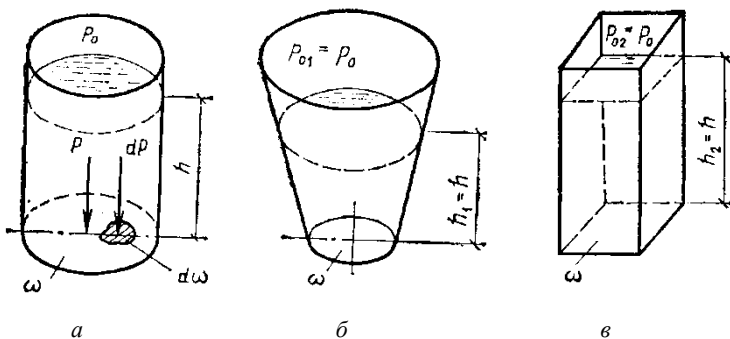


Рис. 1.22. Сила тиску рідини на горизонтальну площину:
а – циліндрична судина, б – конічна судина, в – прямокутна судина

Рівнодіюча сила тиску визначиться інтегралом від елементарної сили, що взятий по всій площі дна

$$P = \int_{\omega} dP = \int_{\omega} p d\omega = (p_0 + \rho gh) \omega . \quad (1.76)$$

Рівняння (1.76) показує, що незалежно від форми судини, заповненої рідиною, і форми її плоского дна (рис. 1.22, б, в) сила гідростатичного тиску буде однаковою, якщо тиск на вільній поверхні і висоти рідини в судинах будуть однакові, тобто

$$p_0 = p_{01} = p_{02} \text{ і } h = h_1 = h_2 .$$

Таким чином, сила тиску на дно судини не залежить від його форми, а залежить тільки від глибини рідини в судині і площі дна. Це положення, що відкрите в 17 столітті Паскалем, носить в гідравліці назву **«гідростатичного парадоксу»**. Це явище знаходить застосування тоді, коли необхідно створити великі тиски за допомогою малих кількостей води. Наприклад, для випробування цистерн на міцність до них підводять напірні трубки. Налив воду в цистерну і додав в трубки незначну кількість рідини, можна значно підвищити тиск на стінки і дно цистерни, доводячи його за певних значень рівня рідини в трубках до розрахункових.

У разі рівномірно розподіленого навантаження на дно судини точка прикладання рівнодіюча і центр тяжіння площадки збігаються.

1.3.2. Сила тиску рідини на похилу плоску поверхню

Нехай рідина знаходиться в судині з плоскою бічною стінкою, розташованій в загальному випадку під довільним кутом α до горизонту (рис.1.23). Знайдемо силу гідростатичного тиску на площадку ω , що лежить в площині стінки. Вісь координат Oz розташована уздовж даної стінки; вісь Ox збігається з лінією перетину площини вільної поверхні з площиною стінки і розташовується перпендикулярно площині креслення. Для наочності розгорнемо площину стіни разом з розташованою на ній площадкою ω на 90° до збігу її з площиною креслення, в цьому випадку вісь Ox буде спрямована зліва направо під прямим кутом до осі Oz .

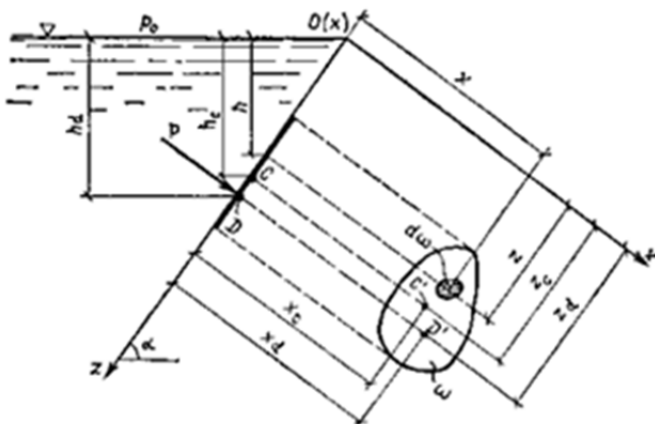


Рис. 1.23. До визначення сили тиску рідини на похилу площину

В межах площадки ω виберемо нескінченно малу площадку $d\omega$, що знаходиться на довільній глибині h від вільної поверхні та на довільній відстані x від осі Oz . Введемо позначення: h_c і h_o - глибина занурення центру тяжіння площадки і точки прикладання рівнодіючої сили гідростатичного тиску на площадку ω ; x_c і x_o - відстані від точок C і D до осі Oz ; z_c і z_o - відстані від точок C і D уздовж площини, що розглядається, до вільної поверхні.

Визначимо силу повного гідростатичного тиску на елементарну площадку $d\omega$

$$dP = p d\omega = (p_0 + \rho g h) d\omega .$$

Рівнодіюча сили тиску буде дорівнювати

$$P = \int_{\omega} p d\omega = \int_{\omega} (p_0 + \rho g h) d\omega$$

або

$$P = \int_{\omega} p_0 d\omega + \int_{\omega} \rho g h d\omega . \quad (1.77)$$

Так як тиск на вільній поверхні p_0 величина постійна, перший інтеграл в рівнянні (1.77)

$$P = \int_{\omega} p_0 d\omega = p_0 \omega .$$

Розглянемо другий інтеграл рівняння (1.77). З рис. 1.23 видно, що $h = z \sin \alpha$, тому

$$\int_{\omega} \rho g h d\omega = \rho g \sin \alpha \int_{\omega} z d\omega .$$

Інтеграл $\int_{\omega} z d\omega$ представляє собою статичний момент площадки ω відносно осі Ox , тобто $\int_{\omega} z d\omega = S_{\omega, Ox}$, тому

$$\rho g \sin \alpha \int_{\omega} z d\omega = \rho g \sin \alpha S_{\omega, Ox} = \rho g \sin \alpha z_{c\omega}$$

або

$$\int_{\omega} \rho g h d\omega = \rho g h_c \omega .$$

Підставивши значення інтегралів в формулу (1.77) для визначення рівнодійної сили тиску, отримаємо

$$P = p_0 \omega + \rho g h_c \omega$$

або остаточно

$$P = (p_0 + \rho g h_c) \omega. \quad (1.78)$$

Таким чином, *сила тиску на плоску довільно орієнтовану поверхню дорівнює добутку повного (надлишкового) тиску в центрі тяжіння площадки, що розглядається, на площу самої площадки.*

Визначимо тепер координати точки прикладання сили гідростатичного тиску (ця точка називається **центром тиску**). Раніше вказувалося, що в рідині можливі лише розподілені сили, тому центри тиску потрібно розглядати лише умовно.

Уявімо силу гідростатичного тиску у вигляді суми двох величин: сили зовнішнього тиску (або тиску на поверхні рідини) $P_0 = p_0 \omega$ і сили тиску від ваги рідини $P_p = \rho g h_c \omega$. Вочевидь, центром тиску буде точка прикладання рівнодійних цих сил, що визначається згідно до загальних законів механіки як центр дії паралельних сил.

Так як тиск p_0 рівномірно розподілений по всій площадці ω і його величина залишається постійною, точка прикладання сили P_0 збігається з центром тяжіння площадки, що розглядається. Визначимо координати точки прикладання сили P_p .

Для знаходження точки прикладання сили тиску від ваги рідини P_p (точка D) застосуємо теорему механіки, згідно з якою момент рівнодійної сили відносно осі Ox дорівнює сумі моментів складових сил, тобто

$$P_p \cdot z_d = \int_{\omega} dP \cdot z,$$

де z_d - координата точки прикладання сили

$$z_d = \int_{\omega} dP \cdot z / P_p = \int_{\omega} dP \cdot z / \rho g h_c \omega.$$

Інтеграл

$$\int_{\omega} dP z = \int_{\omega} \rho g h d\omega z = \rho g \sin \alpha \int_{\omega} z^2 d\omega = \rho g \sin \alpha J_x,$$

де $J_x = \int_{\omega} z^2 d\omega$ - момент інерції площадки ω щодо осі Ox .

З огляду на те, що $J_x = J_{x0} + z_c^2 \omega$, отримаємо

$$z_d = z_c + \frac{J_{x0}}{z_c \omega}, \quad (1.79)$$

де J_{x0} - момент інерції площадки ω відносно центральної осі, паралельної Ox .

Таким чином, точка прикладання сила P_p розташована нижче центру тяжіння стінки і відстань меду точками C і D рівна

$$e = \frac{J_{x0}}{z_c \omega}.$$

Якщо тиск на вільної поверхні p_0 дорівнює атмосферному, то точка D і буде центром тиску. При p_0 вище атмосферного центр тиску знаходять за правилами механіки як точку прикладання рівнодіючої двох сил P_0 і P_p ; чим більше перша сила в порівнянні з другою, тим, Вочевидь, центр тиску ближче до центру тяжіння.

1.3.3. Сила тиску рідини на криволінійну поверхню

Виберемо всередині рідини, що знаходиться в стані спокою, довільний об'єм W , що обмежений поверхнею S (рис. 1.24). Вочевидь, поверхневі сили (в даному випадку тільки сили гідростатичного тиску) будуть спрямовані по внутрішнім нормалям до граничної поверхні. Відокремимо в межах поверхні S криволінійну площадку ω . Так як площадка ω знаходиться в рівновазі, система розподілених по її поверхні сил dP може бути замінена однією рівнодіючою P зі складовими P_x , P_y , P_z , що паралельні відповідним координатним осям O_x , O_y , O_z .

Сила dP , що діє на площадку $d\omega$ (рис. 1.24), визначиться за формулою

$$dP = (p_0 + \rho g h) d\omega, \quad (1.80)$$

де h - глибина занурення центру тяжіння площадки ω відносно вільної поверхні.

Так само як і рівнодіюча P , елементарна сила тиску може бути представлена у вигляді

$$dP = \sqrt{dP_x^2 + dP_y^2 + dP_z^2},$$

де dP_x і dP_y - горизонтальні складові сили dP , що діють уздовж осей та паралельні осям O_x і Oy ; dP_z - вертикальна складова сили dP .

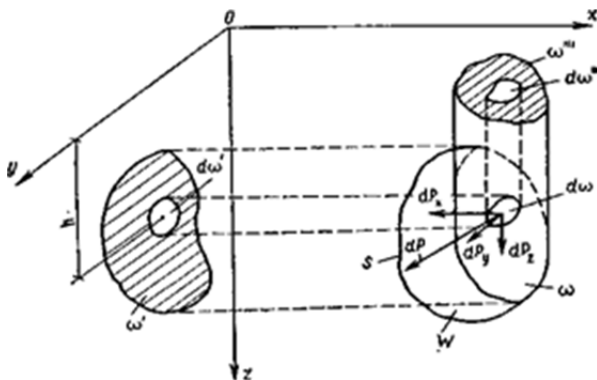


Рис. 1.24. До визначення сили тиску рідини на похилу криволінійну поверхню

Визначимо кожну складову окремо.

Розглянемо спочатку горизонтальну складову dP_x . Вочевидь,

$$dP_x = dP \cos(d\vec{P}, Ox),$$

де $\cos(d\vec{P}, Ox)$ - косинус кута між напрямком вектору сили dP і віссю Ox .

Після підстановки в останнє рівняння значення сили dP отримаємо

$$dP_x = (p_0 + \rho gh) d\omega \cos(d\vec{P}, Ox). \quad (1.81)$$

Добуток $d\omega \cos(d\vec{P}, Ox)$ є проекцією виділеної площадки $d\omega$ на площину, перпендикулярну напрямку Ox (рис. 1.24). У нашому випадку, це площадка $d\omega'$. Таким чином

$$dP_x = (p_0 + \rho gh) d\omega'.$$

Горизонтальна складова сили P_x дорівнює сумі всіх елементарних сил dP_x , тобто

$$P_x = \int_{\omega'} (p_0 + \rho gh) d\omega'. \quad (1.82)$$

Розглянемо $\int_{\omega'} (p_0 + \rho g h) d\omega'$ як суму двох інтегралів

$$\int_{\omega'} p_0 d\omega' \text{ і } \rho g \int_{\omega'} h d\omega'.$$

Перший інтеграл при постійному тиску на вільній поверхні

$$\int_{\omega'} p_0 d\omega' = p_0 \omega',$$

де ω' - проекція площадки ω на площину yOz .

Другий інтеграл, як це видно з рис. 1.24, є статичний момент площадки ω' відносно осі Oy , який як відомо, дорівнює добутку площі ω' і відстані від її центру тяжіння до осі Oy . Тоді

$$\rho g \int_{\omega'} h d\omega' = \rho g h'_c \omega'.$$

Для рівноваги рідини в полі сили тяжіння поверхнями рівня є горизонтальні площини, тому $h'_c = h_c$. Остаточно для горизонтальної складової можна записати

$$P_x = (p_0 + \rho g h_c) \omega'. \quad (1.83)$$

Рівняння для горизонтальної складової, що діє уздовж осі Oy , легко записати по аналогії з виразом (1.83)

$$P_y = (p_0 + \rho g h_c) \omega'',$$

де ω'' - проекція площадки ω на координатну площину xOz .

Таким чином, горизонтальна складова сили повного гідростатичного тиску на криволінійну поверхню дорівнює силі тиску на проекцію цієї поверхні на площину, нормальну напрямку дії даної складової.

Визначимо вертикальну складову сили повного тиску P_z . Вочевидь, P_z дорівнює сумі всіх елементарних вертикальних складових сили тиску, тобто

$$P_z = \int_{\omega} dP_z,$$

де $dP_z = (p_0 + \rho g h) d\omega \cos(\vec{dP}, 0z)$ - вертикальна складова сили повного тиску на елементарну площадку $d\omega$;

$\cos(d\vec{P}, Oz)$ - косинус кута між напрямком вектору dP і віссю Oz .

Так як $d\omega \cos(d\vec{P}, Oz)$ - проекція виділеної елементарної площадки $d\omega$ на горизонтальну площину, P_z по аналогії з попереднім може бути представлена у вигляді

$$P_z = \int_{\omega''} p_0 d\omega'' + \int_{\omega''} h d\omega'', \quad (1.84)$$

де ω'' - проекція площадки ω на координатну площину xOy .

Розглянемо другий інтеграл рівняння (1.84). З рис.1.24. виходить, що $\int_{\omega''} h d\omega''$ являє собою об'єм, утворений площадкою ω , її проекцією на горизонтальну площину, яка збігається з вільною поверхнею або з її продовженням, і вертикальними твірними, що проходять через крайні точки поверхні, що розглядається. Цей об'єм іноді називають тілом тиску (W_{mm}).

Остаточно для вертикальної складової можна записати

$$P_z = p_0 \omega'' + \rho g W_{mm} \quad (1.85)$$

Отже, вертикальна складова сили повного гідростатичного тиску на криволінійну поверхню дорівнює сумі сили зовнішнього тиску p_0 на проекцію площадки, що розглядається, на вільну поверхню або на її продовження і сили, яка визначається вагою тіла тиску.

Тиск на вільній поверхні p_0 можна замінити стовпом рідини, висота якого від вільної поверхні рідини до п'єзометричної площини дорівнює

$$h_0 = \frac{p_0}{\rho g}.$$

Тоді $W_{mm} = \int_{\omega''} (h + h_0) d\omega''$ і вертикальна складова сили тиску визначається як

$$P_z = \rho g W_{mm}. \quad (1.86)$$

1.3.4. Закон Архімеда. Плавання тіл

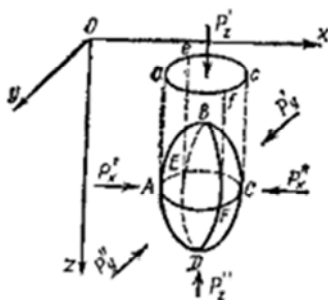


Рис. 1.25. Закон Архімеда

Проаналізуємо отримані в попередньому розділі співвідношення для виведення одного з найвідоміших і основних законів - закону Архімеда. Розглянемо тіло $ABCD$ довільної форми об'ємом W , густиною ρ_1 , занурене в рідину, що знаходиться в стані спокою, густиною ρ (рис. 1.25). На це тіло будуть діяти сили гідростатичного тиску, які спрямовані по нормалі до поверхні, що обмежує тіло. Знайдемо складові сили тиску по координатним осях (осі x і y розташуємо в горизонтальній площині, вісь z - направимо по вертикалі). Розподілені по поверхні сили для тіла, що знаходиться в рівновазі, можуть бути замінені однією рівнодіючою P зі складовими P_x , P_y і P_z . При цьому (див. рис. 1.25) $P_x = P'_x - P''_x$, $P_y = P'_y - P''_y$, $P_z = P'_z - P''_z$. Відповідно до визначення горизонтальної складової сили гідростатичного тиску легко показати, що складові P_x і P_y дорівнюють нулю.

В якості прикладу розглянемо горизонтальну складову, діючу вздовж осі Ox . Сили P'_x і P''_x , що визначають її величину, рівні, оскільки поверхні, на які вони діють, мають одну і ту ж проекцію $BFDE$ на вертикальну площину. Тому їх різниця дорівнює нулю. З тієї ж причини і $P_y = 0$. Таким чином, на занурене тверде тіло діють тільки дві сили: P'_z - сила тиску на поверхню $AECFB$ і P''_z - сила тиску на поверхню $AECFD$. Ці сили відповідно будуть

$$P'_z = \rho g W_{AacCB} ; P''_z = \rho g W_{AacCD} .$$

Різниця цих сил і є рівнодіюча сил гідростатичного тиску на занурене тіло

$$P_z = \rho g (W_{AacCB} - W_{AacCD}) = -\rho g W_{ABCD} . \quad (1.87)$$

Рівняння (1.87) виражає закон, встановлений за 250 років до нашої ери Архімедом і відомий під назвою закону Архімеда: на тверде тіло, занурене в рідину, що знаходиться в стані спокою, діє сила гідростатичного тиску, що дорівнює вазі рідини в обсязі тіла, яка спрямована вертикально вгору і проходить через центр тяжіння тіла. Знак «-» показує, що сила спрямована вгору. Силу P_z часто називають виштовхуючою силою або архімедовою силою.

1. На тіло, занурене у рідину, діє виштовхуюча сила, яка дорівнює вазі рідини, що витіснена тілом.

З закону Архімеда слідує, що на тіло, занурене в рідину, взагалі, діють дві сили: сила тяжіння (вага тіла) G і архімедова виштовхуюча сила P_a . При цьому можуть мати місце три випадки:

Тоді: $G = \rho_1 g W = P_a = \rho g W$. Рівнодіюча цих сил дорівнює 0. Отже, тіло буде знаходитися в стані байдужої рівноваги, воно не буде ні спливати, ні тонути.

Отже, вага тіла більше сили Архімеда, $G > P_a$ і їх рівнодіюча спрямована вниз. Тіло буде тонути.

Вага тіла менше сили Архімеда, $G < P_a$ і їх рівнодіюча спрямована вгору. Занурене в рідину тіло буде спливати до тих пір, поки внаслідок виходу частини його над поверхнею підйомна сила не зменшиться настільки, що стане рівною вазі тіла. Після цього тіло плаватиме по поверхні рідини. Підйомна сила в цьому випадку називається підтримуючою.

Плавучість тіла називається здатність тіла плавати в напівзануреному стані.

Здатність плаваючого тіла, виведеного зі стану рівноваги, знову повертатися в цей стан, називається **остійністю**. У теорії кораблів розрізняють два види остійності - поперечну (при крені судна), коли один борт перевищує інший (рис.1.26), і поздовжню, коли один кінець судна (ніс або корма) знаходиться вище іншого. Практично більш важливі дослідження поперечної остійності, так як поздовжня остійність дуже значна.

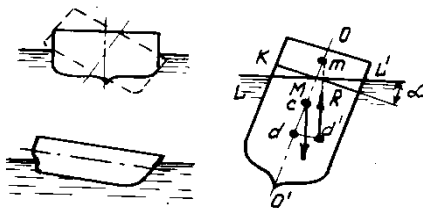


Рис. 1.26. До теорії плавання корабля

Силу тяжіння (ваги) рідини, взятої в об'ємі зануреної частини судна, називають **водотоннажністю**, а точку прикладання рівнодіючої тиску (тобто центр тиску) - **центром водотоннажності** (в теорії корабля – **центр величини**). При нормальному положенні судна центр тяжіння його (точка c) і центр водотоннажності (точка d) лежать на одній вертикальній прямій OO' , що представляє собою вісь симетрії і зветься **віссю плавання**.

Вантажною ватерлінією називається лінія перетину поверхні води з бічною поверхнею судна в нормальному положенні (без крену) і при повному завантаженні ($L - L'$). **Площею вантажної ватерлінії** називається площа перерізу судна, яка обмежена по контуру вантажною ватерлінією. Об'єм корпусу судна, розташований вище вантажної ватерлінії, являє собою запас плавучості n , який визначається як

$$n = \frac{\rho - \rho_c}{\rho}, \quad (1.88)$$

де ρ - густина води, а ρ_c - густина матеріалу і вантажу судна. При негативному запасі плавучості (коли $n < 0$) судно буде тонути.

Нехай під впливом зовнішніх сил судно нахилилося на деякий кут α , частина судна KLM вийшла з рідини, а частина $K'L'M'$ занурилася в неї. При такому повороті положення центру тяжіння c в тілі судна залишиться незмінним. Не зміниться і водотоннажність, але положення центру водотоннажності d стане іншим. Нехай воно тепер буде d' . Докладемо в точці d' підйомну силу R і лінію її дії продовжимо до перетину з віссю симетрії судна OO' . Отримана точка m називається **метацентром**, а відстань між метацентром і центром тяжіння по осі плавання - **метацентричною висотою**. Позначимо цю відстань h і будемо вважати його додатним, якщо точка m лежить вище точки c , і від'ємним - у протилежному випадку.

Таким чином, плаваюче судно має три характерні точки:

- центр тяжіння, що не міняє свого положення по відношенню до судна при будь-якому його положенні;
- центр водотоннажності, що переміщується при крені судна;
- метацентр, який також змінює своє положення (при нахилі $< 15^\circ$ положення метацентра можна вважати постійним).

Момент стійкості плаваючого тіла

$$M_{cm} = Ghs \sin \alpha, \quad (1.89)$$

де G - вага тіла, яка рівна вазі витісненої рідини, $G = \rho g W$;

h - метацентрична висота;

α - кут крену.

При малих кутах крену метацентричну висоту можна визначити за формулою (рис.1.26)

$$M_{cm} = \frac{I}{W} - e, \quad (1.90)$$

де I - момент інерції площі вантажної ватерлінії (площі плавання) $L - L'$ відносно осі плавання;

W - об'єм тіла, зануреного в рідину (водотоннажність);

e - перевищення центру тяжіння над центром водотоннажності при рівновазі (величина cd).

Тоді для стійкої рівноваги плаваючого тіла необхідно виконання наступної умови

$$M_{cm} = \frac{I}{W} - e > 0. \quad (1.91)$$

Метацентричним радіусом ρ називається радіус дуги кола, яке описане з метацентру та по якому відбувається переміщення центру водотоннажності при крені судна (лінія $d - d'$). Остійність судна може також характеризуватися і величиною цього радіусу, тоді для забезпечення остійності необхідне дотримання наступної умови

$$\rho - e > 0.$$

Величину метацентричного радіусу (для крену $<15^0$) можна знайти за формулою

$$\rho = \frac{I}{W}. \quad (1.92)$$

Тоді метацентрична висота

$$h = \rho \pm e = \frac{I}{W} \pm e. \quad (1.93)$$

Розглянемо умови рівноваги судна в залежності від відносного розташування метацентра і центру тяжіння.

1. Остійна рівновага - метацентр лежить вище центра тяжіння ($h > 0$); пара сил повертає судно в початкове положення;

2. Байдужа рівновага - метацентр і центр тяжіння збігаються між собою ($h = 0$);

3. Неостійна рівновага - метацентр лежить нижче центру тяжіння ($h < 0$); пара сил викликає подальше перекидання судна.

Таким чином, чим нижче центр тяжіння і чим більше метацентрична висота, тим більше остійність судна. Тому метацентрична висота може бути прийнята за міру остійності. Практично її нормальне значення для більшості торгових судів знаходиться в межах 0,30,8 м.

1.3.5. Контрольні питання

1. Поясніть «гідростатичний парадокс».
2. Що таке центр тяжіння, центр тиску?
3. Сформулюйте і доведіть закон Архімеда.
4. Що таке остійність і чим вона відрізняється від стійкості?

ГІДРОДИНАМІКА

Необхідність розрахунків руху в'язкої рідини виникає в зв'язку з рішенням багатьох важливих технічних проблем, що відносяться до області як внутрішньої, так і зовнішньої задачі аерогідромеханіки. Однак, математична складність рівнянь Нав'є - Стокса в більшості випадків не дозволяють безпосередньо застосувати ці рівняння і отримувати необхідні рішення. Додаткові труднощі виникають, коли рух рідини стає турбулентним.

Для подолання цих труднощів використовуються різні методи спрощення розглянутих задач. Спрощення в області внутрішнього завдання засновані на введенні поняття одновимірних течій.

У внутрішній задачі аерогідромеханіки і, зокрема, при вивченні руху в трубах, каналах та ін. широкого поширення набули так звані потоки, що плавно змінюються. У цих потоках лінії течії є майже паралельні прямі, а живі перерізи представляють площини, майже нормальні до ліній течії, причому площа живого перерізу плавно змінюється уздовж потоку.

Метод зведення задачі до вивчення одновимірного руху широко використовується в гідравліці, що розглядає рух рідини в трубах і відкритих руслах.

2.1. Основи кінематики та динаміки рідини

2.1.1. Основні поняття та визначення

Рух рідини може бути розділений на два основних види - усталений (стаціонарний) і неусталений (нестационарний).

Рух називається **усталеним**, якщо швидкості руху частинок і тиск в одній і тій же точці простору не змінюється з часом, а є лише функціями координат, тобто

$$p = f_1(x, y, z); \quad \bar{u} = f_2(x, y, z); \quad \frac{dp}{dt} = 0; \quad \frac{du_x}{dt} = 0; \quad \frac{du_y}{dt} = 0; \quad \frac{du_z}{dt} = 0.$$

В окремому випадку усталений рух може бути рівномірним, коли швидкість частинки рідини не змінюється зі зміною її координат, і поле швидкостей залишається незмінним уздовж потоку. Траєкторії часток рідини при сталому перебігу є незмінними в часі.

Неусталеним називається рух рідини, всі характеристики якого (або деякі з них) змінюються в часі в точках розглянутого простору. У загальному випадку тиск і швидкість залежать як від координат, так і від часу

$$p = F_1(x, y, z); \quad \bar{u} = F_2(x, y, z).$$

При неусталеному русі траєкторії різних частинок, що проходять через дану точку простору, можуть мати різну форму. Тому для розгляду картини потоку, яка виникає в кожен даний момент часу, вводиться поняття лінії течії.

Лінією течії називається крива, в кожній точці якої вектор швидкості в даний момент часу направлений по дотичній (рис.2.1). Вочевидь, що для сталої течії лінії струму і траєкторії збігаються між собою.

Якщо в рідині, що рухається, взяти нескінченно малий замкнутий контур і через всі його точки провести лінії течії, то утворюється трубчаста поверхня, звана **трубкою течії**. Частина потоку, що міститься усередині трубки течії, називається **елементарною струминкою рідини** (рис.2.2). При прагненні поперечних розмірів струминки до нуля, вона в границі стягується в лінію течії.

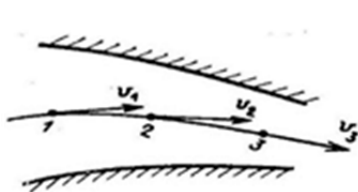


Рис. 2.1. Лінія течії

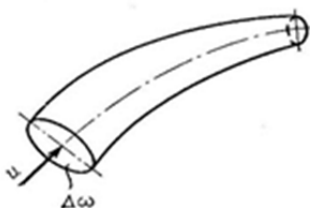


Рис. 2.2. Трубка течії та елементарна струминка рідини

У будь-якій точці трубки течії, тобто бічній поверхні струминки, вектори швидкості спрямовані по дотичній, а нормальні до цієї поверхні складові швидкості відсутні, отже, при сталому русі жодна частинка ріди-

ни, ні в одній точці трубки струму не може проникнути всередину струминки або вийти назовні. Трубка течії є як би непроникною стінкою, а елементарна струминка являє собою самостійний елементарний потік.

Потоки кінцевих розмірів можна уявити як сукупність елементарних струминок, тобто використовувати модель струминної течії. Через відмінності швидкостей сусідні струминки будуть ковзати одна по іншій, але не перемішуватимуться одна з іншою.

Розрізняють напірні і безнапірні рухи рідини. **Напірним** називається рух в закритих каналах без вільної поверхні, що відбувається під дією перепаду тисків (течія в трубопроводах, каналах гідромашин та ін.). **Безнапірним** називається рух з вільною поверхнею, що відбувається під дією масових сил (течія в річках, відкритих каналах).

Для характеристики форми і розмірів поперечного перерізу потоку вводяться такі поняття:

S - **живий переріз** (далі просто переріз потоку) - поверхня в межах потоку, проведена нормально до ліній струму, або частина поперечного перерізу каналу, що проводить потік рідини, яка припадає на частку рідини.

χ - **змочений периметр** - частина периметра живого перерізу, уздовж якої рідина стикається зі стінками каналу, (труби).

R_z - **гідралічний радіус** - відношення площі живого перерізу до змоченого периметру, тобто

$$R_z = \frac{S}{\chi}. \quad (2.1)$$

Перехід від реальних просторових або двовимірних течій до одновимірної моделі значно спрощує гідродинамічне завдання і дозволяє отримати прості залежності, зручні для технічних розрахунків. Однак цей перехід можна здійснити, знаючи закономірності розподілу швидкостей і тисків в реальних потоках, які зводяться до одномірних.

Якщо граничні поверхні утворюють трубу або канал із змінним по довжині поперечним перерізом, то потік є просторовим. Але якщо кривиз-

на $\frac{1}{R}$ ліній струму або струминок, а також утворений ними кут β (рис.2.3) малі, то такий потік наближено можна звести до одновимірної моделі. Такі потоки називаються **плавно змінними**. Через малі кути між лініями струму живі перерізи слабо викривлені і наближаються до плоских. Тоді, вибираючи подовжню геометричну координату уздовж осі потоку, що проходить через центр мас живих перерізів, можна потік, що плавно змінюється, розглядати як одновимірний.

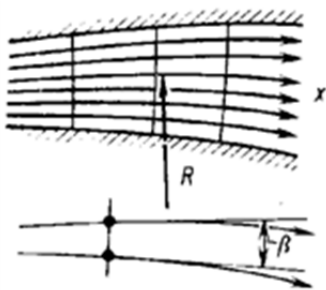


Рис. 2.3. Потік, що плавно змінюється

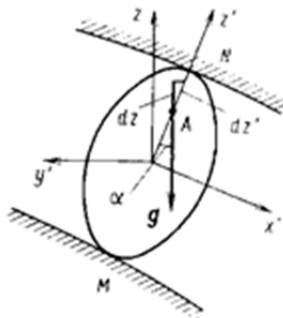


Рис. 2.4. Схема для обґрунтування закону зміни гідростатичного тиску

Розглянемо основні властивості потоків, що плавно змінюються і способи переходу до одновимірної моделі. Для цього виберемо в живому перерізі S місцеву систему координат $x'y'z'$, направивши вісь x' уздовж осі потоку (рис.2.4), а вісь y' - горизонтально. Оскільки кути, що утворені лініями течії, малі, можна прийняти $u_{y'} \approx 0$; $u_{z'} = 0$, тобто в такому потоці швидкість $u = u_{x'} = f(y', z')$. Тоді, вважаючи рух усталеним, тобто $\frac{du_{x'}}{dt} = 0$, в даному випадку рівняння Нав'є - Стокса приймуть вид

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{x'} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx'} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_{x'}}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 u_{x'}}{\partial z'^2} \right) = 0; \\ F_{y'} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy'} = 0; \\ F_{z'} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz'} = 0. \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Два останніх рівняння повністю збігаються з рівняннями статки, а це означає, що в межах живого перерізу потоку, що плавно змінюється, тиск розподіляється згідно із гідростатичним законом. Зокрема, якщо F - сила тяжіння, то для довільної точки А, що лежить в живому перерізі,

$$F_{y'} = 0; \quad F_{z'} = -g \cos \alpha = -g \frac{dz}{dz'},$$

де z - координата вертикальної осі

З огляду на це останнє рівняння системи (2.2) набуде вигляду

$$g \frac{dz}{dz'} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz'} = 0 .$$

Отже, в межах живого перерізу ($x' = const$)

$$z + \frac{p}{\rho g} = const . \quad (2.3)$$

Таким чином, в межах живого перерізу потоку, що плавно змінюється, тиск розподіляється згідно із законом гідростатики. Цей результат дозволить надалі спростити висновки, вводячи осередненні по перерізу параметри.

2.1.2. Витрата. Рівняння витрати

Витратою називається кількість рідини, що протікає через живий переріз потоку (струминки) в одиницю часу. Розрізняють об'ємну Q (m^3/c), масову M (kg/c) і вагову G (H/c) витрати.

Для елементарної струминки, що має нескінченно малі площі перерізів, можна вважати справжню швидкість u однаковою у всіх точках кожного перерізу. Отже, для цієї струминки витрату можна визначити як

$$dQ = u \, dS; \, dM = \rho u \, dS; \, dG = \rho g u \, dS, \quad (2.4)$$

де dS - площа перерізу струминки.

Для потоку кінцевих розмірів у загальному випадку швидкість має різне значення в різних точках перерізу, тому витрату треба визначати як суму елементарних витрат струминок, тобто

$$Q = \int_S u \, dS . \quad (2.5)$$

Введемо поняття середньої по живому перерізу швидкості. Під нею розуміється фіктивна, постійна по живому перерізу швидкість, що забезпечує однакову з заданою витрату. З цього визначення випливає, що

$$Q = \int_S u \, dS = v \, S , \quad (2.6)$$

де $v = \frac{Q}{S}$ - середня швидкість.

Грунтуючись на законі збереження речовини, на припущенні про суцільність (нерозривність) течії і на зазначеній вище властивості непроникувості трубки течії, для усталеного руху рідини можна стверджувати, що об'ємна витрата у всіх перерізах елементарної струминки (рис.2.2) одна і та ж

$$dQ = u_1 dS_1 = u_2 dS_2 = \text{const} \quad (\text{уздовж струминки}). \quad (2.7)$$

Це рівняння називається *рівнянням витрати (рівнянням нерозривності)* для елементарної струминки.

Аналогічне рівняння можна скласти і для потоку кінцевих розмірів, що обмежений непроникними стінками, тільки замість дійсних швидкостей слід ввести середні швидкості, тоді

$$Q = v_1 S_1 = v_2 S_2 = \text{const} \quad (\text{вздовж потоку}). \quad (2.8)$$

2.1.3. Рівняння Бернуллі для елементарної струминки ідеальної рідини

Розглянемо усталений рух ідеальної рідини, що знаходиться під дією лише однієї масової сили - сили тяжіння. Виведемо рівняння, яке пов'язує між собою тиск в рідині та швидкість її руху.

Візьмемо одну з елементарних струминок, що становлять потік, і виділимо перерізами 1 і 2 ділянку цієї струминки довільної довжини (рис.2.5). Нехай площа першого перерізу дорівнює dS_1 , швидкість в ньому u_1 , тиск p_1 , а висота розташування центру тяжіння перерізу, яка відрахована від довільної горизонтальної площини порівняння $-z_1$. У другому перерізу відповідно - dS_2 , u_2 , p_2 , z_2 .

За нескінченно малий проміжок часу dt виділена ділянка струминки переміститься в положення 1'–2'. Застосуємо до маси рідини в обсязі ділянки струминки теорему механіки про роботу сил, що прикладені до тіла. Відповідно до цієї теореми, робота сил, що прикладені до тіла, дорівнює приросту кінетичної енергії цього тіла. Такими силами в даному випадку є сили тиску P , що діють по нормалі до поверхні розглянутої ділянки, і сила тяжіння G . Знайдемо роботу dA_P сил тиску, тяжіння dA_G та зміну кінетичної енергії dE_k ділянки струминки за час dt .

Робота сил тиску в першому перерізі позитивна, так як напрям сили збігається з напрямом переміщення, і дорівнює добутку сили на шлях

$$dA_{P_1} = P_1 \cdot dl_1 = p_1 dS_1 u_1 dt.$$

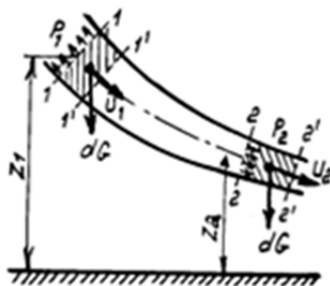


Рис. 2.5. До виводу рівняння Бернуллі для струминки ідеальної рідини

Робота сил тиску в другому перерізі має знак мінус, так як напрямок сили протилежно напрямку переміщення, і дорівнює:

$$dA_{P_2} = P_2 \cdot dl_2 = p_2 dS_2 u_2 dt .$$

Сили тиску, що діють по бічній поверхні струминки, роботи не виконують, так як вони нормальні до цієї поверхні, і отже, нормальні до переміщень. Тоді робота сил тиску буде дорівнювати

$$dA_p = dA_{P_1} - dA_{P_2} = p_1 u_1 dS_1 dt - p_2 u_2 dS_2 dt . \quad (2.9)$$

Робота сил тяжіння dA_G дорівнює зміні потенційної енергії положення ділянки струминки, тому для її знаходження необхідно з енергії положення рідини в об'ємі 1-2 відняти енергію положення рідини в об'ємі 1'-2'. При цьому енергія положення проміжної ділянки 1'-2 скоротиться, і залишиться лише різниця енергій елементів 1-1' і 2-2'. Якщо врахувати рівняння витрати (2.7), то зауважимо, що об'єми і, отже, сили тяжіння заштрихованих елементів 1-1' і 2-2' рівні між собою

$$dG = \rho g u_1 dS_1 dt = \rho g u_2 dS_2 dt . \quad (2.10)$$

Тоді робота сили тяжіння виразиться як добуток різниці висот на силу тяжіння

$$dA_G = (z_1 - z_2) dG . \quad (2.11)$$

Щоб підрахувати приріст кінетичної енергії розглянутої ділянки струминки за час dt , необхідно з кінетичної енергії об'єму 1'-2' відняти кінетичну енергію об'єму 1-2. При відніманні кінетична енергія проміжного об'єму 1'-2 скоротиться, і залишиться різниця кінетичних енергій

елементів 1-1' і 2-2', Сила тяжіння кожного з яких дорівнює dG . Таким чином, приріст кінетичної енергії дорівнює

$$dE_k = (u_2^2 - u_1^2) dm = (u_2^2 - u_1^2) \frac{dG}{g}. \quad (2.12)$$

Складемо роботу сил тиску (2.9) з роботою сил тяжіння (2.11) та прирівняємо цю суму до приросту кінетичної енергії (2.12), отримаємо

$$p_1 u_1 dS_1 dt - p_2 u_2 dS_2 dt + (z_1 - z_2) dG = (u_2^2 - u_1^2) \frac{dG}{g}.$$

Розділимо це рівняння на $dG = \rho g u_1 dS_1 dt = \rho g u_2 dS_2 dt$ і зробимо скорочення, тоді отримаємо

$$\frac{p_1}{\rho g} - \frac{p_2}{\rho g} + z_1 - z_2 = \frac{u_2^2}{2g} - \frac{u_1^2}{2g}.$$

Згрупувавши члени, які відносять до першого перерізу, в лівій частині рівняння, а члени, що відносяться до другого перерізу, в правій, остаточно отримаємо

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g}, \quad (2.13)$$

де z - геометрична висота, або геометричний напір;

$\frac{p}{\rho g}$ - п'єзометрична висота, або п'єзометричний напір;

$\frac{u^2}{2g}$ - швидкісна висота, або швидкісний (динамічний) напір.

Отримане рівняння називається **рівнянням Бернуллі для елементарної струминки ідеальної нестисливої рідини**.

Тричлен виду $z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} = H$ називається повним напором.

Рівняння Бернуллі (2.13) записано для двох довільно взятих перерізів струминки і висловлює рівність повних напорів H в цих перерізах. Так як перерізи взяті довільно, отже, і для будь-якого іншого перерізу цієї ж струминки повний напір буде мати те ж значення

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} = H = \text{const} \quad (\text{уздовж струминки}).$$

Отже: для ідеальної рідини, що рухається, сума трьох напорів (висот): геометричного, п'єзометричного та швидкісного є величина постійна уздовж струминки.

Зміну всіх трьох висот уздовж струминки показано на графіку (рис. 2.6). Лінія зміни п'єзометричних висот називається п'єзометричною лінією і її можна розглядати як геометричне місце рівнів в п'єзометрах, встановлених уздовж струминки. При течії нев'язкої рідини лінія повного напору є горизонтальна лінія. Звуження потоку призводить до збільшення швидкості течії, і, отже, збільшення швидкісного напору і зменшення п'єзометричного. Розширення потоку призводить до зворотного ефекту.

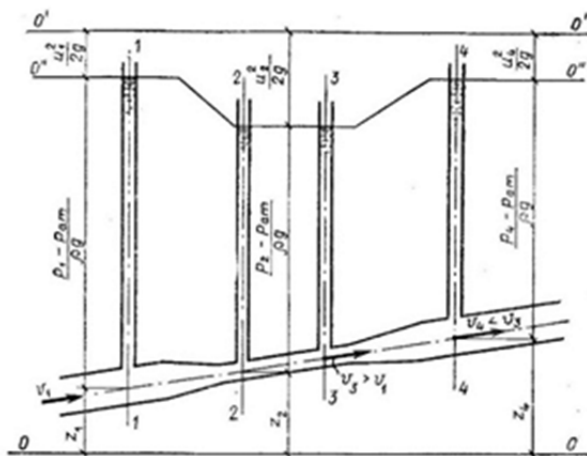


Рис. 2.6. Геометрична інтерпретація рівняння Бернуллі для струминки ідеальної рідини

Рівняння Бернуллі можна записати і в іншому вигляді. Помноживши кожен член рівняння (2.13) на величину g , отримаємо

$$gz_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{u_1^2}{2} = gz_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{u_2^2}{2} = gH. \quad (2.14)$$

Домовимося називати питомою енергією рідини енергію, віднесену до одиниці маси (питомою енергією рідини називають також енергію, віднесену до одиниці ваги або до одиниці об'єму). Розглянемо енергетичний сенс рівняння Бернуллі, записаного у формі (2.14).

Неважко показати, що члени цього рівняння є різними формами питомої механічної енергії рідини, а саме:

gz - питома потенційна енергія положення;

$\frac{p}{\rho}$ - питома потенційна енергія тиску;

$\frac{u^2}{2}$ - питома кінетична енергія,

H - повна питома механічна енергія рідини, що рухається.

Таким чином, енергетичний сенс рівняння Бернуллі для елементарної струминки ідеальної рідини полягає в постійності уздовж струминки повної питомої енергії рідини. Отже, рівняння Бернуллі виражає закон збереження механічної енергії в ідеальній рідині. Механічна енергія в рідині може мати три форми: потенційна енергія положення, тиску і кінетична енергія. Перша і третя форми енергії відомі з механіки, і вони в рівній мірі властиві рідким і твердим тілам. Енергія тиску є специфічною для рухомої рідини. У процесі руху ідеальної рідини одна форма енергії може переходити в іншу, але повна питома енергія при цьому залишається без змін.

Рівняння Бернуллі можна вивести з рівнянь руху ідеальної рідини Ейлера. Докладний висновок цих рівнянь викладено в літературі [3, 6]. Рівняння Ейлера в векторній формі Громеки - Ламба мають вигляд

$$-\text{grad } E = \frac{d\bar{u}}{dt} - \bar{u} \times \bar{\Omega}. \quad (2.15)$$

Для усталеного вихрового руху $\frac{d\bar{u}}{dt} = 0$.

Уздовж ліній течії та вздовж вихрових ліній має місце такий вираз

$$E = \Phi + \mathfrak{R} + \frac{u^2}{2} = \text{const}. \quad (2.16)$$

У цьому рівнянні значення E постійно лише уздовж будь-якої лінії течії. Для випадку, коли масовою силою є тільки сила тяжіння $\Phi = gz$ і рідина нестислива ($\rho = \text{const}$, $\mathfrak{R} = \frac{p}{\rho}$) інтеграл Бернуллі можна представити у вигляді

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} = \text{const}. \quad (2.17)$$

Якщо записати це рівняння для двох перерізів струминки, то воно набуде вигляду виразу (2.13).

2.1.4. Рівняння Бернуллі для елементарної струминки реальної рідини

Рівняння Бернуллі (2.13) виражає закон збереження повної питомої енергії для елементарної струминки ідеальної рідини. Якщо розглядати реальну рідину (в якій при русі виникають дотичні напруження), то це рівняння повинно суттєво змінитися. Дійсно, якщо під час руху ідеальної рідини її повна питома енергія або напір H зберігає постійне значення по довжині струминки, то при русі реальної рідини ця енергія буде зменшуватися у напрямку руху. Причина цього - дисипація енергії, пов'язана з появою в рідині в'язкісних напружень, зокрема, сил тертя, на подолання яких витрачається деяка частка енергії рідини. Отже, для в'язкої рідини рівність (2.13) слід замінити нерівністю, в якій права частина менше лівої,

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} > z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g}. \quad (2.18)$$

Але відповідно до цієї нерівності можна записати, що

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} - \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} \right) = h, \quad (2.19)$$

де h - питома втрата енергії у в'язкій рідині між двома перерізами елементарної струминки.

2.1.5. Рівняння Бернуллі для потоку в'язкої нестисливої рідини

Співвідношення (2.19) можна поширити на випадок потоку в'язкої рідини. Для цього будемо розглядати перерізи 1-1 і 2-2 в потоці в'язкої рідини з течією, що плавно змінюється в цьому потоці (рис.2.7).

При русі в'язкої рідини уздовж твердої стінки, наприклад, в трубі, відбувається гальмування потоку внаслідок впливу в'язкості, а також через дію сил молекулярного зчеплення між рідиною і стінкою. Тому найбільше значення швидкість досягає в центральній частині потоку, а в міру наближення до стінки вона зменшується практично до нуля.

Швидкість у живому перерізі змінна, і закони розподілу швидкостей в обох перерізах можуть бути різними. Оскільки в розглянутих перерізах течія плавно змінюється, то тиск в них розподілений по гідростатичному закону, тобто $z + \frac{p}{\rho g} = \text{const}$. Обчислимо, скориставшись співвідношенням

(2.19), різницю потоків енергії, яку переносе рідина через перерізи 1-1 і 2-2.

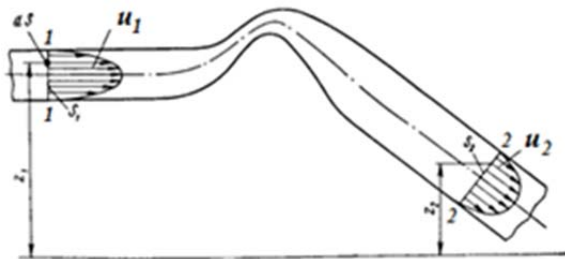


Рис. 2.7. Схема для виводу рівняння Бернуллі для потоку в'язкої рідини

Для обчислення потоку енергії слід питому енергію в даній точці лінії течії, що проходить через переріз, помножити на вагову витрату рідини через площадку dS , в центрі якої проходить відповідна лінія течії.

Ця витрата дорівнює $G = \rho g u dS$.

Повний потік енергії отримаємо інтегруванням за відповідними перерізами. Для визначення повної втрати енергії проінтегруємо в другому перерізі елементарні потоки енергії уздовж лінії течії на шляху рідини від перерізу 1-1 до перерізу 2-2

$$\int_{S_1} \left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} \right) \rho g u_1 dS - \int_{S_2} \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} \right) \rho g u_2 dS = \int_{S_2} h \rho g u_2 dS$$

Враховуємо, що $\int_S u dS = Q$, і вздовж потоку дотримується рівняння нерозривності $Q_1 = Q_2$ або $v_1 S_1 = v_2 S_2$, де v - середня швидкість рідини. Виносимо постійні за знак інтеграла та отримуємо

$$\left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g} \right) Q_1 + \frac{1}{2g} \int_{S_1} u^3 dS - \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g} \right) Q_2 - \frac{1}{2g} \int_{S_1} u^3 dS = \int_{S_1} h u_2 dS. \quad (2.20)$$

Щоб перейти від місцевих швидкостей u до середньої по перерізу v , введемо позначення

$$\alpha = \frac{\int_S u^3 dS}{v^3 S}. \quad (2.21)$$

Цей безрозмірний коефіцієнт α висловлює відношення істинного потоку кінетичної енергії, що відповідає нерівномірному розподілу швидкостей u в перерізі, до потоку кінетичної енергії, що обчислений за середньою швидкістю v . Його називають *коефіцієнтом кінетичної енергії* або *коефіцієнтом Коріоліса*.

Вочевидь, цей коефіцієнт залежить від форми епюри швидкостей. Далі буде показано, що він завжди більше 1 і для розвиненого ламінарного руху в круглій циліндричній трубі дорівнює 2, а для турбулентного близько 1,1, однак при значній нерівномірності епюри швидкостей, наприклад в криволінійних каналах, він може досягати великих значень. Зрозуміло, що якщо $u=v=const$, то $\alpha=1$.

Користуючись теоремою про середнє, інтеграл $\int_{S_2} hu_2 dS$ можна представити в наступному вигляді

$$\int_{S_2} hu_2 dS = H_{cp} \int_S u_2 dS = H_{cp} Q_2. \quad (2.22)$$

Підставляємо в (2.20) співвідношення (2.21), врахувавши рівняння нерозривності (2.8), скоротив на Q , отримаємо

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} + \Sigma h, \quad (2.23)$$

де Σh - сумарна втрата повного напору (або повної питомої енергії) на ділянці між розглянутими перерізами.

Співвідношення (2.23) і є *рівняння Бернуллі для потоку в'язкої рідини*. Від аналогічного рівняння, що отримано для струминки ідеальної рідини, воно відрізняється наявністю члена, який представляє собою втрату повного напору, і коефіцієнта, що враховує нерівномірність розподілу швидкості по перерізу. Крім цього, швидкості, що входять в це рівняння, є середніми по перерізу.

Помноживши рівняння (2.23) на g , отримаємо форму запису рівняння Бернуллі, що відповідає (2.14), де всі його члени висловлюють види енергії, віднесені до одиниці маси, а член $g\Sigma h$ являє собою втрату повної питомої енергії.

Рівняння Бернуллі і його форми застосовні і для газоподібних рідин, але тільки за умови, що швидкість їх руху значно менше швидкості звуку.

Графічно це рівняння можна представити графіком, подібно до того, як це робили для ідеальної рідини, але з урахуванням втрати напору (рис.2.8), яка безперервно зростає вздовж потоку.

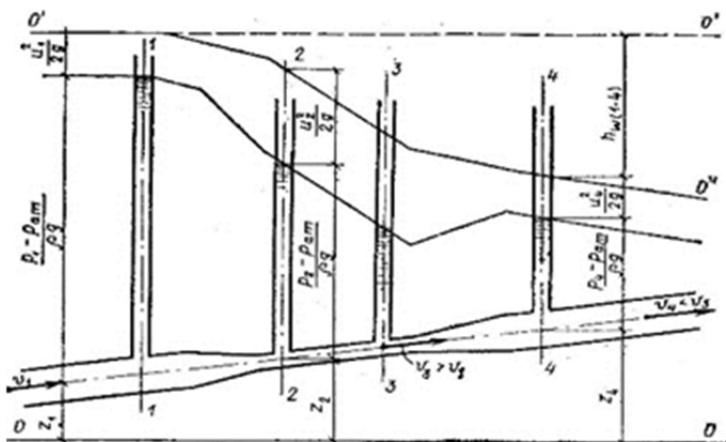


Рис. 2.8. Геометрична інтерпретація рівняння Бернуллі для потоку в'язкої рідини

Як зазначалося вище, рівняння Бернуллі для струминки ідеальної рідини являє собою закон збереження механічної енергії. Для потоку реальної рідини воно є рівнянням балансу енергій з урахуванням втрат. Звичайно, енергія рідини на даній ділянці не губиться, а перетворюється в інший вид енергії - теплову. Цей процес перетворення механічної енергії в теплову є незворотнім.

Зменшення середнього значення повної питомої енергії уздовж потоку, що віднесено до одиниці його довжини, називається гідравлічним ухилом, аналітично гідравлічний ухил є похідною від втрати напору за відповідною відстанню, відліченою від початкового перерізу по осі потоку, тобто

$$i = \frac{d \sum h}{dL} . \quad (2.24)$$

Середнє значення гідравлічного ухилу

$$i_{cp} = \frac{\sum h}{L} . \quad (2.25)$$

Аналогічно вищевикладеному, можна отримати рівняння Бернуллі і для неусталеного руху (висновок наведено в [2, 3]), яке має вигляд

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} + \Sigma h + \frac{1}{g} \int_L \frac{dv}{dt} dL. \quad (2.26)$$

Складова $\frac{1}{g} \int_L \frac{dv}{dt} dL$ називається інерційним напором. Це рівняння

застосовується при розрахунках коливань рідини в сполучених судинах і вирішенні інших практичних завдань, коли необхідно врахувати вплив нестационарності потоку на його характеристики.

2.1.6. Контрольні питання

1. Що таке усталений і неусталений рух рідини?
2. Дайте визначення лінії течії, трубки течії.
3. Що таке живий переріз, змочений периметр, гідравлічний радіус?
4. Дайте визначення витрати рідини. Одиниці виміру.
5. Дайте визначення повного, динамічного, геометричного, гідростатичного напорів.
6. Чим відрізняються рівняння Бернуллі для ідеальної і в'язкої рідини?

2.2. Гідравлічні опори

Використання рівняння Бернуллі для вирішення одномірних задач гідромеханіки в'язкої рідини можливо, тільки встановивши залежності для розрахунку втрат напору Σh , що пов'язують величину цих втрат з основними характеристиками потоку. Виникнення втрат напору фізично обумовлено дією в потоці сил опору. Механізм дії цих сил настільки складний, що до теперішнього часу не вдалося знайти точного методу обчислення Σh , в технічних розрахунках найчастіше доводиться користуватися емпіричними або напівемпіричними залежностями. Точне теоретичне рішення задачі вдається знайти лише для найпростіших окремих випадків.

2.2.1. Види гідравлічних опорів

При течії в трубах, каналах потік зазнає значних деформацій, що викликають такий нерівномірний розподіл швидкостей, який призводить до появи в'язкісних напружень, що в свою чергу обумовлює дисипацію енергії. У багатьох випадках течія супроводжується перемішуванням шарів

рідини і відривом потоку від стінок з утворенням вихрових зон, що впливає на розподіл і величину напружень, і, отже, й на втрати напору.

Рис. 2.10. До визначення місцевих втрат напору У внутрішній задачі гідромеханіки всі зовнішні впливи на потік рідини, які обумовлюють втрати її механічної енергії, називають гідравлічними опорами. З точки зору розрахунку гідравлічні опори зручно розділити на два види: опіри і пов'язані з ними втрати напору, що розподілені по всій довжині потоку h_m (**втрати напору на тертя** або **опір гідравлічного тертя**), та опори місцеві h_m (**місцеві втрати напору** або **втрати напору на місцеві опори**). У зв'язку з цим втрати напору Σh можна представити у вигляді

$$\Sigma h = h_m + h_m. \quad (2.27)$$

Сутність цих двох видів втрат пояснимо на прикладах. Розглянемо усталений потік рідини в круглій циліндричній трубі (рис.2.9). При русі рідини між нею і стінками труби виникають сили опору, в результаті чого частинки рідини, прилеглі до стінки, гальмуються. Це гальмування внаслідок в'язкості рідини передається наступним шарам, причому швидкість частинок в міру віддалення від осі труби поступово зменшується. Рівнодіюча сил опору T спрямована в бік, протилежний руху. Це і є сила гідравлічного тертя.

Для подолання опору тертя і підтримки рівномірного поступального руху рідини, необхідно, щоб на рідину діяла сила, яка спрямована в бік її руху та рівна силі опору. Необхідну для подолання сил опору енергію або напір називають втраченою енергією або втратами напору.

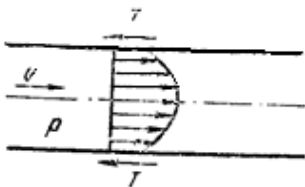


Рис. 2.9. До визначення втрати напору на тертя

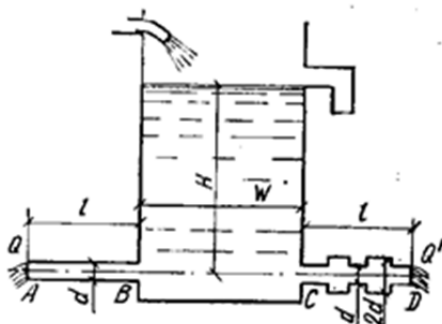


Рис. 2.10. До визначення місцевих втрат напору

Однак втрати напору, що виникають при русі рідини, залежать не тільки від тертя об стінки. Нехай рідина витікає з баку (рис.2.10) об'ємом

W при постійному напорі H по горизонтальній трубі AB довжиною l одного діаметра d . Нехай витрата води дорівнює Q . Якщо трубу AB замінити трубою CD тієї ж довжини l , але утвореної з послідовно розташованих ділянок діаметрами d і $2d$, то витрата зміниться. Нова витрата $Q' < Q$.

Таким чином, різка зміна перерізу також чинить опір руху рідини і викликає втрати напору. Існують й інші причини, що викликають такі втрати, наприклад, раптова зміна напрямку руху рідини. Втрати напору, що викликані різкою зміною конфігурації границь потоку (що витрачаються на подолання опору форми), називаються місцевими втратами напору або втратами напору на місцеві опори.

При розрахунку втрат напору широко використовується принцип накладення втрат. Відповідно до цього принципу передбачається, що окремі види опорів виникають незалежно один від одного і визначаються тільки місцевими, усередненими характеристиками потоку. Застосовуючи цей принцип, можна величину Σh для всього потоку визначити як суму втрат по довжині на окремих його ділянках та суму місцевих втрат, тобто

$$\sum h = \sum_{i=1}^m h_m + \sum_{k=1}^n h_{m_k} . \quad (2.28)$$

Визначення втрат напору при русі рідини є однією з найважливіших задач гідравліки. У XIX столітті емпіричним шляхом були отримані формули для їх визначення.

Втрати напору на тертя визначаються за формулою Дарсі - Вейсбаха

$$h_m = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} . \quad (2.29)$$

Втрати напору на місцевий опір визначаються за формулою Вейсбаха

$$h_m = \zeta \frac{v^2}{2g} . \quad (2.30)$$

У цих виразах λ і ζ коефіцієнти гідравлічного тертя і гідравлічного опору відповідно.

Формули (2.29) і (2.30) можна отримати аналітичним шляхом, що і буде показано далі.

2.2.2. Основи теорії подібності

На характер руху реальних рідин впливають багато різних факторів. При дослідженні такого руху необхідно відібрати такі чинники, які є визначальними для досліджуваного процесу. Одні з них впливають більше, інші - менше, а є і такі, вплив яких в звичайних умовах дуже малий.

Потім необхідно встановити залежність величини, що інтересує, від системи обраних визначальних чинників. Таку залежність можна отримати двома шляхами: аналітичним і експериментальним. У більшості випадків рішення рівнянь руху в'язкої рідини досить важко. У зв'язку з цим в гідромеханіці вдаються до постановки експериментальних досліджень.

Можливі два види експериментів: з натурними об'єктами і з моделями. Найбільш цінними є натурні експерименти, які дають безпосередню відповідь на питання, як поводить себе натурний об'єкт в заданих умовах руху рідини, але вони, як правило, дуже дорогі та в ряді випадків (авіабудування, суднобудування) просто неможливі.

В силу цих причин в гідромеханіці вдаються до постановки модельних експериментів, що здійснюються на об'єктах, розміри яких, як правило, у багато разів менше натурних. При цьому необхідно знати, в якому співвідношенні знаходяться швидкості і сили моделі та натури, щоб результати експерименту перерахувати на натурний об'єкт.

Всі ці питання дозволяє вирішити розділ гідромеханіки, що носить назву **теорії подібності та моделювання**.

Для дотримання механічної подібності двох явищ, що відбуваються в натурному об'єкті та його моделі, потрібно одночасне виконання трьох умов подібності - геометричної, кінематичної (за швидкостями) і динамічної (за силами). Перші дві умови є необхідними, але недостатніми. Динамічна подібність забезпечує достатність умов подібності явищ.

Розглянемо основні критерії гідродинамічної подібності. **Геометрична подібність**, як відомо з геометрії, є пропорційність подібних розмірів та рівність відповідних кутів. Відношення двох подібних розмірів подібних русел, каналів, трубопроводів називається лінійним масштабом k_L

$$k_L = \frac{L_n}{L_m} = idem.$$

(індекси n та m тут і далі ставляться до натури та моделі відповідно).

Кінематична подібність означає пропорційність місцевих швидкостей в подібних точках та рівність кутів, що характеризують напрямки цих швидкостей. Їхнє відношення називається масштабом швидкості k_v ,

$$k_v = \frac{u_{xH}}{u_{xM}} = \frac{u_{yH}}{u_{yM}} = \frac{u_{zH}}{u_{zM}} = \frac{u_H}{u_M} = idem.$$

Так як $v = \frac{L}{T}$, $k_v = \frac{k_L}{k_T}$, де T - час, а k_T - масштаб часу).

З кінематичної подібності витікає геометрична подібність ліній течії. Вочевидь, що для кінематичної подібності потрібна геометрична подібність процесів.

Динамічна подібність - це пропорційність сил, що діють на подібні об'єми в кінематично подібних потоках та рівність кутів, що характеризують напрямки цих сил.

В потоках рідини діють різні сили: сили тиску, в'язкості (тертя), тяжіння та ін. Дотримання їх пропорційності означає повну гідродинамічну подібність. Однак, здійснити на практиці повну гідродинамічну подобу досить важко, тому мають справу з частковою (неповною) подібністю, при якій дотримується пропорційності лише основних сил. Для внутрішньої задачі гідромеханіки такими силами є сили тиску, в'язкості та інерції.

Сили інерції визначаються добутком маси на прискорення, а їхнє відношення в подібних потоках дорівнює масштабу сил k_F

$$k_F = \frac{F_H}{F_M} = \frac{(ma)_H}{(ma)_M} = \frac{k_\rho k_L^3 k_L}{k_T^2} = k_\rho k_L^3 k_T^2,$$

де k_ρ - масштаб густини.

Таким чином, сили інерції пропорційні густині, швидкості u в другому ступені, і розміру L в другому ступені, який в свою чергу, пропорційний площі S , тобто

$$F_{in} \sim \rho S u^2 \quad (2.31)$$

Приймемо сили інерції за основу та будемо інші сили, що діють на рідину, порівнювати з силами інерції, тобто з виразом (2.31).

Таким чином, для гідродинамічних подібних потоків маємо

$$\left(\frac{F}{\rho S u^2} \right)_H = \left(\frac{F}{\rho S u^2} \right)_M = Ne = idem \quad (2.32)$$

Це співвідношення, однакове для подібних потоків, називається **критерієм Ньютонa**. Тут під F мається на увазі основна сила - сила тиску, тяжіння, в'язкості або будь-яка інша.

Розглянемо кілька характерних випадків впливу основних сил на рухому рідину і знайдемо умови подібності потоків.

1. На рідину діють тільки сили тиску та інерції. Тоді

$F = \Delta p S \sim \Delta p L^2$, де Δp - деяка різниця тисків або просто тиск, і умова (2.32) набуде вигляду

$$\left(\frac{\Delta p}{\rho u^2} \right)_n = \left(\frac{\Delta p}{\rho u^2} \right)_m = Eu = idem, \quad (2.33)$$

де **Eu - критерій Ейлера**, що є відношенням сил інерції до сил тиску.

2. На рідину діють сили в'язкості, тиску та інерції.

Тоді $F = \mu \frac{du}{dy} S \sim \rho \nu \left(\frac{u}{L} \right) L^2 \sim \rho \nu u L$ і умова (2.32) набуде вигляду

$$\left(\frac{\nu}{uL} \right)_n = \left(\frac{\nu}{uL} \right)_m \text{ або } \left(\frac{uL}{\nu} \right)_n = \left(\frac{uL}{\nu} \right)_m = Re = idem, \quad (2.34)$$

де **Re - критерій Рейнольдса**, що є відношенням сил інерції до сил в'язкості. Критерій Рейнольдса - основний критерій подібності напірних потоків. За характерний розмір L повинен прийматися поперечний розмір потоку, наприклад, діаметр перерізу.

3. На рідину діють сили тяжіння, тиску та інерції.

Тоді $F \sim \rho g L^3$ і умова (2.32) набуде вигляду

$$\left(\frac{\rho g L^3}{\rho u^2 L^3} \right)_n = \left(\frac{\rho g L^3}{\rho u^2 L^3} \right)_m \text{ або } \left(\frac{u^2}{gL} \right)_n = \left(\frac{u^2}{gL} \right)_m = Fr = idem, \quad (2.35)$$

де **Fr - критерій Фруда**, що є відношенням сил інерції до сил тяжіння. Критерій Фруда є важливим при розгляді безнапірних течій у відкритих руслах.

Крім перерахованих основних критеріїв подібності (Re , Eu , Fr) в гідромеханіці застосовуються й інші критерії, наприклад критерій Вебера We , що використовується при моделюванні течій з поверхневим натягом, який характеризує відношення сил поверхневого натягу до сил інерції; критерій Струхала Sh , який характеризує інерційні гідродинамічні сили, що виникають при нестационарній течії рідини.

2.2.3. Загальні формули для визначення втрат напору

Раніше виведені емпіричним шляхом формули для визначення втрат напору на тертя та місцеві опори. Отримаємо ці ж залежності аналітичним шляхом, виразивши їх через характерні швидкості та критерії гідродинамічної подібності.

Розглянемо усталену течію в'язкої рідини на горизонтальній ділянці труби з перемінним перерізом та місцевими опорами (рис.2.11).

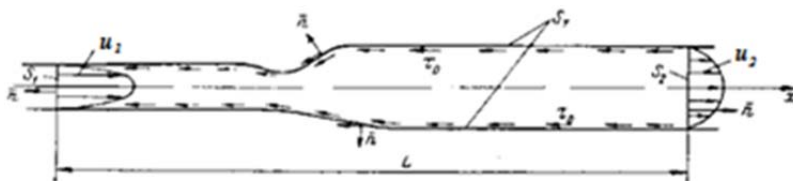


Рис. 2.11. До виводу загальних формул для втрат напору

Виділимо два перерізи труби S_1 та S_2 , що розташовані в зоні руху, який плавно змінюється. До потоку рідини, обмеженому цими перерізами і твердими стінками, застосуємо закон кількості руху, а саме: потік кількості руху крізь нерухому контрольну поверхню дорівнює головному вектору зовнішніх сил, що прикладені до рідини всередині цієї поверхні, тобто

$$\int_S \rho u_n u = \int_W \rho F dW + \int_S p_n dS \cdot$$

Враховуючи що $p_n = -pn + \tau_0$, де n - зовнішня для об'єму рідини нормаль, p - тиск, τ_0 - дотичне напруження на стінці, отримаємо

$$\int_S \rho u_n u = \int_W \rho F dW - \int_S p n dS + \int_S \tau_0 dS \cdot \quad (2.36)$$

Якщо F - сила тяжіння, то проекція рівняння (2.36) на горизонтальну вісь x має вигляд

$$\int_S \rho u_n u_x = - \int_S p \cos(n \wedge x) dS + \int_S \tau \cos(\tau_0 \wedge x) dS \cdot$$

Згідно рис. 2.11 поверхня S складається з суми $S = S_1 + S_2 + S_{бок}$, де $S_{бок}$ - бокова поверхня стінок труби.

Розіб'ємо кожен з поверхневих інтегралів на інтеграли по поверхні і, з огляду на спрямування зовнішніх нормалей, отримаєм

$$\int_{S_2} \rho u_2^2 dS - \int_{S_1} \rho u_1^2 dS = p_1 S_1 - p_2 S_2 - \\ - \int_{S_{\text{бок}}} p \cos(n \wedge x) dS + \int_{S_{\text{бок}}} \tau_0 \cos(\tau_0 \wedge x) dS$$

Перейдемо від місцевих швидкостей u до середніх v , вводячи коефіцієнт кінетичної енергії α , тоді перепад тисків дорівнює

$$p_1 S_1 - p_2 S_2 = -\rho(\alpha_1 v_1 S_1 - \alpha_2 v_2 S_2) + \\ + \int_{S_{\text{бок}}} \tau_0 \cos(\tau_0 \wedge x) dS + \int_{S_{\text{бок}}} p \cos(n \wedge x) dS \quad (2.37)$$

Розглянемо окремі випадки.

Припустимо, що ділянка L не має місцевих опорів і являє собою трубу постійного перерізу $S_1 = S_2 = S$ зі змоченим периметром χ . Тоді у формулі

$$\cos(\tau_0 \wedge x) = 1, \quad \cos(n \wedge x) = 0, \quad v_1 = v_2. \quad (2.38)$$

Враховуючи, що дотичне напруження τ постійно по довжині L , отримуємо

$$(p_1 - p_2)S = \tau_0 L \chi.$$

Або через гідравлічний радіус

$$(p_1 - p_2) = \frac{\tau_0 L}{R_e}.$$

З рівняння Бернуллі слідує, що для труби постійного перерізу втрати напору на тертя можна визначити через різницю п'єзометричних напорів, тобто

$$h_m = \frac{p_1 - p_2}{\rho g}.$$

Тоді

$$\rho g h_m = \tau_0 \frac{L}{R_e}. \quad (2.39)$$

З теорії подібності відомо, що дотичне напруження на стінці τ_0 можна виразити через безрозмірний місцевий коефіцієнт тертя c_m і характерну швидкість, в якості якої в даному випадку приймається середня швидкість в перерізі труби v , тобто

$$\tau_0 = c_m \frac{\rho v^2}{2}.$$

Підставивши цей вираз у формулу (2.39), отримаємо

$$\rho g h_m = c_m \frac{L}{R_z} \frac{\rho v^2}{2}, \quad (2.40)$$

загальну формулу, що представляє собою втрати енергії по довжині потоку в'язкої рідини.

В окремому випадку круглої труби гідравлічний радіус визначається через її діаметр і дорівнює

$$R_z = \frac{D}{4}.$$

Позначивши коефіцієнт опору тертя круглої труби $\lambda = 4c_m$, перепишемо (2.40) в наступному вигляді

$$\rho g h_m = \lambda \frac{L}{D} \frac{\rho v^2}{2},$$

або

$$h_m = \lambda \frac{L}{D} \frac{\rho v^2}{2g}. \quad (2.41)$$

Формула (2.41) застосовується при розрахунку втрат напору на тертя в круглих трубах і відома в гідравліці як формула Дарсі - Вейсбаха.

Так як коефіцієнт c_m відповідно до теорії подібності залежить від числа Рейнольдса, то і коефіцієнт опору тертя λ є функцією цього числа, тобто $\lambda = f(Re)$.

Знайдемо місцеві втрати енергії. Розглянемо найпростіший випадок, коли перерізи до і після місцевого опору однакові, а довжина ділянки L , де розташований місцевий опір, мала. Відповідно до формули (2.37)

$$p_1 S_1 - p_2 S_2 = \int_{S_{бок}} \tau_0 \cos(\tau_0 \wedge x) dS + \int_{S_{бок}} p \cos(n \wedge x) dS.$$

Введемо місцеве число Ейлера $Eu = \rho v^2 / 2$ і використовуємо формулу подібності для τ_0 . Підставляючи це в праву частину рівняння, знаходимо

$$p_1 - p_2 = \int_{S_{\text{бок}}} [\tilde{n}_0 \cos(\tau_0 \wedge x) dS + Eu \cos(n \wedge x)] \frac{dS}{S} \frac{\rho v^2}{2}.$$

Позначивши безрозмірний інтеграл

$$\zeta = \int_{S_{\text{бок}}} [\tilde{n}_0 \cos(\tau_0 \wedge x) dS + Eu \cos(n \wedge x)] \frac{dS}{S},$$

отримаємо формулу для обчислення перепаду тиску

$$p_1 - p_2 = \zeta \frac{\rho v^2}{2},$$

або втрати напору на місцевому опорі

$$h_m = \zeta \frac{\rho v^2}{2}. \quad (2.42)$$

Безрозмірна величина ζ називається *коефіцієнтом місцевого опору*. Вона залежить від форми місцевого опору. Крім того, оскільки Eu та c_m є функціями критеріїв гідродинамічної подібності, тобто числа Re , то і $\zeta = f(Re)$. Дуже часто через невелику довжину ділянки місцевого опору роль першої складової в вираженні для визначення ζ невелика, а впливом числа Рейнольдса на величину другої складової можна знехтувати. Тоді можна вважати, що коефіцієнт ζ для таких видів місцевого опору не залежить від критеріїв подібності, тобто від швидкості потоку, і в значній області зміна числа Рейнольдса є постійною величиною. Якщо при переході через місцевий опір змінюється діаметр труби, то значення ζ залежать від того, обчислюється місцева втрата енергії по середній швидкості перед перешкодою або за нею. У гідравліці прийнято місцеві втрати напору завжди обчислювати по більшій швидкості.

2.2.4. Режим руху рідини. Число Рейнольдса

Для правильного визначення величини втрат напору на гідравлічні опори, перш за все, необхідно скласти чітке уявлення про механізм самого руху рідини. При дослідженні цього питання виявилось, що в природі існують два різних види руху рідини, що різко відрізняються один від одно-

го. Це було відомо ще в першій половині XIX століття, але з усією очевидністю наявність двох режимів течії рідини була підтверджена в 1883 році в результаті дуже простих і наочних дослідів англійського фізика О. Рейнольдса.

У дослідній установці Рейнольдса до баку 1 приєднана скляна труба 2, що забезпечена краном 3 (рис.2.12). Над баком встановлюється бачок 4 з пофарбованою рідиною, яка подається в трубу по тонкій трубці 5 через кран 8. Бак заповнюється водою з водопроводу через трубу 6, а її рівень підтримується постійним за допомогою переливної труби 7. Потім, відкриваючи кран 3, в трубі 2 створюється потік рідини, а відкриваючи кран 8 на трубці 5, в цей основний потік подається тонка струминка пофарбованої рідини. Поступово відкриваючи кран 3, можна підвищувати витрату, отже, і швидкість течії рідини в трубі 2. При невеликих швидкостях течії в трубі 2 забарвлена рідина рухається у вигляді чітко вираженої тонкої струминки (рис.2.13, а), не змішуючись з основним потоком води; при підвищенні швидкості течії пофарбована струминка починає коливатися і приймає хвиляподібні обриси (рис.2.13, б). Потім на окремих її ділянках починають з'являтися розриви, вона втрачає виразну форму і, нарешті, при якомусь певному значенні швидкості повністю розривається, цілком розмиваючись основним потоком рідини (рис. 2.13, в). При цьому окремі частинки барвника змішуються з усією масою рідини, рівномірно її фарбуючи. При проведенні експерименту в зворотному порядку, тобто при поступовому закритті крана 3, явища, що спостерігаються, повторюються в зворотному порядку, але зазвичай при кілька інших значення швидкостей.

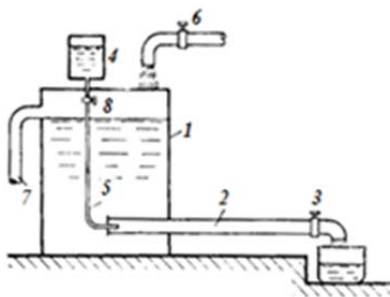


Рис. 2.12. Установка Рейнольдса

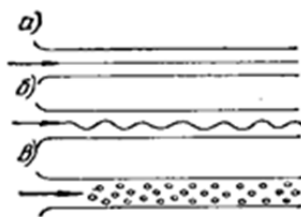


Рис. 2.13. Види руху рідини

Рух рідини при малих швидкостях, коли окремі струмки рідини рухаються паралельно осі потоку, не перемішуючись між собою (рис.2.13, а), називається **ламіна́рним** (від латинського слова «ламіна» - шар). Це течія

без пульсації швидкостей і тисків. У прямій трубі всі лінії течії спрямовані паралельно осі. Прилади для вимірювання тиску і швидкості рідини, які поміщені в потік, показують незмінність тисків і швидкостей в часі, відсутність коливань (пульсацій). Ламінарний рух є цілком упорядкованим і при постійному напорі строго усталеним (хоча в загальному випадку може бути і неусталеним). Однак його не можна вважати безвихровим, тому що має місце одночасно з поступальним обертальний рух окремих частинок рідини навколо своїх миттєвих центрів.

Другий вид руху, що спостерігається при великих швидкостях, називається турбулентним («турбулентус» по-латинськи - вихровий). У цьому випадку (рис. 2.13, в) в русі рідини немає видимої закономірності. Окремі частки рідини перемішуються між собою і рухаються по різних, весь час змінним траєкторіям. Прилади показують безперервні пульсації тиску і швидкості в потоці. Такий рух називають безладним. При турбулентній течії вектори швидкостей мають не тільки осьові, а й нормальні до осі труби складові, тому поряд з основним, поздовжнім переміщенням рідини уздовж труби відбуваються поперечні переміщення (перемішування) та обертальний рух окремих об'ємів рідини. Цим і пояснюються пульсації швидкостей та тисків.

Узагальнивши результати експериментів, а також виходячи з деяких теоретичних міркувань, Рейнольдс знайшов загальні умови, при яких можливі існування того чи іншого режиму і перехід від одного режиму до іншого. Виявилось, що режим течії рідини в трубі залежить від безрозмірного числа, яке враховує основні фактори, що визначають цей рух: середню швидкість v , діаметр труби d , густину рідини ρ і її динамічну в'язкість μ . Це число, яке згодом стало називатися числом **Рейнольдса**, має вигляд

$$Re = \frac{v d \rho}{\mu} = \frac{v d}{\nu}. \quad (2.43)$$

Цей результат узгоджується з викладеними вище основами теорії подібності, і цілком закономірно, що саме число Рейнольдса є критерієм, що визначає режим течії рідини.

Діаметр d в числі Рейнольдса може бути замінений будь-яким лінійним розміром, пов'язаним з умовою течії або обтікання. Для перерізу будь-якої форми необхідно діаметр замінити гідравлічним радіусом R_g .

Межі існування того чи іншого режиму руху рідини визначаються двома критичними значеннями числа Рейнольдса - нижнім $Re_{кр.н}$ і верхнім $Re_{кр.в}$. Значення швидкості, які відповідають цим числам, також називають критичними. При $Re < Re_{кр.н}$ можливий тільки ламінарний режим, а при $Re > Re_{кр.в}$ - тільки турбулентний; при $Re_{кр.н} < Re < Re_{кр.в}$ спостерігається не-

стійкий стан потоку - (перехідна область). У дослідях самого Рейнольдса були отримані наступні значення: $Re_{кр.н} = 2000$, $Re_{кр.в} = 12000$. Численні експерименти показали, що критичні числа Рейнольдса не є постійними величинами і в дійсності нестійка зона може бути значно ширше. Критичне число Рейнольдса, що відповідає переходу від ламінарної течії до турбулентної трохи вище, ніж $Re_{кр}$ для зворотного переходу. В особливих лабораторних умовах при повній відсутності факторів, що сприяють турбулізації потоку, можна отримати ламінарну течію при $Re \gg Re_{кр}$. Однак в цьому випадку ламінарний рух виявляється настільки нестійким, що досить невеликого збурення, щоб він перейшов у турбулентний.

В даний час при розрахунках прийнято виходити тільки з одного критичного числа Рейнольдса для круглих циліндричних труб $Re_{кр} \approx 2320$. При $Re < 2320$ режим вважається ламінарним, при $Re > 2320$ - турбулентним, при цьому рух рідини в перехідній зоні виключається з розгляду, що призводить до деякого запасу та більшої надійності в гідравлічних розрахунках.

Без особливих зусиль можна отримати значення Re для перерізу будь-якої форми. Знаючи, що при круговому перерізі гідравлічний радіус $R_c = \frac{d}{4}$, отримаємо

$$Re = \frac{4\nu R_c}{\nu} \quad (2.44)$$

В трубопроводах систем опалення, вентиляції, водопостачання та ін. рух, як правило, є турбулентним. Ламінарний режим можливий тільки в трубах малого діаметру. Більш в'язкі рідини, наприклад мінеральні масла в системах гідроприводу, можуть рухатися ламінарно навіть в трубах великого діаметра.

2.2.5. Ламінарна течія рідини в циліндричній трубі

Як зазначалося вище, ламінарна течія є строго впорядкованою, шаруватою течією без перемішування рідини. Теорія ламінарної течії базується на законі тертя Ньютона $\tau = \mu \frac{du}{dy}$. Це тертя між шарами рідини, що

рухається, є єдиним джерелом втрат напору в даному випадку. Розглянемо усталену ламінарну течію рідини в прямолінійній круглій трубі з внутрішнім діаметром $d = 2r$ (рис. 2.14).

Нехай труба розташована горизонтально, тоді впливом сили тяжіння можна знехтувати. Досить далеко від входу в неї (там, де потік вже стабілізу-

вався) виділимо відрізок довжиною l між перерізами 1-1 і 2-2. Нехай в перерізі 1-1 тиск дорівнює p_1 , а в перерізі 2-2 - p_2 . З огляду на незмінність діаметра труби, швидкість рідини буде постійною, а коефіцієнт кінетичної енергії α буде незмінним уздовж потоку внаслідок його стабільності, сумарні втрати напору - втрати тільки на тертя, тому рівняння Бернуллі для вибраних перерізів набуде вигляду

$$\frac{p_1}{\rho g} = \frac{p_2}{\rho g} + h_m.$$

Звідси

$$h_m = \frac{p_1 - p_2}{\rho g} = \frac{p_m}{\rho g},$$

що і показують п'єзометри, встановлені в цих перерізах.

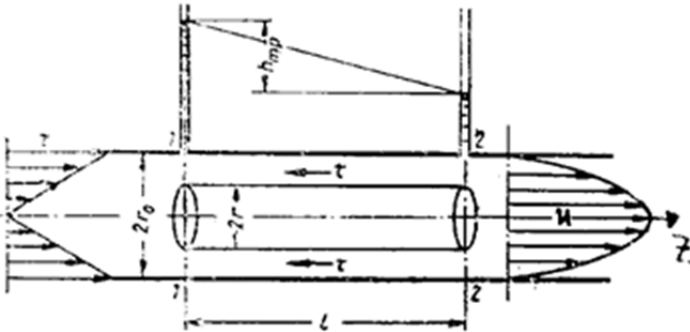


Рис. 2.14. Ламінарна течія в трубі

У потоці рідини виділимо циліндричний об'єм радіусом r , що співвісний з трубою і має основу в обраних перерізах. Напишемо рівняння рівномірного руху виділеного об'єму рідини в трубі, тобто рівність нулю сил, що діють на виділений об'єм: сил тиску та опору. Позначаючи дотичні напруження на бічній поверхні циліндра через τ , отримаємо

$$(p_1 - p_2) \pi r^2 - 2 \pi r l \tau = 0,$$

звідки

$$\tau = \frac{p_m r}{2l}.$$

З формули виходить, що дотичні напруження в поперечному перерізі труби змінюються за лінійним законом у функції радіуса, як показано на

рис. 2.14 і дорівнюють нулю по осі труби. Оскільки ця формула виведена без урахування характеру режиму течії рідини в трубі, вона справедлива як для ламінарної, так і для турбулентної течії.

Висловимо дотичні напруження τ за законом тертя Ньютона через динамічну в'язкість та поперечний градієнт швидкості, при цьому замінимо відстань від стінки (змінну y) поточним радіусом r

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} = -\mu \frac{du}{dr}.$$

Знак «-» показує, що напрямок відліку r від осі до стінки протилежний напрямку відліку y .

Підставляємо значення τ в попереднє рівняння та отримаємо

$$\frac{p_m r}{2l} = -\mu \frac{du}{dr}.$$

Тоді приріст швидкості

$$du = -\frac{p_m r}{2\mu l} dr.$$

(При додатному прирості радіусу виходить від'ємне прирощення швидкості). Інтегруємо цей вираз

$$u = -\frac{p_m}{2\mu l} \frac{r^2}{2} + C.$$

Постійну інтегрування знайдемо з граничних умов, на стінці при $r=r_0$ значення швидкості $u=0$

$$C = \frac{p_m r_0^2}{4\mu l}.$$

Швидкість на відстані r від осі

$$u = \frac{p_m (r_0^2 - r^2)}{4\mu l}. \quad (2.45)$$

Цей вираз називається формулою Стокса і є законом розподілу швидкостей по перерізу круглої труби при ламінарному режимі течії. Епюра швидкості являє собою параболу другого ступеня (рис.2.14).

Максимальна швидкість в центрі перерізу (при $r = 0$)

$$u_{\max} = \frac{p_m r_0^2}{4\mu l} . \quad (2.46)$$

Знайдемо витрати рідини при такому розподілі швидкості. Елементарна витрата

$$dQ = u \, dS .$$

Тут швидкість визначається формулою (2.45), а елементарну площадку dS доцільно взяти у вигляді кільця радіусом r і шириною dr , тоді

$$dQ = \frac{p_m (r_0^2 - r^2)}{4\mu l} 2\pi r dr .$$

Після інтегрування по всій площі поперечного перерізу, тобто від $r = 0$ до $r = r_0$, отримаємо

$$Q = \frac{\pi p_m}{2} \int_0^{r_0} (r_0^2 - r^2) r dr = \frac{\pi p_m}{8\mu l} r_0^4 . \quad (2.47)$$

Знайдемо середню швидкість

$$v = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{\pi r_0^2} = \frac{p_m r_0^2}{8\mu l} . \quad (2.48)$$

Порівнюючи (2.48) і (2.46), знаходимо, що при ламінарній течії середня швидкість в два рази менше максимальної, тобто $v = \frac{u_{\max}}{2}$.

Знайдемо втрати напору на тертя h_m , для цього виразимо з формули (2.47) p_m , розділимо весь вираз на ρg , замінимо $\mu = \rho \nu$ і $d = 2r_0$, отримаємо

$$h_m = \frac{128 \nu Q}{\pi g d^4} . \quad (2.49)$$

Отриманий закон опору отримав назву закону Пуазейля і показує, що при ламінарній течії в трубі круглого перерізу втрати на тертя пропорційні витраті і в'язкості в першій ступені та зворотно пропорційні діаметру в четвертому ступені.

Приведено отриманий закон опору до раніше виведеної формули Дарсі-Вейсбаха

$$h_m = \frac{128\nu Q}{\pi g d^4} = \frac{64\nu}{\nu \operatorname{Re}} \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} = \frac{64}{\operatorname{Re}} \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g},$$

де

$$\lambda = \frac{64}{\operatorname{Re}}. \quad (2.50)$$

Втрати напору на тертя при ламінарному режимі пропорційні середній швидкості в першій ступені. Дане значення коефіцієнта гідравлічного опору на тертя добре узгоджується з експериментами і служить в якості основного при практичних розрахунках.

Знаючи закон розподілу швидкості по перерізу труби, легко визначити коефіцієнт Коріоліса α для ламінарного режиму течії в круглій трубі. Враховуючи вираження (2.45) та (2.48) і те, що $S = \pi r_0^2$ та $dS = 2\pi r dr$, отримаємо

$$\alpha = \frac{\int u^3 ds}{v^3 S} = 16 \int_0^{r_0} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)^3 \frac{r dr}{r_0^2}.$$

Позначимо $z = 1 - \frac{r^2}{r_0^2}$, тоді

$$\alpha = -8 \int_1^0 z^3 dz = 2z^4 \Big|_1^0 = 2. \quad (2.51)$$

Отже, справжня кінетична енергія ламінарного потоку з параболічним розподілом швидкості в два рази перевищує кінетичну енергію того ж потоку, але при рівномірному розподілі швидкості.

Викладена теорія ламінарної течії рідини в круглій трубі добре узгоджується з експериментами і не потребує поправок за винятком таких випадків:

- Течія в початковому перерізі труби;
- Течія з теплообміном;
- Течія в капілярах і зазорах з облітерацією;
- Течія з великими перепадами тиску.

2.2.6. Турбулентна течія рідини в трубах

Численні спроби підійти до дослідження турбулентного режиму методами математичного аналізу протягом довгого часу закінчувалися невдачею через неможливість охопити за допомогою стрункої закінченої тео-

рії все різноманіття та складність явищ, що спостерігаються. У турбулентному потоці кожна окремо взята частка рідини рухається по дуже складній криволінійній траєкторії, відмінній від траєкторій сусідніх з нею частинок, і, як це видно з розглянутих вище дослідів Рейнольдса, переміщається не тільки в напрямку осі потоку, як при ламінарному режимі, але і бере участь в безладних поперечних рухах. Для такого потоку характерно перемішування рідини, пульсації швидкостей і тисків. Сучасна гідродинаміка при вивченні турбулентного режиму йде іншим шляхом і використовує в основному статистичний метод дослідження, який розглядає не істинні, а «осереднені» - середні за часом характеристики потоку. На підставі всебічного теоретичного та експериментального дослідження за допомогою цього методу можна не тільки встановити основні якісні закономірності, що пояснюють механізм руху, а й отримати (що особливо важливо для практичних цілей) певну їх кількісну оцінку.

Розглянемо деякий потік рідини при турбулентному режимі. Незважаючи на те, що кожна частка в цьому потоці бере участь як у поздовжніх, так і в поперечних рухах, все ж завжди можна встановити головний напрямок руху. Таким головним напрямком, що визначає загальний напрямок руху всього потоку, вочевидь, слід вважати рух частинок вздовж осі потоку, так як кожна з них, врешті-решт, переміщається в цьому напрямку.

Відзначимо в просторі, заповненому рідиною, що рухається, деяку точку O (рис. 2.15). Через неї будуть проходити різні частки рідини (на-

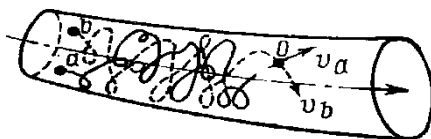


Рис. 2.15. Характер руху рідини в турбулентному потоці

приклад, частки a й b), причому швидкості цих частинок v_a і v_b будуть різні не тільки за величиною, а й у напрямку. Швидкості рухомих частинок рідини в даній точці в даний момент часу називають **миттєвими місцевими швидкостями** в даній точці, або просто **миттєвими швидкостями**.

Якщо з точки O в кожен даний момент часу відкласти відповідний йому вектор миттєвої швидкості і провести через кінці таких векторів поверхню, можна отримати векторну діаграму швидкості - так званий годограф швидкості.

Залежно від форми цієї поверхні розрізняють однорідний (ізотропний) турбулентний потік, при якому поверхня кульова, і неоднорідний (анізотропний) потік, коли кінець вектору швидкості описує більш складну замкнуту поверхню.

Будь-яку миттєву швидкість можна розкласти на три складові: поздовжню (по осі x) u_x , спрямовану паралельно осі потоку, і дві поперечні, що лежать в площині живого перерізу потоку - горизонтальну складову u_y по осі y і вертикальну u_z по осі z (рис. 2.16).

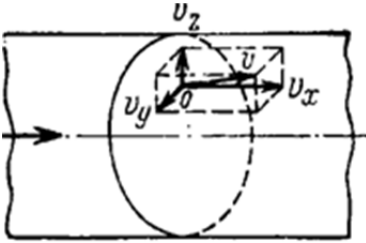


Рис. 2.16. Складові пульсаційних швидкостей в турбулентному потоці

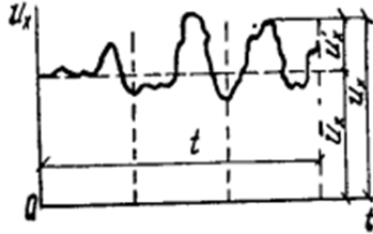


Рис. 2.17. Пульсація миттєвої швидкості в турбулентному потоці

Зобразимо графічно зміни цих складових в залежності від часу. Для цього по осі ординат відкладемо значення складової миттєвої швидкості в даній точці, а по осі абсцис - відповідний цим значенням час спостереження t . На рис. 2.17 наведений графік для осьової складової миттєвої швидкості (відповідної напрямку головного руху всього потоку), що має найбільше значення для практичних цілей. Аналогічні графіки можуть бути побудовані і для поперечних складових. Ці графіки носять назву **графіків пульсацій**, сама ж зміна будь-якої складової миттєвої швидкості в часі називається **пульсацією швидкості**.

Оскільки миттєва швидкість в даній точці не постійна, а змінюється в часі, в гідродинаміці для зручності дослідження потоку вводиться поняття **усередненої швидкості** - середньої швидкості в даній точці за досить великий проміжок часу. Будемо позначати її $\bar{u}$. Зміни швидкості здаються безладними, однак можна визначити усереднене значення за досить довгий проміжок часу T . Тоді

$$\bar{u}_x = \frac{1}{T} \int_0^T u_x dx . \quad (2.52)$$

Отримана таким чином величина являє собою поздовжню складову усередненої за часом або середню місцеву швидкість.

Аналогічні вирази можна отримати і для складових усередненої швидкості по осях y і z - u_y і u_z . Тоді вектор повної усередненої швидкості буде визначатися виразом

$$\bar{u} = \sqrt{\bar{u}_x^2 + \bar{u}_y^2 + \bar{u}_z^2} . \quad (2.53)$$

Різниця між істинним та усередненим значеннями миттєвої місцевої швидкості називається пульсаційною складовою швидкості (або просто пульсаційною швидкістю або пульсаційною добавкою). Наприклад, в поздовжньому напрямку пульсації добавка дорівнює

$$u' = u_x - \bar{u}_x . \quad (2.54)$$

Сума пульсаційних швидкостей в розглянутій точці O за час T , як і середнє значення пульсаційної швидкості в цій точці, дорівнює нулю. Пульсаційна швидкість також може бути розкладена на складові, як і усереднена.

Зі сказаного вище слідує, що усереднена швидкість є така постійна фіктивна швидкість, з якою протягом деякого часу через даний елементарний переріз повинні були б рухатися частинки рідини для того, щоб витрата рідини дорівнювала дійсній витраті, яка пройшла через цей елементарний переріз за той же час, але при істинних швидкостях, що змінюються в часі.

Само собою зрозуміло, що поняття усередненої швидкості не слід змішувати з встановленим раніше поняттям середньої швидкості, що представляє собою не середню за часом швидкість в даній точці, а середню швидкість для всього поперечного перерізу. Ця остання швидкість

$$v = \frac{1}{S} \int_S u_x dS .$$

Введення поняття усередненої швидкості мало істотне значення для вивчення механізму турбулентного режиму. У турбулентному потоці замість поля миттєвих швидкостей можна розглядати поле усереднених швидкостей і надалі, кажучи про швидкості елементарних струминок в турбулентному потоці, завжди будемо мати на увазі саме ці усереднені за часом швидкості. Поступаючи так само, можна також розглядати турбулентний рух як рух усталений, хоча, строго кажучи, він є неусталеним, оскільки лінії струму в кожен даний момент часу змінюють свою форму.

Як було встановлено, у турбулентному потоці завжди спостерігається пульсація швидкостей. Під дією пульсації частинки рідини, що рухаються в головному (осьовому) напрямку потоку, отримують, крім того, і поперечні переміщення, внаслідок чого між сусідніми шарами рідини виникає обмін частками, що викликає безперервне перемішування рідини.

Однак у стінок, що обмежують потік, створюються особливі умови для руху рідини. В теоріях, що панували в гідравліці до початку XX ст., приймалося, що тут утворюється деякий нерухомий, «мертвий» шар, поруч з яким зі значними швидкостями рухається вся інша маса рідини. Наявність цього нерухомого шару з неминучістю приводила до неправдоподібних висновків про «розрив» швидкостей, тобто до такого закону розподілу усереднених швидкостей в поперечному перерізі, при якому відбувається раптова, стрибкоподібна зміна швидкості від нуля в нерухомому шарі до деякого кінцевого значення в іншій частині потоку.

Численні експериментальні дані, що отримані різними дослідниками по вивченню турбулентних потоків (в основному в першій третині XX ст.), довели очевидну неспроможність цих теорій. Було встановлено, що швидкості течії рідини безпосередньо на самій поверхні стінок внаслідок прилипання до них рідини, що змочує, дорівнюють нулю; на вельми малій відстані від стінок швидкості досягають значної величини; в інших, більш віддалених від стінок точках поперечного перерізу відбувається подальше (але вже значно повільніше) збільшення швидкості.

Все це стало підставою для встановлення схематизованій моделі турбулентного потоку, що зазвичай приймається за основну робочу схему при дослідженнях турбулентного режиму. За цією схемою (рис. 2.18), запропонованою в 30-х роках XX ст. німецьким фізиком Л. Прандтлем, під стінами утворюється досить тонкий шар, який називають в'язким (або ламінарним) підшаром, в якому швидкість змінюється не стрибкоподібно, а безперервно і рух рідини відбувається за законами ламінарного режиму. Основна ж центральна частина потоку (ядро), що пов'язана з цим шаром короткою перехідною зоною, рухається турбулентно з майже однаковою для всіх частинок рідини усередненою швидкістю. Наявність у стінок твердих границь унеможливорює тут поперечний рух частинок рідини. Тому в ламінарному підшарі перемішування рідини не відбувається.

Рівномірний розподіл швидкостей, що спостерігається в ядрі потоку, пояснюється інтенсивним перемішуванням основної маси рідини в цій центральній частині потоку.

Наявність в'язкого (ламінарного) підшару доведено експериментально в результаті вельми ретельних та точних вимірювань. Товщина цього шару дуже мала і зазвичай визначається частками міліметра. Вона зале-

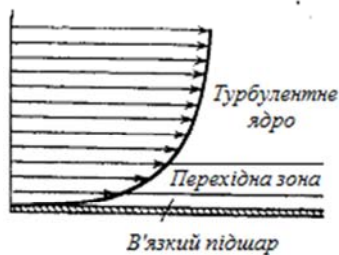


Рис. 2.18. Тришарова модель турбулентного потоку

жить від числа Рейнольдса і тим менше, чим більше це число, тобто більше турбулентність потоку.

Товщина окремих зон турбулентного потоку може бути встановлена з наступних співвідношень:

$$\text{в'язкий (ламінарний) підшар: } 0 < \frac{u^* a}{\nu} < 7;$$

$$\text{перехідна зона: } 7 < \frac{u^* a}{\nu} < 70;$$

$$\text{турбулентне ядро: } \frac{u^* a}{\nu} > 70.$$

Тут – u^* - динамічна швидкість, $u^{*2} = \frac{\tau_0}{\rho}$; τ_0 - дотичне напруження на стінці; a - відстань від стінки.

При значеннях $Re < 100000$ товщина в'язкого підшару δ_e в трубі круглого перерізу може бути визначена також за емпіричною формулою

$$\delta_e = 62,8d Re^{-0,875}. \quad (2.55)$$

де d - діаметр труби.

2.2.7. Дотичні напруження в турбулентному потоці

Зі сказаного вище випливає, що рух рідини при турбулентному режимі повинний відбуватися зі значно більшою втратою енергії, ніж при ламінарному. При ламінарному режимі енергія витрачається тільки на подолання сил внутрішнього тертя між рухомими з різною швидкістю сусідніми шарами рідини, а при турбулентному, крім того, значна енергія витрачається на процес перемішування, що викликає в рідині додаткові дотичні напруження.

Тому повне сумарне дотичне напруження, що виникає в турбулентному потоці, зазвичай визначають як суму двох напружень, в'яз кісного τ_e , що викликається внутрішнім тертям рідини, і додаткового, так званого інерційного τ_i , обумовленого турбулентним перемішуванням

$$\tau = \tau_e + \tau_i. \quad (2.56)$$

Перше з них знаходиться за відомим рівнянням, що виражає ньютонівські закони внутрішнього тертя в'язкої рідини

$$\tau_e = \mu \frac{du}{dy}.$$

Значно складніше виявляється визначення другої складової в рівнянні (2.56). По суті воно обумовлюється пульсаційними добавками швидкості, залежність яких від усереднених характеристик турбулентного потоку досить складна і до сих пір повністю не встановлена. Буссінеск одним з перших (в 1897 р.) запропонував виражати це напруження у вигляді рівняння, що аналогічно рівнянню Ньютона:

$$\tau_i = A \frac{du}{dy},$$

де коефіцієнт пропорційності A має розмірність в'язкості і називається турбулентною (або віртуальною) в'язкістю.

Чисельне значення A зазвичай у багато разів перевищує значення в'язкості μ . Необхідно також мати на увазі, що турбулентна в'язкість не є фізичною властивістю рідини, а являє собою певну характеристику турбулентного потоку, що залежить в основному від інтенсивності турбулентного перемішування і змінюється при переході від однієї точки потоку до іншої. Зокрема, при наближенні до стінки вона прагне до нуля. Величина τ_i обумовлена пульсаційними добавками швидкостей, тому для її визначення необхідно знайти залежність пульсаційних добавок від усереднених характеристик потоку. Ця залежність досить складна і до кінця не вивчена.

Найбільшого поширення набула пропозиція Прандтля, встановлена їм на підставі розглянутої вище моделі турбулентного потоку. За Прандтлем

$$\tau = \rho l^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2. \quad (2.57)$$

Новою тут є величина l , яка називається довжиною шляху перемішування і являє собою деяку довжину, яка визначається пульсаційними добавками швидкості.

Фізично довжину шляху перемішування можна уявити як шлях, який повинна пройти в поперечному напрямку частка рідини відносно решти її маси, щоб в результаті змішування з навколишнім турбулентним потоком (за висловом Прандтля) «втратити свою індивідуальність» або, кажучи іншими словами, втратити свою поперечну пульсаційну складову швидкості.

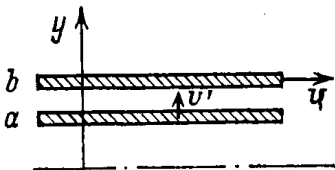


Рис. 2.19. До виводу вираження для інерційного дотичного напруження

Вираз (2.57) для інерційного напруження може бути отриманий наступним чином. Виділимо в рідині, що рухається, два шари - a й b (рис. 2.19), що знаходяться один від одного на відстані l . Як вже зазначалося, при турбулентному режимі, крім переміщення рідини в напрямку головного руху потоку буде відбуватися також і поперечний рух частинок, наприклад в даному випадку від шару a до шару

b . Позначимо u' швидкість цього поперечного руху (пульсаційну швидкість).

За час Δt з одного шару рідини в інший через площадку ΔS , нормальну до напрямку u' , протікає маса рідини

$$\Delta m = \rho \Delta S u' \Delta t.$$

Перемістившись на відстань l , зазначена маса рідини одержить збільшення кількості руху

$$\Delta m \left(\frac{du}{dy} \right) l = \rho \Delta S u' \Delta t \left(\frac{du}{dy} \right) l,$$

що рівне імпульсу дотичної сили T , паралельної осі потоку - $T \Delta t$.

Таким чином, матимемо

$$T \Delta t = \rho \Delta S u' \Delta t \left(\frac{du}{dy} \right) l.$$

Віднесемо цю силу до одиниці площі і прийнявши, що u' - величина того ж порядку, що і $\left(\frac{du}{dy} \right) l$, отримаємо наступний вираз для дотичного (інерційного) напруження

$$\tau_i = \frac{T}{\Delta S} = \rho u' \left(\frac{du}{dy} \right) l = \rho l^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2.$$

При ламінарному режимі, коли перемішування не відбувається, довжина шляху перемішування $l = 0$ і рівняння (2.56) звертається в звичайне для цього випадку рівняння, що виражає дотичне напруження, яке пропорційне в'язкості та швидкості в першому ступені.

При турбулентному ж режимі, який (особливо при великих значеннях числа Рейнольдса) характеризується досить інтенсивним перемішуванням, значення другого члена в рівнянні (2.56) різко зростає. В цьому випадку в'язкістним напруженням можна нехтувати і визначати повне напруження за Прандтлем

$$\tau = \rho l^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2.$$

Таким чином, при великій турбулентності потоку, тобто при великих числах Рейнольдса, можна вважати, що дотичне напруження буде пропорційне густині рідини і квадрату градієнта швидкості. Якщо турбулентний режим характеризується невеликими значеннями числа Рейнольдса, в'язкістне напруження співмірне з інерційним і повне напруження буде пропорційне швидкості в ступені, дещо меншому ніж другий.

2.2.8. Вплив шорсткості стінок на механізм турбулентного потоку

На механізм турбулентного потоку великий вплив має стан твердих стінок, що обмежують потік та завжди в тій чи іншій мірі мають шорсткість. Шорсткість характеризується величиною і формою різних, часом незначних за розмірами, виступів і нерівностей, наявних на стінках, і залежить від матеріалу стінок та їх обробки. Зазвичай з плином часу шорсткість змінюється від появи іржі, корозії, відкладення опадів і ін.

В якості основної характеристики шорсткості служить так звана абсолютна шорсткість Δ , що представляє собою середню величину зазначених виступів і нерівностей, яка вимірюється в лінійних одиницях (рис. 2.20).

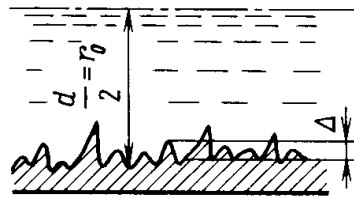


Рис. 2.20. Геометричні параметри потоку в трубі

Для характеристики впливу шорсткості на гідравлічні опори з урахуванням умов дотримання подібності в гідравліці вводиться поняття відносної шорсткості $\bar{\Delta}$, під яким розуміється безрозмірне відношення абсолютної шорсткості до деякого лінійного розміру, що характеризує переріз потоку (наприклад, до радіуса або діаметру труби, глибини рідини у відкритому потоці та ін.). Таким чином, для круглих труб відносна шорсткість

$$\bar{\Delta} = \frac{\Delta}{d} \quad \text{або} \quad \bar{\Delta} = \frac{\Delta}{r_0}.$$

У деяких випадках вводиться також поняття відносної гладкості ε - величини, зворотної відносної шорсткості

$$\varepsilon = \frac{1}{\bar{\Delta}} = \frac{d}{\Delta}.$$

Однак, як показали дослідження, на гідравлічні опори впливає не тільки абсолютне значення шорсткості (висоти виступів), але в значній мірі і форма виступів, густота та характер їх розташування. Слід розрізняти стінки з рівномірною і нерівномірною шорсткістю. Рівномірна шорсткість зазвичай створюється штучно при лабораторних дослідженнях. Стінки ж промислових трубопроводів, як

правило, характеризуються нерівномірною шорсткістю з великим розкидом величин виступів щодо їх середнього значення.

Щоб краще усвідомити особливості опору шорсткуватих труб, необхідно врахувати наявність ламінарного підшару при течії. Як зазначалося вище, при збільшенні числа Рейнольдса товщина ламінарного шару δ_λ зменшується, тому для турбулентного потоку при малих Re

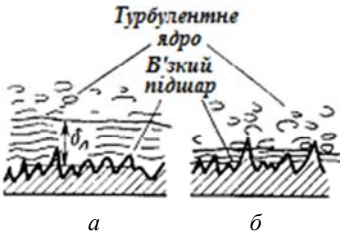


Рис. 2.21. Структура турбулентного потоку поблизу шорсткої стінки:
а – $\Delta < \delta_\lambda$, б – $\Delta > \delta_\lambda$

ця товщина більше висоти мікронерівностей Δ (рис.2.21, а), тоді нерівності стінки будуть повністю занурені в цей шар, турбулентна частина потоку не буде входити в безпосереднє зіткнення зі стінками і рух рідини, а отже, і втрати енергії, не залежатимуть від шорсткості стінок, а будуть обумовлені лише властивостями самої рідини. Якщо

висота виступів така, що вони перевищують товщину в'язкого підшару ($\Delta > \delta_\lambda$), нерівності стінок будуть виступати в турбулентну область (рис. 2.21, б), збільшувати тим самим безладність руху та суттєво впливати на втрату енергії. У цьому випадку кожен окремий виступ можна уподібнити тілу, що погано обтікається та знаходиться в навколишньому його потоці рідини, а також є джерелом утворення вихорів (рис.2.22).

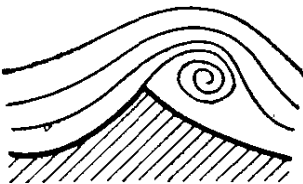


Рис. 2.22. Обтікання мікронерівностей

У відповідності до сказаного в гідравліці поверхні розрізняють на гідравлічно гладкі ($\Delta < \delta_*$) та шорсткі ($\Delta > \delta_*$). Звичайно, такий розподіл є умовним. Насправді, як вже вказувалося, товщина в'язкого ламінарного підшару непостійна і зменшується зі збільшенням числа Рейнольдса. У гідравлічно гладких стінок зі зростанням числа Рейнольдса починає проявлятися їх шорсткість, так як в'язкий підшар стає тонше і виступи шорсткості, які спочатку повністю розташовувалися в цьому шарі, починають виходити з нього, виступаючи в турбулентну зону. Отже, одна і та ж стінка в залежності від числа Рейнольдса може вести себе по-різному: в одному випадку - як гладка, а в іншому - як шорстка. Тому абсолютна шорсткість не може повністю характеризувати вплив стінок на рух рідини. Природно, що стінки з однією і тією ж абсолютною шорсткістю в потоках невеликих поперечних розмірів повинні будуть вносити великі збурення в потік рідини і чинити більший опір руху, ніж в потоках великого перерізу.

Труби з рівномірною шорсткістю можна вважати гідравлічно гладкими, якщо $\bar{\Delta} \leq 33,7 Re^{-0,875}$. Для труб з нерівномірною шорсткістю для цього необхідно, щоб $\bar{\Delta} \leq 10 Re^{-0,875}$.

Оскільки врахувати вплив всіх перерахованих вище факторів безпосередніми вимірами неможливо, в даний час для характеристики шорсткості стінок промислових труб при гідравлічних розрахунках зазвичай використовують поняття так званої еквівалентної шорсткості $\Delta_{екв}$. Ця шорсткість являє собою таку величину виступів однорідної абсолютної шорсткості, яка дає при підрахунках однакову з дійсною шорсткістю величину втрати напору. Значення еквівалентної шорсткості визначають на підставі гідравлічних випробувань трубопроводів і перерахунку їх результатів за відповідними формулами.

2.2.9. Напівемпіричні теорії турбулентності

До сих пір, як на це неодноразово вказувалося, незважаючи на велику кількість теоретичних та експериментальних робіт, виконаних різними дослідниками, немає ще строгої теорії турбулентного перемішування. Не встановлені й необхідні для виконання інженерних розрахунків строго обґрунтовані розрахункові залежності для кількісного опису явищ, що відбуваються в турбулентних потоках.

У зв'язку з цим широке застосування отримали напівемпіричні теорії турбулентності, засновані на схематизованих фізичних моделях турбулентного потоку. Найбільшої популярності серед них отримала напівемпірична теорія, що розроблена Прандтлем. В її основу покладена розглянута вище двошарова модель турбулентного потоку, що припускає його поділ на дві частини: турбулентне ядро і ламінарний підшар.

При цьому були прийняті наступні основні допущення (для труби круглого перерізу):

- дотичне напруження по всьому поперечному перерізі потоку однаково і дорівнює напрузі на стінці $\tau = \tau_0$;

- довжина шляху перемішування пропорційна відстані від стінки y $l = \chi y$, де χ - універсальна постійна.

З урахуванням цього вираз (2.57) для дотичного напруження в разі труби круглого перерізу приймає вигляд

$$\tau_0 = \rho \chi^2 y^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2.$$

Використовуючи вираз для динамічної швидкості

$$u^{*2} = \frac{\tau_0}{\rho},$$

отримаємо

$$u^{*2} = \chi^2 y^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2$$

або

$$\frac{u_*}{\chi y} = \frac{dy}{dy}.$$

Інтегрування цього рівняння дає так званий логарифмічний закон розподілу швидкостей, справедливий для всього ядра турбулентного потоку

$$\frac{u}{u_*} = \left(\frac{1}{\chi} \right) \ln y + C. \quad (2.58)$$

Для визначення постійної інтегрування C напишемо рівняння (2.58) для границі ядра з ламінарним підшаром

$$\frac{u_\delta}{u_*} = \left(\frac{1}{\chi} \right) \ln \delta_e + C,$$

де δ_e - товщина цього підшару. Звідси знаходимо

$$C = \frac{u_\delta}{u_*} - \left(\frac{1}{\chi} \right) \ln \delta_e$$

і, отже,

$$\frac{u_{\delta}}{u^*} = \left(\frac{1}{\chi} \right) \ln y + \frac{u_{\delta}}{u^*} - \left(\frac{1}{\chi} \right) \ln \delta_e. \quad (2.59)$$

У ламінарному підшарі (за Прандтлем) турбулентне перемішування повністю відсутнє. Тому тут для визначення напруження слід виходити з формули Ньютона і в межах цього підшару приймати

$$\tau = \tau_0 = \mu \frac{du}{dy}.$$

Тоді для напруження на границі ламінарного підшару з турбулентним ядром матимемо $\tau_0 = \mu \frac{u_{\delta}}{\delta}$. Цей вираз можна представити також у вигляді

$$\frac{\tau_0}{\rho} = \frac{\mu}{\rho} \frac{u_{\delta}}{\delta} = \nu \frac{u_{\delta}}{\delta} = u^{*2}$$

і визначити звідси товщину підшару

$$\delta = \nu \frac{u_{\delta}}{u^{*2}}.$$

Підставив це значення в рівняння (2.59), остаточно отримаємо

$$\frac{u}{u^*} = \left(\frac{1}{\chi} \right) \ln y + \frac{u_{\delta}}{u^*} - \left(\frac{1}{\chi} \right) \ln \nu \frac{u_{\delta}}{u^{*2}}$$

або

$$\frac{u}{u^*} = \frac{1}{\chi} \ln \frac{u^* y}{\nu} + C_1, \quad (2.60)$$

де $C_1 = \frac{u_{\delta}}{u^*} - \frac{1}{\chi} \ln \frac{u^*}{u_{\delta}}.$

Співробітник Прандтля Нікурадзе шляхом обробки отриманих ним дослідних даних встановив наступні значення коефіцієнтів χ і C_1 :

- для гладких труб $\chi = 0,4$; $C_1 = 5,5$;
- для шорстких труб $\chi = 0,4$; $C_1 = 8,48$.

Вносимо ці значення в рівняння (2.60) і переходимо одночасно від натуральних логарифмів до десяткових, тоді отримаємо наступні, зручні для практичного використання формули для розподілу швидкостей в круглій трубі при турбулентному режимі:

в разі гладких труб

$$u = u^* \left(5,75 \lg \frac{u^* y}{\nu} + 5,5 \right); \quad (2.61)$$

в разі шорстких труб

$$u = u^* \left(5,75 \lg \frac{y}{\Delta} + 5,5 \right). \quad (2.62)$$

Поряд з напівемпіричним описом розподілу швидкостей в трубах використовують і більш прості емпіричні залежності, найбільш поширеною з яких є ступенева залежність

$$\frac{u}{u_0} = \left(\frac{y}{r_0} \right)^n,$$

де u_0 - значення швидкості на осі труби.

Показник ступеня n у цій формулі не постійний і зменшується зі збільшенням числа Рейнольдса. Середнє значення n дорівнює $\frac{1}{7}$ і для цього випадку набув широкого застосування закон кореня сьомого ступеня або так званий закон «однієї сьомої» Кармана

$$\frac{u}{u_0} = \left(\frac{y}{r_0} \right)^{\frac{1}{7}}. \quad (2.63)$$

Недоліком ступеневої формули, як і будь-якої емпіричної залежності, є обмежений діапазон зміни параметрів (числа Рейнольдса), в якому вона може бути застосована. Крім цього, вона дає невірні значення градієнту швидкостей на осі труби і біля стінки. Однак, простота цієї формули та задовільна відповідність дослідним даними в більшій частині перерізу труби робить її зручною для технічних розрахунків.

Для того, щоб в трубі встановити розподіл швидкостей, що відповідний наведеним вище формулам, рідина повинна пройти від вхідного перерізу труби деяку ділянку, яка називається (по аналогії з випадком ламінарного потоку) початковою ділянкою турбулентного режиму.

Висловлені вище міркування про механізм руху та встановлені закономірності розподілу швидкостей в турбулентному потоці підтверджуються великим числом дослідних даних. При турбулентному режимі, як і потрібно було очікувати, швидкості розподіляються по перерізу значно більш рівномірно, ніж при ламінарному.

На рис. 2.23 показані криві розподілу швидкостей для потоку рідини в круглій циліндричній трубі при турбулентному режимі (суцільна лінія) та ламінарному (пунктирна лінія) при одній і тій же витраті.

При цьому слід мати на увазі, що чим більше число Рейнольдса, тобто чим інтенсивніше відбувається процес перемішування, тим, природно, більше цей розподіл в границі при нескінченно великих числах Re прагне до одиниці.

Закони розподілу швидкостей мають велике теоретичне і практичне значення, дозволяють встановити дуже важливу для практичних цілей роль зв'язку між розподілом швидкостей і коефіцієнтом гідравлічного опору.

Теорія Прандтля зіграла велику роль у розвитку вчення про турбулентність і в даний час вона може розглядатися як основна.

Разом з тим, більш пізні дослідження не підтвердили (і це природно) деяких положень, з яких виходив Прандтль при побудові своєї моделі турбулентного потоку, зокрема положення про наявність у стінок підшару зі строго ламінарною течією. Дослідження показали, що в дійсності турбулентні пульсації в якійсь мірі існують і в безпосередній близькості від стінок, тому рідина, що знаходиться в цій області, періодично також обмінюється і змішується з рідиною інших областей турбулентного потоку.

Це стало підставою для внесення деяких уточнень в модель Прандтля і дозволило А.Д. Альтшулю розробити нову напівемпіричну теорію турбулентності, яка розглядає турбулентний потік як єдине ціле, без його поділу на ядро і ламінарний підшар.

Для розподілу швидкостей в поперечному перерізі труби Альтшуль отримав наступну формулу

$$u = u^* \left[\frac{1 + 0,4 \frac{u^* y}{\nu}}{7,8 + 5,75 \lg \frac{1 + 0,4 \frac{u^* \Delta}{\nu}}{1 + 0,4 \frac{u^* y}{\nu}}} \right]. \quad (2.64)$$

При великих числах Рейнольдса вона спрощується і приймає вид

$$u = u^* \left[7,8 - 5,75 \lg \left(2,5 \frac{\nu}{u^* y} + \frac{\Delta}{y} \right) \right]. \quad (2.65)$$

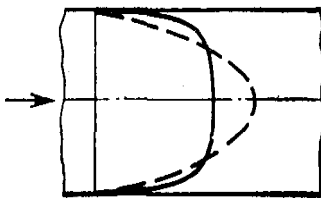


Рис. 2.23. Розподіл швидкості при турбулентній течії

Формула (2.64) враховує вплив на профіль швидкостей одночасно і в'язкості рідини, і шорсткості стінок та, як показують результати експериментів, справедлива для всієї області турбулентного режиму як в гідравлічно гладких, так і в шорстких трубах.

2.2.10. Вплив різних факторів на величину коефіцієнта тертя λ

Питанню впливу різних чинників на значення коефіцієнта гідравлічного тертя λ присвячена велика кількість експериментальних і теоретичних робіт. Не зупиняючись на історії питання, звернемося до дослідів з вивчення гідравлічних опорів в шорстких трубах, що проведені Нікурадзе в 1932 р. Зазначені досліди були поставлені досить ретельно і проводилися в трубах з штучної однорідною шорсткістю, яка створювалася наклеюванням зернин піску певного розміру на внутрішню поверхню труб. У трубах з такою шорсткістю при різних витратах визначалася втрата напору, і по формулі Дарсі обчислювався коефіцієнт λ , значення якого наносилися на графік як функції числа Рейнольдса.

Результати дослідів Нікурадзе представлені на графіку рис. 2.24.

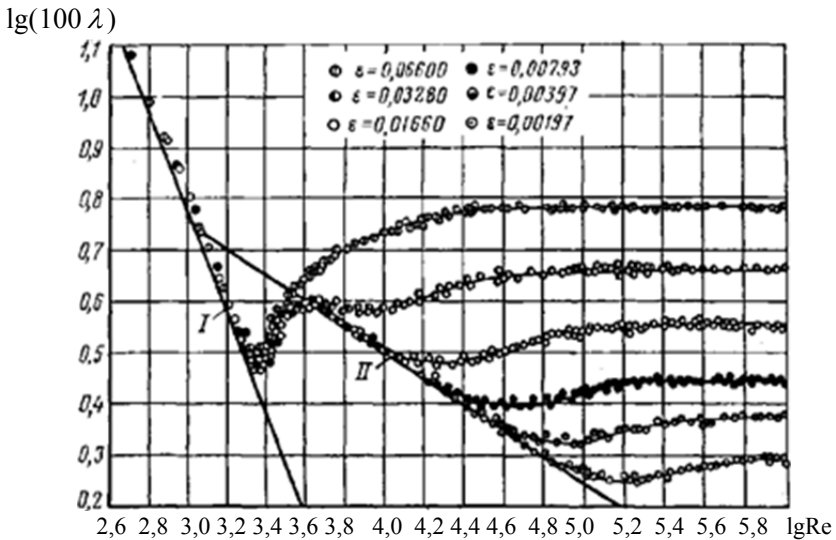


Рис. 2.24. Графік Нікурадзе $\left(\varepsilon = \frac{r}{\Delta} \right)$

Розглядаючи зазначений графік, можна зробити наступні важливі висновки.

В області ламінарного режиму (тобто при $Re < 2320$, чому відповідає $\lg Re = 3,36$) всі дослідні точки незалежно від шорсткості стінок вклалися на одну пряму I в лівій частині графіка. Отже, тут λ залежить тільки від числа Рейнольдса і не залежить від шорсткості.

При значеннях числа Рейнольдса від 2320 до 3000 (перехідна область від ламінарного режиму до турбулентного) коефіцієнт λ швидко зростає зі збільшенням числа Re , залишаючись як і раніше однаковим для різних шорсткостей.

В області турбулентного режиму (тобто при $Re > 3000$, чому відповідає $\lg Re > 3,48$) починає позначатися вплив шорсткості стінок. При цьому, чим більше шорсткість, тим вище значення λ для одних і тих же чисел Рейнольдса.

Для труб з великою відносною шорсткістю λ поступово зростає зі збільшенням Re , досягаючи деякого значення, що зберігається потім постійним.

Для труб з малою шорсткістю дослідні точки в деякому інтервалі значень числа Рейнольдса розташовуються уздовж похилої прямої II , відомої під назвою прямої Блазіуса для «гладких труб». Відхилення від цієї прямої настає тим раніше, чим більше шорсткість стінок. При цьому коефіцієнт λ теж прагне до деякої певної границі, яка різна для труб з різною шорсткістю, потім при подальшому збільшенні числа Рейнольдса також зберігає своє значення постійним. Це так звана область «**цілком шорстких труб**», що відповідає квадратичному закону опорів.

Підсумовуючи, приходимо до висновку, що всю область чисел Рейнольдса на розглянутому графіку Нікурадзе можна розділити на п'ять зон:

1-я зона - ламінарний режим $[\lambda = f(Re)]$;

2-я зона - перехідна з ламінарного режиму в турбулентний;

3-тя зона - область гідравлічно гладких трубопроводів $[\lambda = f(Re)]$;

4-я зона - область шорстких труб (доквадратична область «**змішаного тертя**») при турбулентному режимі $[\lambda = f(\Delta Re)]$;

5-я зона-область «цілком шорстких труб» (квадратична або автомодельна область) при турбулентному режимі $[\lambda = f(\Delta)]$.

Примірні границі окремих зон турбулентного режиму визначаються наступними співвідношеннями:

$$3\text{-я зона} - Re \cdot \frac{\Delta}{d} > 10; \quad (2.66)$$

$$4\text{-а зона} - 10 < Re \cdot \frac{\Delta}{d} < 500; \quad (2.67)$$

$$5\text{-а зона} - Re \cdot \frac{\Delta}{d} > 500. \quad (2.68)$$

Отриманим результатам можна дати наступне тлумачення, що знаходиться в повній відповідності з встановленою вище схемою турбулентного режиму (рис.2.21). До тих пір поки виступи шорсткості повністю занурені в ламінарний приграничний шар, тобто коли $\Delta < \delta_*$, вони не створюють відмінностей в шорсткості, що розуміється в гідравлічному сенсі. В цьому випадку для структури потоку немає різниці між гладкими і шорсткими поверхнями стінок, і коефіцієнт λ залежить тільки від числа Рейнольдса і визначається як для гладких труб (1-3-я зони).

Якщо виступи шорсткості виходять за межі прикордонного шару ($\Delta > \delta_*$), ламінарна течія порушується і виступи шорсткості призводять до відриву рідини від стінок і утворенню в ній вихорів.

Як зазначалося вище, товщина прикордонного шару зменшується зі збільшенням числа Рейнольдса. Тому, у випадку відносно невеликих значень цього числа, коли Δ має той же порядок, що і δ_* , коефіцієнт λ повинен залежати не тільки від шорсткості стінок, але і від числа Рейнольдса (4-я зона). Якщо число Рейнольдса дуже велике і $\Delta > \delta_*$, λ залежить тільки від шорсткості (5-я зона). Основні закономірності, що встановлені Нікурадзе, були в подальшому підтверджені рядом дослідників для різних випадків однорідної шорсткості.

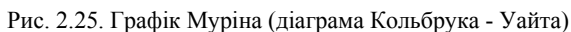
О. Зегжда встановив, що дані, які отримані Нікурадзе для круглих труб, виявляються справедливими і для відкритих безнапірних потоків.

Ю. Рабинович показав, що висновки Нікурадзе підтверджуються при ізотермічній течії в піщаних циліндричних каналах літників таких незвичайних рідин, як розплавлені метали (сталь, чавун).

Як уже зазначалося, досліди Нікурадзе проводилися в трубах з однорідною штучною шорсткістю. Труби ж, що застосовуються на практиці, мають шорсткість неоднорідну і нерівномірну. Тому довгий час залишалося незрозумілим, наскільки правильними будуть висновки, що зроблені Нікурадзе для труб зі штучною шорсткістю, в застосуванні до звичайних промислових труб з природною шорсткістю і які чисельні значення шорсткості для подібних труб. З'ясуванню цих питань були присвячені проведені в подальшому фундаментальні експериментальні дослідження (роботи Кольбука-Уайта, І. Ісаєва, Г. Муріна, Ф. Шевелева). З них найбільший інтерес представляють досить ґрунтовні досліди Г. Муріна з дослідження гідравлічних опорів в звичайних промислових сталевих трубах. Результати цих дослідів представлені на графіку рис. 2.25.

Підтвердивши основні закономірності, що встановлені Нікурадзе, ці досліди дозволили зробити ряд важливих, суттєво нових висновків. Вони

Аналогічні результати були отримані і іншими дослідниками.



При ламінарному режимі в круглих трубах для визначення коефіцієнта λ застосовують формулу Пуазейля (2.50), отриману раніше із зістав-

лення формули Дарсі-Вейсбаха (2.41) з виразом (2.49) для втрати напору при ламінарному режимі; на графіку Нікурадзе (рис.2.24) вона відповідає прямій I .

Справедливість формули Паузейля добре підтверджується численними дослідженнями, котрі проводили з метою вивчення руху різних рідин в трубах різних діаметрів при ламінарному режимі. З її розгляду слідує, що коефіцієнт λ (отже, і втрати напору) при ламінарному режимі не залежить від шорсткості труби. Це пояснюється наявністю у стінок пристінного, в'язкого шару рідини, що «прилипнув», по якому ковзає рідина, що рухається в трубі.

При турбулентному режимі для визначення коефіцієнта λ в різний час було запропоновано велику кількість розрахункових формул.

Спочатку цей коефіцієнт приймався постійним (наприклад, по Дюпюї $\lambda = 0,03$). Надалі для визначення λ був запропонований ряд формул, отриманих на підставі обробки дослідних даних, які враховують залежність λ від ряду факторів: середній швидкості (формули Проні, Етельвейна), розмірів поперечного перерізу (формула Дарсі), розмірів та форми поперечного перерізу, а також шорсткості стінок (формули Куттера, Базена, Маннінга).

Недоліки цих чисто емпіричних формул в подальшому були в значній мірі усунені завдяки застосуванню теорії подібності, що дозволило на основі великого експериментального матеріалу отримати ряд узагальнених залежностей, які досить повно відображають дійсні умови в трубах і каналах при русі рідин. Такі, наприклад, формули Блазіуса, Мізеса, Ланга, в яких $\lambda = f(Re)$. Ще більш досконалими є формули, запропоновані в більш пізній час (Прандтлем і Нікурадзе, Кольбруком і Уайтом, Альтшулем).

Однак деякі з цих формул мають обмежену сферу застосування і придатні лише для окремих зон турбулентного режиму. У зв'язку з цим виникла задача про встановлення єдиної універсальної формули, справедливої для всієї області турбулентного режиму.

Вперше така формула була запропонована Кольбруком і Уайтом, яка може бути застосована для всієї області турбулентної течії в шорстких трубах з природною шорсткістю

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \lg \left(\frac{2,5}{Re \sqrt{\lambda}} + \frac{\Delta}{3,7 d} \right). \quad (2.69)$$

З цієї формули як окремі випадки легко отримуються формули Прандтля - Нікурадзе:

- для гідравлічно гладких труб (3 зона)

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \lg \left(\frac{2,5}{Re \sqrt{\lambda}} \right); \quad (2.70)$$

- для цілком шорстких труб (4 зона):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = A \lg \frac{d}{\Delta} + B. \quad (2.71)$$

(Коефіцієнти A і B встановлюються шляхом обробки експериментальних даних і для труб зі штучною шорсткістю $A = 2, B = 1,14$).

Формула Кольбрука і Уайта прийнята в даний час за кордоном в якості основної для гідравлічного розрахунку трубопроводів, проте вона дещо незручна для практичних розрахунків.

В даний час найбільш широко застосовується формула Альтшуля, що виражає залежність $\lambda = f(Re)$ у вигляді

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1,8 \lg \frac{Re}{Re \frac{\Delta}{10d} + 7}, \quad (2.72)$$

та запропонована ним же простіша ступенева наближена формула

$$\lambda = 0,11 \left(\frac{\Delta}{d} + \frac{68}{Re} \right)^{0,25}. \quad (2.73)$$

Зазначені формули найбільш повно і правильно враховують вплив різних чинників на гідравлічні опори і в даний час набули широкого застосування в практиці гідравлічних розрахунків. Відомими недоліками їх є деяка громіздкість, що ускладнює обчислення та відсутність повних даних про еквівалентну шорсткість.

Для окремих зон турбулентного режиму застосовані наступні формули:

- в області «гідравлічно гладких труб» (3-я зона на графіку Нікурадзе) - формула Блазіуса, що встановлює залежність коефіцієнта λ тільки від числа Рейнольдса

$$\lambda = 0,3164 Re^{0,25}. \quad (2.74)$$

Ця формула може бути легко отримана як окремий випадок ($\frac{\Delta}{d} = 0$) формули (2.73); значення λ , що обчислені за формулою, добре

відповідають дійсності для області «гладких труб» (пряма II на графіку Нікурадзе).

При $Re > 100000$ формула Блазиуса виявляється невірною, дає применшення значення λ ; на практиці формула Блазиуса отримала широке застосування при розрахунках трубопроводів для в'язких рідин (нафтопроводів), де зважаючи на велику в'язкість рух зазвичай характеризується відносно невеликими значеннями числа Рейнольдса;

- в доквадратичній області шорстких труб - універсальна формули (2.73);

- в квадратичній області «цілком шорстких труб» - формула Шіфрінсона (окремий випадок формули (2.73) при $Re \rightarrow \infty$)

$$\lambda = 0,11 \left(\frac{\Delta}{d} \right)^{0,25} . \quad (2.75)$$

Значення абсолютної еквівалентної шорсткості для труб з різних матеріалів наведені в таблиці 2.1.

Т а б л и ц я 2.1

Значення абсолютної еквівалентної шорсткості для труб з різних матеріалів

Матеріал і вид труби	стан труби	Δ, мм
1	2	3
Тягнені труби зі скла і кольорових металів	Нові, технічно гладкі	0,000 ... 0,002
Безшовні сталеві труби	Нові та чисті Після декількох років експлуатації	0,01 ... 0,02 0,15 ... 0,3
Сталеві труби зварні	Нові та чисті Помірно заіржавілі Старі заіржавілі Сильно заіржавілі	0,03 ... 0,1 0,3 ... 0,7 0,8 ... 1,5 2,0 ... 4,0
Клепані сталеві труби	Легко клепані Сильно клепані	0,5 ... 3,0 до 9
Оцинковані сталеві труби	Нові та чисті Після декількох років експлуатації	0,1 ... 0,2 0,4 ... 0,7
Чавунні труби	Нові та чисті Після декількох років експлуатації Дуже старі	0,0 ... 0,16 0,5 ... 1,5 до 3
Бетонні труби	Нові Нові відцентрові Вживані	0,0 ... 0,05 0,15 ... 0,3 0,3 ... 0,8

Продовження табл. 2.1

1	2	3
Азбоцементні труби	Нові	0,1 ... 0,5
Дерев'яні труби	З дерев'яних клепок З неструганих дошок	0,1 ... 1,0 1,0 ... 2,5
Пластмасові труби	Нові	0,001
Гумовий шланг	-	0,02
Ляний або пеньковий прогумований шланг	-	0,75

Наведені вище формули з'явилися порівняно недавно. У різних областях техніки досі продовжують користуватися численними емпіричними залежностями, отриманими безпосередньо шляхом обробки дослідних даних і дійсних лише в обмежених умовах (для певних рідин, визначених діаметрів труб, швидкостей течії та ін.).

Так, для розрахунку водопровідних труб застосовується формула Маннінга

$$\lambda = \frac{124,6 n^2}{d^{\frac{1}{3}}}, \quad (2.76)$$

де n - коефіцієнт шорсткості, для водопровідних труб $n = 0,012$,
 d - діаметр трубопроводу в м.

Для розрахунку повітроводів використовується формула Блесса

$$\lambda = 0,0125 + \frac{0,0011}{d}, \quad (2.77)$$

а для розрахунку газопроводів - формула Веймаута

$$\lambda = \frac{0,094}{d^{\frac{1}{3}}}. \quad (2.78)$$

(В обох формулах діаметр в м).

Спеціальні формули використовують для визначення втрат напору в трубопроводах спеціального призначення, виготовлених з особливих матеріалів (дерев'яні та азбестоцементні труби, гнучкі рукави, прогумовані шланги та ін.). Ці формули встановлені на підставі обробки дослідних даних і можуть бути використані для розрахунків лише в умовах, близьких до експериментальних.

Дерев'яні труби зазвичай збирають на місці спорудження трубопроводу з окремих дошок невеликої ширини - клепок, які стягуються залізним дротом або хомутами з круглого заліза.

Коефіцієнт опору для води при її русі в дерев'яних трубопроводах визначається за формулою

$$\lambda = 0,264 Re^{-0.2}. \quad (2.79)$$

Для випадків різко вираженої шорсткості труб коефіцієнт λ , обчислений за цією формулою, рекомендується збільшувати на 20%.

Азбоцементні труби виготовляють з маси, в яку входять цемент, що швидко схоплюється, та чистий, ретельно розділений на волокна азбест і значна кількість води.

При розрахунках азбоцементних трубопроводів приймають

$$\lambda = 0,206 Re^{-0.21}. \quad (2.80)$$

Для пожежних рукавів та в ряді інших випадків широке застосування знайшли гнучкі шланги. Для них

$$\lambda = 0.01113 + 0,9170 Re^{-0.41}. \quad (2.81)$$

Коефіцієнт опору гнучких рукавів можна визначити і за формулою

$$\lambda = 19,62 K, \quad (2.82)$$

де K - коефіцієнт, що залежить від матеріалу рукава.

Т а б л и ц я 2.2

Коефіцієнт K , який приймається для гнучких рукавів

Для стану рукавів	Коефіцієнт K
Дуже гладких гумових	0,00086
Звичайних гумових	0,000899
Дуже гладких прогумованих	0,000884
Дуже шорстких, всередині прогумованих	0,00163
Звичайних пенькових, непрогумованих	0,00213
Шкіряних, кращої якості	0,00137

Прогумовані шланги, що армовані всередині дротом, розраховують за формулою В.І. Чернікіна

$$\lambda = \lambda_0 \cdot 16 \frac{\delta^2}{d l}, \quad (2.83)$$

де λ_0 - коефіцієнт опору, який вираховується за звичайними формулами;
 δ - висота виступів дротяної спіралі над внутрішньою поверхнею шлангу (d - діаметр шлангу; l - крок дротяної спіралі).

2.2.12. Місцеві опори

При русі реальної рідини, як було зазначено раніше, крім втрат на тертя по довжині потоку можуть виникати і так звані місцеві втрати напору. Причиною останніх, наприклад в трубопроводах, є різного роду конструктивні вставки (коліна, трійники, звуження та розширення трубопроводу, засувки, вентиля та ін.). Місцеві опори викликають зміну швидкості руху рідини за значенням (звуження та розширення), напрямку (коліно) або значенням й спрямуванню одночасно (трійник), тобто вони виникають там, де швидкість змінює свою величину або свій напрямок, і пов'язані зі зміною епюри розподілу швидкості.

Тому часто вказують на деяку аналогію між явищами, які спостерігаються в місцевих опорах, і ударом в твердих тілах, який з механічної точки зору також характеризується раптовою зміною швидкості.

У практичних розрахунках місцеві втрати визначають за формулою (2.30), яка виражає втрату, пропорційну швидкісному напору

$$h_m = \zeta \frac{v^2}{2g},$$

де v - середня швидкість руху рідини в перерізі потоку за місцевим опором; ζ - безрозмірний коефіцієнт, який називається **коефіцієнтом місцевого опору**. Значення ζ встановлюють дослідним шляхом.

Якщо з яких-небудь міркувань втрату напору бажано виразити через швидкість перед місцевим опором, необхідно виконати перерахунок коефіцієнта місцевого опору. Для цієї мети можна скористатися співвідношенням

$$\frac{\zeta_1}{\zeta_2} = \left(\frac{S_1}{S_2} \right)^2, \quad (2.84)$$

де ζ_1, ζ_2 - коефіцієнти місцевих опорів, відповідні перерізам S_1 і S_2 .

У деяких випадках виявляється зручним визначати місцеві опори по так званій **еквівалентній довжині** - такій довжині прямої ділянки трубопроводу даного діаметра, на якій втрата напору на тертя по довжині h_m дорівнює (еквівалентна) втраті напору h_m , що спричинена відповідним місцевим опором. Еквівалентна довжина l_e може бути знайдена з рівності втрати напору по довжині, яка визначається за формулою Дарсі - Вейсбаха (2.29), і місцевої втрати напору, яка обліковується формулою Вейсбаха (2.30). Прирівнюючи праві частини цих формул, знаходимо

$$l_e = \frac{\zeta}{\lambda} d. \quad (2.85)$$

Якщо розглянути найбільш характерний випадок місцевого опору у вигляді раптового розширення трубопроводу, коли поперечний переріз різко збільшується від S_1 до S_2 , (рис. 2.26), можна спостерігати таку картину. Частинки рідини, пройшовши переріз $1-1$ з деякою швидкістю, прагнуть рухатися далі в тому ж напрямку з тією ж швидкістю.

Однак вони затримуються частинками, що знаходяться попереду і володіють (зважаючи на збільшення перерізу) меншими швидкостями, як би наштовхуються та вдаряються об них і тому отримують зміщення в поперечному напрямку, що викликає розширення струменя.

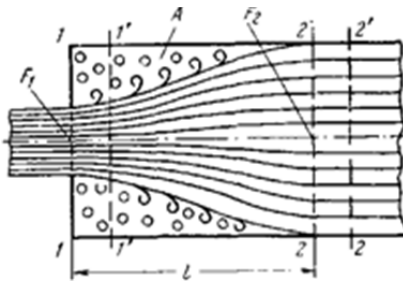


Рис. 2.26. До виводу теореми Борда

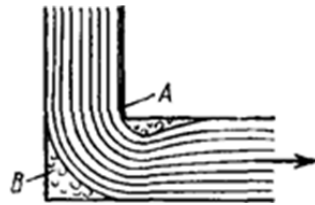


Рис. 2.27. Рух рідини при повороті трубопроводу

В деякому перерізі 2-2, що знаходиться на невеликій відстані від першого, потік рідини заповнює цілком переріз труби. При цьому на початку труби більшого діаметру, в кутах утворюється вихрова область, яка представляє собою кільцевий простір A , заповнений рідиною що не бере участь в основному поступальному русі в напрямку осі трубопроводу. Внаслідок тертя на граничних поверхнях ця рідина знаходиться тут в обертальному, вихровому русі, що викликає значні втрати енергії.

Аналогічні явища мають місце при русі рідини в коліні, де також утворюються вихрові області A і B (рис. 2.27), та у всіх інших випадках місцевих опорів.

Теоретичне визначення місцевих втрат напору представляє значні труднощі через велику складність процесів, що відбуваються при цьому, і може бути виконано лише для небагатьох випадків, зокрема, для раптового розширення трубопроводу. Розглянемо рішення цієї задачі.

Для цього в горизонтальному потоці рідини виділимо об'єм між перерізами $1-1$ і $2-2$ (рис. 2.26) та застосуємо до нього теорему про збільшення кількості руху, згідно з якою приріст кількості руху дорівнює імпульсу проекцій всіх діючих сил на напрям руху.

Зазначений об'єм за деякий час dt переміститься в нове положення, що обмежене перерізами $1'-1'$ і $2'-2'$. Щоб визначити приріст кількості

руху, досить розглянути масу рідини m об'ємів між перерізами $1-1$ і $1'-1'$, $2-2$ і $2'-2'$, оскільки кількість руху об'єму між перерізами $1-1$ і $2-2$ залишається незмінною.

При цьому для збільшення кількості руху отримаємо

$$m(\alpha_1 v_1 - \alpha_2 v_2) = \rho Q dt (v_2 - v_1), \quad (2.86)$$

де Q - витрата рідини; ρ - її густина; α_1 і α_2 - коефіцієнти кінетичної енергії, що представляють собою поправки до кількостей руху за рахунок нерівномірності розподілу швидкостей в поперечних перерізах потоку; в подальшому будемо вважати, що ці коефіцієнти в обох перерізах однакові та дорівнюють одиниці.

При визначенні суми проекцій імпульсів діючих сил слід врахувати, що такими силами є тут лише сили тиску на кінцеві перерізи, що обмежують розглянутий об'єм.

Маючи на увазі, що гідродинамічні тиски p_1 і p_2 в зазначених перерізах рівномірно розподілені по всій площі S_2 , для цих сил отримаємо

$$P_1 = p_1 \cdot S_2; \quad P_2 = p_2 \cdot S_2.$$

Силами тертя через малу довжину ділянки розтікання l можна знехтувати.

Таким чином, сума проекцій імпульсів сил на напрям руху (тобто на ось потоку) буде рівна

$$(p_1 - p_2) S_2 dt. \quad (2.87)$$

Прирівнявши потім вирази (2.86) та (2.87) на підставі теореми про приріст кількості руху, отримаємо

$$\rho Q dt (v_2 - v_1) = (p_1 - p_2) S_2 dt.$$

Останній вираз після ділення на ρg та заміни $Q = v_2 S_2$ набуде вигляду

$$v_2 S_2 \frac{v_2 - v_1}{g} = S_2 \frac{p_1 - p_2}{\rho g},$$

або

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho g} = \frac{v_2^2}{g} - \frac{v_2 v_1}{g}. \quad (2.88)$$

Складемо далі для тих же двох перерізів, маючи на увазі зроблені вище припущення, рівняння Бернуллі в його звичайній формі, з якого легко знайдемо такий вираз для втрати напору при раптовому розширенні

$$h_{pp} = \left(\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} \right) - \left(\frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} \right) = \left(\frac{p_1 - p_2}{\rho g} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} \right).$$

Підставами в цей вираз (2.88). Після перетворення отримаємо

$$h_{pp} = \frac{v_2^2}{g} - \frac{v_2 v_1}{g} + \frac{v_1^2}{2g} - \frac{v_2^2}{2g} = \frac{v_1^2}{2g} - \frac{2v_1 v_2}{2g} + \frac{v_2^2}{g}$$

або остаточно

$$h_{pp} = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g}, \quad (2.89)$$

тобто, втрата напору при раптовому розширенні дорівнює швидкісному напору, що відповідає втраченій швидкості $(v_1 - v_2)$. Цей результат відомий під назвою **теорема** (або **формули**) **Борда** і добре підтверджується дослідними даними при турбулентному режимі, якщо переріз 2-2 приймається достатньо далеко за місцем розширення, тобто там, де встановлюється нормальний розподіл швидкості по перерізу.

Формулу (2.89) можна привести до виду

$$h_{pp} = \left(1 - \frac{v_2}{v_1} \right)^2 \frac{v_1^2}{2g} = \zeta_1 \frac{v_1^2}{2g}.$$

Таким чином, в даному випадку

$$\zeta_1 = \left(1 - \frac{v_2}{v_1} \right)^2 = \left(1 - \frac{S_1}{S_2} \right)^2. \quad (2.90)$$

Коли площа S_2 вельми велика в порівнянні з площею S_1 (наприклад, вихід з труби в резервуар досить великих розмірів), і, отже, швидкість v_2 можна вважати рівною нулю, то втрати на розширення

$$h_{pp} = \frac{v_1^2}{2g},$$

а коефіцієнт місцевих втрат

$$\zeta_{pp} = \zeta_{вих} = 1.$$

Якщо віднести коефіцієнт місцевого опору до швидкості в більшому перерізі, тобто v_2 , то

$$h_{pp} = \zeta_2 \frac{v_2^2}{2g} \text{ і } \zeta_2 = \left(\frac{S_2}{S_1} - 1 \right)^2.$$

Аналогічно можна отримати формулу для розрахунку втрат напору при раптовому звуженні труби

$$h_{pз} = \zeta_{pз} \frac{v_2^2}{2g},$$

де $\zeta_{pз}$ - коефіцієнт місцевих втрат при раптовому звуженні потоку.

Для практичних розрахунків можна користуватися напівемпіричною формулою Ідельчика

$$\zeta_{pз} = 0,5 \left(1 - \frac{S_2}{S_1} \right). \quad (2.91)$$

З формули (2.91) можна зробити висновок, що в окремому випадку, коли $S_1 \gg S_2$, тобто при виході труби з резервуара досить великих розмірів та при відсутності заокруглення вхідного кута, коефіцієнт опору при виході в трубу

$$\zeta_{pз} = \zeta_{ex} = 0,5.$$

2.2.13. Коефіцієнти місцевих опорів

Дослідженню місцевих опорів присвячена велика кількість робіт, в основному експериментальних. Встановлено, що коефіцієнт місцевого опору ζ залежить не тільки від виду самого місцевого опору, але й від характеру режиму руху рідини, тобто від числа Рейнольдса. Залежність ζ від Re для деяких місцевих опорів показана на рис. 2.28 (1 - кульовий клапан, 2 - вентиль, 3 - засувка, 4 - трійник). У більшості випадків зі збільшенням Re коефіцієнт ζ зменшується. Автомодельність (незалежність) коефіцієнтів ζ від Re при різких переходах настає при $Re > 3000$, а для плавних переходів – при $Re > 1000$.

Як показали роботи Альтшуля, Френкеля та інших дослідників, найбільші зміни в залежності від Re коефіцієнт ζ зазнає в області ламінарного режиму. При дуже малих значеннях числа Рейнольдса ($Re < 10$) рідина тече без відриву, втрати напору обумовлюються безпосередньою дією сил

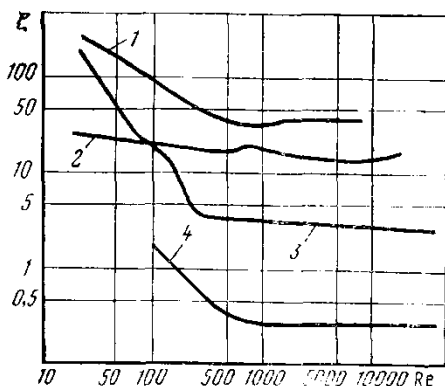


Рис. 2.28. Залежність коефіцієнта місцевих опорів від числа Рейнольдса

в'язкого тертя і пропорційні швидкості потоку в першому ступені, а коефіцієнт місцевого опору зворотно пропорційний Re

$$\zeta = \frac{A}{Re}.$$

При великих значеннях числа Рейнольдса в області ламінарного режиму поряд з втратами на тертя виникають втрати напору, що обумовлені відривом потоку і утворенням вихорів, при цьому залежність коефіцієнта місцевого опору від числа Рейнольдса має вигляд

$$\zeta = \frac{B}{Re}.$$

У цих формулах A і B - числові коефіцієнти, що залежать від виду місцевого опору.

При досить великих числах Рейнольдса вихроутворення набуває основне значення, втрати напору стають пропорційними квадрату швидкості, так як коефіцієнт ζ перестає залежати від числа Re і визначається тільки геометрією потоку (так звана квадратична або автомодельна область опору). Тому, для практичних розрахунків, при турбулентному режимі течії коефіцієнт ζ вважають постійною величиною, яка залежить тільки від характеру і конструкції місцевого опору.

Для орієнтовної оцінки коефіцієнта місцевих опорів може служити формула Альтшуля

$$\zeta = \frac{C}{Re} + \zeta_{кв}, \quad (2.92)$$

де C - коефіцієнт, що залежить від виду місцевого опору;

$\zeta_{кв}$ - коефіцієнт місцевого опору в квадратичній області.

Значення цих коефіцієнтів для деяких місцевих опорів наведені в табл. 2.3.

Таблиця 2.3

Значення коефіцієнтів C і $\zeta_{\text{кв}}$ для деяких місцевих опорів

Місцевий опір	C	$\zeta_{\text{кв}}$
Корковий кран	150	0,4
Вентиль звичайний	3000	6,0
Вентиль кутовий	400	0,8
Кульовий клапан	5000	45
Кутник 90°	400	1,4
Кутник 135°	600	0,4
Коліно 90°	130	0,2
Трійник	150	0,3
Засувка, повне відкриття	75	0,15

Для інженерних розрахунків при турбулентній течії можна приймати середні значення коефіцієнтів місцевих опорів. Місцеві опори, що найбільш часто зустрічаються, і значення їх коефіцієнтів наведені в таблиці 2.4.

Таблиця 2.4

Середні значення коефіцієнтів місцевих опорів

Вид місцевого опору	ζ
Вхід в трубу без закруглення вхідних кромки	0,5
Те ж, при добре закруглених кромках	0,1
Вихід з труби в резервуар великих розмірів	1,0
Різкий поворот труби без перехідного закруглення при куті повороту приблизно 90°	1,25 ... 1,5
Коліно (плавне закруглення) на трубі з кутом повороту 90° при радіусі заокруглення $> 2d$	0,5
Те ж, при радіусі заокруглення, рівному $(3 \dots 7) d$	0,3
Засувка, відкрита наполовину	2,0
Засувка, відкрита повністю	0,1
Кран	5 ... 7
Вхід у всмоктувальну коробку зі зворотним клапаном	5 ... 10

2.2.14. Контрольні питання

1. Чим викликані шляхові та місцеві гідравлічні опори?
2. Сформулюйте основні критерії гідродинамічної подібності.
3. Що визначає критерій Рейнольдса?
4. Чим характерна ламінарна і турбулентна течія рідини?

5. Поясніть гіпотезу Ньютона для дотичних напружень в рідині.
6. Як впливає шорсткість стінок трубопроводу на механізм турбулентного потоку?
7. Поясніть вплив різних чинників на величину коефіцієнта гідравлічного тертя.

2.3. Витікання рідини через отвори і насадки

У багатьох випадках інженерної практики виникає задача про встановлення залежності між тиском в резервуарі і витратою струменя, що витікає з нього через отвір або насадок. Витікання рідини з отворів - одна з основних задач гідравліки, відправна точка її наукового розвитку. Над вирішенням цього завдання працювали видатні вчені та інженери. Слід зазначити, що основне рівняння гідравліки - рівняння Бернуллі - було отримано саме в результаті одного з таких рішень.

2.3.1. Витікання з донного отвору в тонкій стінці

Питання про витікання зводиться до визначення швидкості витікання і витрати витікаючої рідини. Найбільш просто і точно вона вирішується в разі, коли натиск однаковий по всьому поперечному перерізу отвору.

Розглянемо випадок витікання рідини з горизонтального отвору в дні судини (так званий донний отвір, рис. 2.29). Нехай в загальному випадку тиск на вільній поверхні рідини в судині і тиск в середовищі, в яку відбувається витікання, відмінні від атмосферного і рівні p_1 і p .

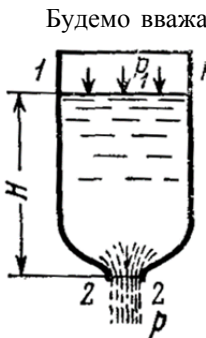


Рис. 2.29. Витікання з донного отвору

Будемо вважати також, що в судину весь час надходить така кількість рідини, яка з нього витікає через отвір, тобто приймемо, що рівень рідини в судині підтримується постійним і, отже, рух рідини буде сталим. Одночасно зробимо припущення, що отвір розташований досить далеко від бічних стінок, що не роблять з огляду на це жодного впливу на умови витікання і досить глибоко занурений під вільною поверхнею, яка внаслідок цього може вважатися горизонтальною.

Розглядаючи спочатку витікання ідеальної рідини, складемо рівняння Бернуллі для двох перерізів: перерізу 1-1 на вільній поверхні

рідини в судині і перерізу 2-2 по отвору. Площі перерізів відповідно позначимо S і s . Маємо

$$H + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g},$$

де v_1 і v_2 - середні швидкості руху рідини в зазначених перерізах.

Рівняння сталості витрати для тих же перерізів дає

$$Q = v_1 S = v_2 s.$$

звідки

$$v_1 = v_2 \frac{s}{S}.$$

Підставивши це значення в попереднє рівняння, отримаємо

$$H + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} \left(\frac{s}{S} \right)^2 = \frac{p}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g},$$

або

$$H + \frac{p_1}{\rho g} - \frac{p}{\rho g} = \frac{v_2^2}{2g} \left[1 - \left(\frac{s}{S} \right)^2 \right].$$

Звідси

$$v_m = v_2 = \sqrt{\frac{2g \left[H + \left(\frac{p_1}{\rho g} - \frac{p}{\rho g} \right) \right]}{1 - \left(\frac{s}{S} \right)^2}}. \quad (2.93)$$

Тут і далі v_2 позначена v_m - швидкість теоретична. Практично площа S буває значно більше площі s , тому в більшості випадків величиною $\left(\frac{s}{S} \right)^2$ можна знехтувати (що рівносильне нехтуванню швидкістю v_1 - так званої швидкістю підходу, меншою в порівнянні зі швидкістю витікання v_m). Тоді

$$v_m = \sqrt{2g \left(H + \frac{p_1}{\rho g} - \frac{p}{\rho g} \right)}. \quad (2.94)$$

В окремому випадку, коли $p_1 = p = p_{at}$ (судина відкрита і витікання відбувається в атмосферу),

$$v_m = \sqrt{2gH}. \quad (2.95)$$

Вираз (2.95) носить назву формули Торичеллі по імені видатного італійського фізика, який встановив цю залежність. Формула Торичеллі і відома з теоретичної механіки формула для визначення швидкості падіння тіла в порожнечі з висоти H тотожні.

Таким чином, у разі витікання ідеальної рідини в атмосферу з отвору в посудині з постійним рівнем і атмосферним тиском на вільній поверхні швидкість витікання дорівнює швидкості падіння твердого тіла в порожнечі при початковій швидкості, що дорівнює нулю, з висоти, відповідної напору рідини над отвором.

Дійсні явища, які спостерігаються при витіканні рідини з отвору, суттєво відрізняються від розглянутої тут спрощеної схеми як внаслідок неминучих втрат напору на подолання опорів, що виникають при русі реальної рідини, так і в результаті явища стиснення струменя. Тому отримані залежності можуть бути використані тільки для визначення теоретичної швидкості витікання і теоретичної витрати рідини. Для вирішення практичних завдань потрібне введення відповідних корегуючих коефіцієнтів.

2.3.2. Коефіцієнти швидкості, стиснення і витрати

У звичайних умовах витікання при великій площі поперечного перерізу судини і малому отворі швидкості руху рідини в самій судині, в порівнянні зі швидкістю витікання з отвору, будуть дуже малі. Тому при витіканні реальної (в'язкої) рідини будуть незначними і втрати напору при її русі по судині. Ці втрати напору будуть зростати лише з наближенням до отвору, в безпосередній близькості від нього і, особливо, в самому отворі. Значить, в даному випадку втрати напору можуть бути віднесені до категорії місцевих втрат. Особливістю цих втрат є те, що вони обумовлюються гальмуванням швидкості внаслідок тертя рідини об стінки і утворенням прикордонного шару на поверхні струменя, що в дійсності призводить до нерівномірності розподілу швидкостей.

Маючи це на увазі, приймемо $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ і складемо аналогічно зазначеному вище рівняння Бернуллі для тих же перерізів 1-1 і 2-2 (рис.2.29). Отримаємо

$$H + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + h_m;$$

де h_m - втрати напору при витіканні, $h_m = \zeta \frac{v_o^2}{2g}$; v_o - дійсна швидкість

витікання; ζ - коефіцієнт опору при витіканні.

Звідси знаходимо

$$v_o = \sqrt{\frac{2g \left[H + \left(\frac{p_1}{\rho g} - \frac{p}{\rho g} \right) \right]}{1 + \zeta - \left(\frac{s}{S} \right)^2}}. \quad (2.96)$$

Нехтуючи величиною $\left(\frac{s}{S} \right)^2$, отримаємо

$$v_o = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta}} \sqrt{2g \left(H + \frac{p_1}{\rho g} - \frac{p}{\rho g} \right)}. \quad (2.97)$$

В окремому випадку, коли $p_1 = p = p_{am}$

$$v_o = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta}} \sqrt{2gH}. \quad (2.98)$$

Формули (2.96 - 2.98) для дійсної швидкості витікання показують, що ця швидкість, як і слід було очікувати, виявляється завжди дещо менше теоретичної, яка визначається за однією з формул, отриманих раніше. Пояснюється це тим, що, як зазначалося, деяка частина енергії, якою володіє рідина, що знаходиться в судині, витрачається на подолання виникаючих при її русі гідравлічних опорів і на створення швидкості йде менший напір, ніж це було прийнято раніше.

Відношення дійсної швидкості витікання до теоретичної називається коефіцієнтом швидкості і позначається буквою φ . Отже,

$$\varphi = \frac{v_m}{v_0} = \frac{1}{\sqrt{1+\zeta}}. \quad (2.99)$$

Для попередніх висновків вважалося, що при витіканні рідина витікає повним перерізом, тобто поперечний переріз струменя після виходу з отвору дорівнюється перерізу самого отвору, а швидкості окремих елементарних струминок в площині отвору паралельні між собою. Насправді, це спостерігається лише тоді, коли стінки судини мають при підході до отвору плавні обриси.

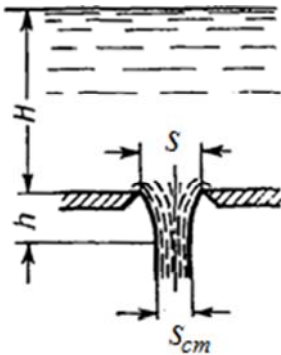


Рис. 2.30. Витікання через отвір в тонкій стінці

У всіх інших випадках струмінь рідини при витіканні зазнає значних змін. Частинки рідини в площині отвору рухаються по непаралельним траєкторіям, що зумовлює зменшення площі поперечного перерізу струменя після виходу з отвору.

Тому, наприклад, при витіканні з отвору в тонкій стінці з гострими кромками (рис. 2.30) струмінь рідини відчуває стиснення і площа його перерізу на деякій невеликій відстані від отвору виявляється менше площі отвору. При цьому в разі витікання через некруглі отвори спостерігається також зміна форми струменя (явище інверсії струменя), що викликається в основному дією сил поверхневого натягу. У разі круглого отвору, розташованого в дні судини симетрично по відношенню до його стінок, струмінь рідини з усіх боків піддається однаковому стиску і в стиснутому перерізі також має форму кола. Досвід показує, що в такому випадку довжина ділянки, на якій відбувається стиснення струменя, дорівнює приблизно 0,5 діаметра отвору.

Зазначене явище характеризується коефіцієнтом стиснення ε , що є відношенням площі стиснутого перерізу струменя s_{cm} до площі перерізу отвору s .

Таким чином,

$$\varepsilon = \frac{s_{cm}}{s}. \quad (2.100)$$

Необхідно врахувати, що з огляду на непаралельності траєкторій і кривизни елементарних струминок рідини для ділянки струменя між отвором і стисненим перерізом рівняння Бернуллі в його звичайній формі застосовувати не можна. Тому при виведенні формул для визначення швидкості витікання це рівняння слід складати не для перерізу в самому отворі, як це було зроблено раніше, а для стисненого перерізу, що знаходиться на деякій відстані h від отвору, де має місце повільно змінюється рух рідини. Траєкторії струминок можна вважати тут паралельними, а тиск - постійним по всьому перерізу. Роблячи таким чином, замість формули (2.95) для дійсної швидкості витікання ми отримаємо вираз

$$v_o = \varphi \sqrt{2g(H + h)}$$

Однак величиною h , як дуже малою в порівнянні з H , зазвичай нехтують, вважаючи, що її вплив враховується коефіцієнтом швидкості.

Перейдемо до визначення витрати рідини. Теоретична витрата

$$Q_m = v_m S.$$

З огляду на стиск струменя, в це рівняння замість теоретичної швидкості слід підставити дійсну $v_o = \varphi v_m$, а замість площі отвору площу стисненого перерізу струменя $S_{cm} = \varepsilon S$. При цьому витрата

$$Q_o = \varepsilon \varphi S v_m = \mu S v_m = \mu Q_m, \quad (2.101)$$

або

$$Q = \mu S \sqrt{2gH}, \quad (2.102)$$

де

$$\mu = \varepsilon \varphi = \frac{Q_o}{Q_m}. \quad (2.103)$$

В цьому виразі μ - коефіцієнт витрати. Він показує, наскільки дійсна витрата рідини при витіканні з отвору зменшується в порівнянні з теоретичним в ідеальному випадку, тобто у разі витікання ідеальної рідини без стиснення струменя.

Зазвичай коефіцієнти μ і ε визначають дослідним шляхом, а φ знаходять шляхом обчислень. Середні значення цих коефіцієнтів при витіканні води з донних отворів у тонкій стінці наступні:

$$\mu = 0,62; \quad \varepsilon = 0,64; \quad \varphi = 0,97.$$

Стиснення струменя виявляється різним в залежності від розташування отвору, з якого відбувається витікання рідини, щодо бічних стінок судини.

Стиснення називається досконалим, якщо отвір знаходиться на значній відстані від стінок і останні не впливають на характер витікання. Дослідами встановлено, що вчинене стиснення спостерігається лише в тих випадках, коли відстань від стінок до отвору не менше потроєної довжини відповідного розміру отвору.

Для круглого отвору ця відстань повинна бути не менше трьох діаметрів отвору. Досконале стиснення характеризується найменшими значеннями коефіцієнтів стиснення і витрат. На підставі дослідів коефіцієнт вчиненого стиснення ε для круглих і прямокутних отворів становить 0,60-0,64 (меншим отворам відповідають більші значення, а більшим отворам - менші значення цього коефіцієнта). При практичних розрахунках для малих отворів у тонкій стінці найбільш часто застосовують значення $\varepsilon = 0,64$.

Якщо встановлені вище умови не дотримуються і отвір знаходиться на ближчій відстані від бічних стінок, стиснення називають недосконалим. У цьому випадку коефіцієнт стиснення виявляється трохи вище, ніж при досконалomu стисненні. При розрахунках зазначену обставину враховують шляхом збільшення коефіцієнта витрати.

Якщо отвір будь-якої частиною свого периметра безпосередньо примикає до стінок судини і стиснення на цій частині периметра взагалі усувається, то таке стиснення називають неповним. Зі сказаного вище випливає, що неповне стиснення не може бути досконалим, воно завжди недосконале.

2.3.3. Витікання з отворів в боковій стінці

Якщо отвір зроблений не в дні, а в боковій стінці судини (вертикальній або похилій), наведені вище формули для швидкості витікання і витрати рідини, строго кажучи, неприйнятні. При витіканні з подібного отвору (рис. 2.31) напір H не буде однаковим по усім перерізам отвору. Для точок, розташованих у нижній частині перерізу, він буде більше, а для точок у верхній частині перерізу - менше. У той же час тиск у всіх точках струменя, що витікає, буде одним і тим же (наприклад, при витіканні в атмосферу буде рівним атмосферному тиску), що не відповідає розподілу тиску за гідростатичним законом. Тому тут рівняння Бернуллі можна застосовувати не до всього струменя в цілому, як було зроблено раніше, а лише до окремих елементарних струмків.

Для визначення середньої швидкості витікання і витрати рідини площу поперечного перерізу отвору необхідно розділити на елементарні площадки і для кожної з них встановити елементарні витрати. Повну ви-

трату знаходять підсумовуванням (інтеграцією) елементарних витрат по всьому перерізу.

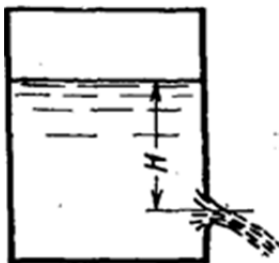


Рис. 2.31. Витікання через отвір у боковій стінці

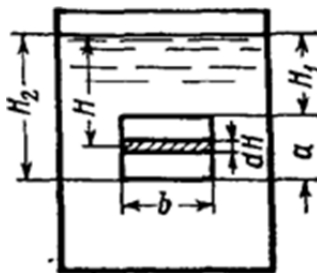


Рис. 2.32. Витікання з великого отвору

Як приклад розглянемо випадок витікання рідини в атмосферу з великого прямокутного отвору шириною b і висотою a в тонкій стінці (рис. 2.32). Виділимо в цьому отворі елементарну площадку висотою dH і шириною b .

Витрата рідини через елементарний переріз $dS = bdH$ буде

$$dQ = \mu S v = \mu b \sqrt{2gH} dH,$$

Де H - глибина занурення центру тяжіння розглянутого елементарного перерізу під вільною поверхнею рідини. Повна витрата через увесь отвір визначиться інтегруванням цього виразу

$$Q = \int_{H_1}^{H_2} \mu b \sqrt{2gH} dH.$$

Тут границями інтегрування є значення глибини занурення верхньої і нижньої кромки отвору під вільною поверхнею рідини H_1 і H_2 . Провівши інтегрування, отримаємо вираз для витрати

$$Q = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} \left(H_2^{3/2} - H_1^{3/2} \right). \quad (2.104)$$

Необхідно відзначити, що коефіцієнти витрати для кожної елементарної струминки мають різне значення. При інтегруванні було прийнято $\mu = const$, тобто введений коефіцієнт витрати всього отвору, що предста-

вляє собою якесь середнє значення коефіцієнтів витрати окремих елементарних струминок.

Вводячи позначення H_c - глибина занурення центру тяжіння отвору, зробивши алгебраїчні перетворення, відкидаючи величини менше одиниці, з достатнім ступенем точності можна отримати

$$Q = \frac{2}{3} \mu b a \frac{3}{2} \sqrt{2g} H_c^{1/2},$$

або

$$Q = \mu S \sqrt{2gH_c}. \quad (2.105)$$

Таким чином, формула для визначення витрати рідини при витіканні з отвору в боковій стінці отримує той же вид, що і для донного отвору. Допущені при виведенні цієї формули неточності виправляються уточненням коефіцієнту витрати μ .

Як показують досліди, цей коефіцієнт непостійний: він істотно змінюється в залежності від форми, розмірів отвору і від напору. При цьому необхідно мати на увазі, що зі збільшенням розмірів отвору зменшується коефіцієнт витрат і зі збільшенням напору зменшується вплив розмірів отвору на коефіцієнт витрат.

2.3.4. Витікання при змінному напорі

Питання про витікання рідини при змінному напорі зазвичай зводиться до визначення часу випорожнення або наповнення всього або деякої частини судини в залежності від початкового наповнення, форми і розмірів судини і отвору.

Необхідно мати на увазі, що на відміну від розглянутих раніше завдань у всіх зазначених випадках внаслідок безперервної зміни напору і, отже, безперервної зміни швидкостей і тисків завжди має місце несталий рух рідини, що робить неприйнятним звичайне рівняння Бернуллі. Тому при вирішенні таких завдань повний час витікання поділяють на нескінченно малі проміжки, протягом кожного з яких натиск вважають постійним, а рух рідини - незалежним від часу, тобто усталеним. Це дозволяє використовувати для вирішення отримані вище залежності та призводить до досить точних результатів.

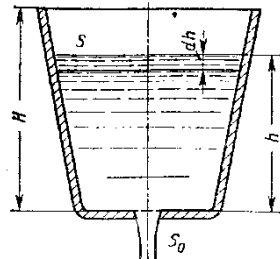


Рис. 2.33. Схема витікання з резервуару

Розглянемо найпростіший приклад витікання рідини в атмосферу через донний отвір з коефіцієнтом витрати μ з відкритої вертикальної циліндричної судини довільної форми (рис. 2.33).

Якщо напір, і, отже, і швидкість витікання змінюються повільно, то рух в кожен даний момент часу можна розглядати як сталий, і для вирішення завдання застосувати рівняння Бернуллі.

Позначимо:

h_0 - змінна висота рідини в резервуарі, яка відлічується від дна;

S - площа перерізу резервуара на цьому рівні;

S_0 - площа отвору.

Тоді через нескінченно малий проміжок часу dt рівняння об'ємів має вигляд

$$S dh = -Q dt \text{ або } S dh = -\mu S_0 \sqrt{2gh} dt ,$$

де dh - зміна рівня рідини в судині за час dt .

Звідси час повного спорожнення судини висотою H знайдемо шляхом інтегрування, вважаючи $\mu = const$

$$t = -\frac{1}{\mu S_0 \sqrt{2g}} \int_{h=H}^{h=0} S \frac{dh}{h}. \quad (2.106)$$

Цей інтеграл можна підрахувати, якщо відомий закон зміни площі S по висоті h . Для призматичної судини $S = const$, тоді

$$t = \frac{S}{\mu S_0 \sqrt{2g}} \int_0^H \frac{dh}{\sqrt{h}}$$

або

$$t = \frac{2S}{\mu S_0 \sqrt{2g}} \sqrt{H} = \frac{2SH}{\mu S_0 \sqrt{2gH}}. \quad (2.107)$$

або

$$t = \frac{2V}{Q_0}, \quad (2.108)$$

де V - початковий об'єм судини;

Q_0 - витрати в початковий момент спорожнення.

При неповному спорожненні судини

$$t = \frac{2S}{\mu S_0 \sqrt{2g}} (\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2}), \quad (2.109)$$

де H_1, H_2 - початкова і кінцева висота відповідно.

2.3.5. Витікання із затопленого отвору

На практиці іноді стикаються із витіканням рідини не тільки в газо-подібне середовище, як це розглядалося вище, але і в рідину, рівень якої розташований вище отвору (при цьому воно може бути як в дні, так і в бічній стінці судини). Такий випадок носить назву витікання рідини під рівень, або із затопленого отвору, і зустрічається, наприклад, при спуску води через щитові вікна і придонні отвори в воротах шлюзів.

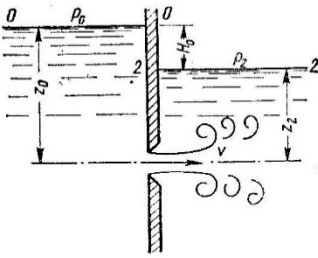


Рис. 2.34. Витікання через затоплений отвір

Припустимо (рис. 2.34), є відкрита судина, розділена перегородкою на два відділення, причому рівні рідини в цих відділеннях різні. Нехай в перегородці зроблений отвір, через який рідина з відділення з більш високим рівнем перетікає у відділення з низьким рівнем.

Прийmemo, що обидва рівні незмінні в часі і площа перерізу отвору мала в порівнянні з площею перерізу самої судини. Тоді для визначення швидкості витікання можна скористатися встановленими раніше залежностями. Причому з огляду на те, що в даному випадку витікання відбувається в середу з тиском, відмінним від атмосферного на вільній поверхні, для визначення теоретичної швидкості витікання слід застосувати формулу (2.94) зі змінними відповідно рис. 2.34

$$v_m = \sqrt{2g \left(z_0 + \frac{p_0}{\rho g} - \frac{p}{\rho g} \right)},$$

де z_0 - глибина занурення центру тяжіння отвору під вільною поверхнею рідини в тій частині судини, з якої відбувається витікання; p_1 - тиск на вільній поверхні рідини; p - тиск в центрі тяжіння отвору з боку рідини, в яку відбувається витікання; ρ - густина рідини.

Так як за основним рівнянням гідростатики $p = p_2 + \rho g z_2$ (тут z_2 - глибина занурення центру тяжіння отвору під вільною поверхнею рідини в

тій частині судини, куди відбувається витікання), то вихідна формула набирає вигляду

$$v_m = \sqrt{2g \left(z_0 - z_2 + \frac{p_0 - p_2}{\rho g} \right)} = \sqrt{2gH}, \quad (2.110)$$

де розрахунковий напір

$$H = z_0 - z_2 + \frac{p_0 - p_2}{\rho g} = H_0 + \frac{p_0 - p_2}{\rho g}.$$

Тут H_0 – різниця рівнів у відділеннях (рис. 2.34).

За умови відкритої судини ($p_1 = p_2 = p_{атм}$)

$$v_m = \sqrt{2gH_0}.$$

Таким чином, при витіканні рідини із затопленого отвору швидкість витікання не залежить від глибини занурення отвору під вільною поверхнею, а визначається різницею двох рівнів рідини.

Дійсна витрата рідини при цьому

$$Q = \mu s \sqrt{2gH}. \quad (2.111)$$

Досліди показують, що коефіцієнт витрати при витіканні з затопленого отвору виходить дещо меншим, ніж при витіканні в атмосферу. Але різниця настільки незначна, що при розрахунках нею зазвичай нехтують і приймають ті ж значення коефіцієнту витрати, що і для незатоплених отворів.

2.3.6. Витікання через насадки

Вище були розглянуті випадки витікання рідини з отворів у тонкій стінці (стінка вважається тонкою, якщо її товщина $\delta < 0.2d$, де d - діаметр отвору).

При значній товщині стінки характер явищ, які спостерігаються при витіканні, істотно змінюється внаслідок впливу товстої стінки на струмін. Ті ж явища спостерігатимуться й при витіканні з отвору в тонкій стінці, забезпечений короткою трубкою того ж діаметру, що і отвір, і довжиною, рівною товщині стінки в першому випадку. Такі трубки називають насадками, вони мають досить широке застосування.

Найбільш поширеними типами насадок є:

- 1) циліндрична - зовнішня (Вентурі) (рис. 2.35, *a*) і внутрішня (Борда) (рис. 2.35, *б*);
- 2) конічні – що сходиться (рис. 2.35, *в*) і розходиться (рис. 2.35, *г*);
- 3) колоїдальні, криволінійного обрису, що мають форму стислого струменя (рис. 2.35, *д*).

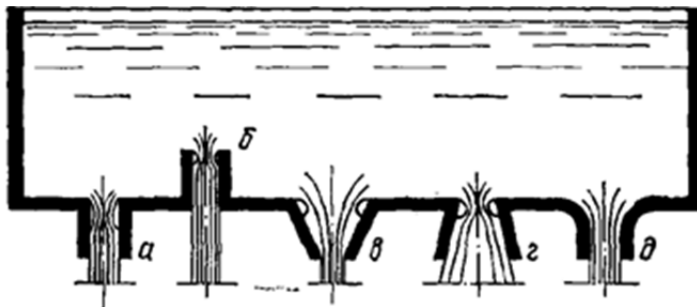


Рис. 2.35. Типи насадок

Розглянемо витікання рідини через зовнішню циліндричну насадку (рис. 2.36), що представляє собою коротку ($l = 3 \dots 4 d$) циліндричну трубку, приставлену до отвору в стінці судини. Струмінь рідини після виходу з судини і входу в таку насадку піддається деякому стиску ($d_{cm} = 0,8 d$), потім поступово розширюється і заповнює весь поперечний переріз насадки. Стиснення струменя відбувається тільки всередині насадки (внутрішнє стиснення), вихідний ж переріз насадки працює повністю, тому коефіцієнт стиснення, віднесений до вихідного перерізу, $\varepsilon = 1$.

Численними дослідями, проведеними над витіканням рідини через зовнішню циліндричну насадку, встановлено значення коефіцієнта витрати $\mu = 0,82$. Зіставляючи це значення зі значенням коефіцієнта витрати при витіканні з отвору в тонкій стінці, отримуємо

$$\frac{\mu_{нас}}{\mu_{отв}} = \frac{0,82}{0,62} = \frac{4}{3}.$$

Отже, витрата рідини при витіканні через насадку буде приблизно в $4/3$ рази більше, ніж при витіканні з отвору в тонкій стінці. А так як в цьому випадку $\varepsilon = 1$, то коефіцієнт швидкості $\varphi = \mu = 0,82$, тобто виявляється значно менше, ніж при витіканні з отвору. Таким чином, зовнішня циліндрична насадка, збільшуючи витрату рідини, значно знижує швидкість витікання. Пояснюється це тим, що в місці стисненого перерізу струменя утворюється кільцева вихрова область (рис. 2.36), заповнена рідиною, що

знаходиться у вихреутвореному, круговоротному русі. Наявність вихрової області в поєднанні з явищами стиснення і подальшого розширення струменя є основною причиною збільшення втрат напору і, отже, зменшення швидкості витікання.

Якщо витікання відбувається в атмосфері, то внаслідок стиснення струменя на початку насадки тиск в вихровій області виявляється менше атмосферного і в ній створюється розрідження (вакуум), що сприяє виділенню з рідини розчиненого в ній повітря. Це повітря потім захоплюється рідиною, що протікає по насадку і захоплюється нею, знижуючи прозорість струменя.

У тому, що в вихровій області утворюється вакуум, легко переконатися, застосовуючи рівняння Бернуллі для двох перерізів: стисненого 1-1 і вихідного 2-2 в кінці насадки

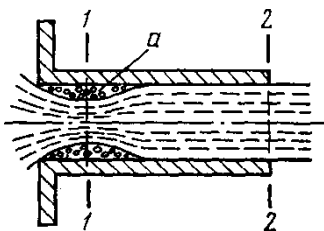


Рис. 2.36. Витікання через зовнішню циліндричну насадку

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + \sum h_{1-2}.$$

Оскільки в даному випадку через незначну довжину насадки втрати на тертя по довжині між перерізами будуть мізерно малі, їх можна не враховувати і визначати втрати напору тільки як місцеві на раптове розширення струменя

$$h_{pp} = \zeta \frac{v_2^2}{2g} = \left(\frac{S_2}{S_1} - 1 \right)^2 \frac{v_2^2}{2g}.$$

Використовуючи рівняння нерозривності, і вважаючи коефіцієнт стиснення для насадки $\varepsilon = 0,64$, остаточно отримаємо

$$\frac{p_1}{\rho g} = \frac{p_2}{\rho g} - 1,12 \frac{v_2^2}{2g}.$$

При витіканні в атмосферу $p_2 = p_{атм}$, а тиск p_1 , як це видно з останнього рівняння, завжди менше p_2 , отже, в зовнішній циліндричній насадці дійсно є вакуум. Наявністю вакууму в насадці можна пояснити також незрозуміле на перший погляд збільшення витрати при витіканні через насадку у порівнянні з витіканням із отвору в тонкій стінці. Завдяки

вакууму насадка працює як насос, додатково реалізує підсос рідини. Тому, незважаючи на збільшення втрат напору, витрата рідини зростає.

Внутрішня циліндрична насадка (рис.2.35, б) виконується у вигляді трубки, яка приставлена до отвору судини зсередини.

У такій насадці в порівнянні із зовнішньою погіршені умови для входу рідини, внаслідок чого збільшується ступінь стиснення струменя всередині насадки і, отже, зменшується коефіцієнт стиснення і зростають втрати напору на вихроутворення.

Режим витікання через внутрішню насадку визначається напором і співвідношенням довжини насадка l до діаметру отвору d . При довжині насадка $l > 2,5d$ рідина заповнює всі його вихідні перерізи; коефіцієнт стиснення в цьому перерізі $\varepsilon = 1$, коефіцієнт швидкості $\varphi = 0,71$. При $l \leq 1,5d$ насадка працює неповним перерізом і рідина витікає з отвору, не торкаючись стінок насадки, що призводить до значного зменшення витрат ($\mu = 0,5$).

У конічній конфузорній (що сходиться) насадці (рис. 2.37) крім явища внутрішнього стиснення струменя, яке тут виявляється менше, ніж в циліндричній насадці, при виході рідини з насадки відбувається друге (зовнішнє) стиснення, після чого вона тече паралельними струминками. Завдяки незначності внутрішнього стиснення втрати напору в цій насадці виявляються меншими, ніж в циліндричній, коефіцієнт φ - великим, а ε внаслідок додаткового стиснення у вихідному перерізі - меншим.

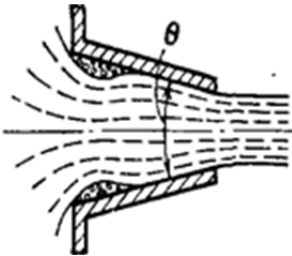


Рис. 2.37. Конфузорна насадка

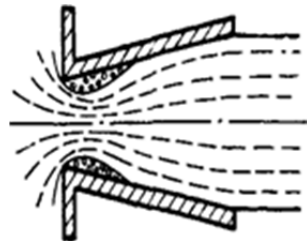


Рис. 2.38. Дифузорна насадка

Всі коефіцієнти витікання ($\varepsilon, \varphi, \mu$) для конічних насадок залежать від кута конусності θ . Досвід показує, що в конічній (що сходиться) насадці коефіцієнт швидкості φ зростає зі збільшенням θ , а коефіцієнт витрати спочатку збільшується, досягаючи найбільшого значення $\mu = 0,946$ при $\theta = 13^\circ$, потім починає спадати.

Слід мати на увазі, що при розгляді витікання рідини через насадки всі коефіцієнти відносяться до їх вихідного перерізу. Якщо коефіцієнт ви-

трати віднести до перерізу отвору в стінці, то внаслідок конусності самої насадки він виявиться значно менше, тому конічні насадки в порівнянні з циліндричними при великих вихідних швидкостях характеризуються меншими витратами рідини.

У конічних дифузорних (що розходяться) насадках (рис. 2.38) струм рідини при вході в насадку зазнає значного стиснення, потім швидко розширюється і заповнює всі перерізи. Зовнішнього стиснення при виході з насадки тут немає, і, отже, коефіцієнт стиснення $\varepsilon = 1$. Однак при куті конусності $\theta > 8^\circ$ ця насадка перестає працювати повним перерізом. Струм витікає, не торкаючись стінок, і витікання відбувається так само, як з отвору в тонкій стінці. Коефіцієнти витікання в насадках, що розходяться, як і в тих, що сходяться, залежать від кута конусності. У середньому (при $\theta < 8^\circ$) $\varphi = \mu = 0,45$.

Таким чином, в конічних насадках (що розходяться) швидкість у вихідному перерізі виявляється значно меншою, ніж у всіх розглянутих вище випадках. Причина цього - великі втрати напору при різкому стисканні та розширенні струменя в самій насадці. Витрата ж рідини тут збільшується. На перший погляд через незначність коефіцієнту витрати це може здатися дещо дивним. Але необхідно врахувати, що цей коефіцієнт відноситься до більшого вихідного перерізу насадка. Якщо його віднести до малого вихідного перерізу, тобто до перерізу отвору в стінці, він виявиться багато більше і досягне значення 2 ... 3. У конічних насадках (що розходяться) в місці стиснення струменя створюється значний вакуум, тому вони мають властивість всмоктування навіть більшою мірою, ніж циліндричні.

Коноїдальні насадки (рис. 2.39) мають форму, близьку до форми струменя рідини, яка витікає з отвору в тонкій стінці. Природно, що в цих насадках внутрішнє стиснення виявляється найменшим, зовнішнє стиснення відсутнє ($\varepsilon = 1$) і коефіцієнти швидкості і витрати більше, ніж у всіх розглянутих випадках. Досліди показують, що середнє значення $\varphi = \mu = 0,97$, а при особливій ретельності виконання та гладких стінках - до 0,995.

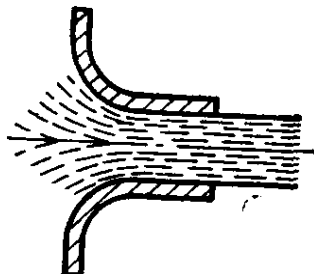


Рис. 2.39. Коноїдальна насадка

Незважаючи на те, що коноїдальні насадки дають найбільші вихідні швидкості і витрати, їх порівняно рідко застосовують, головним чином через складність виготовлення.

У таблиці 2.5 наведені дані про середні значення коефіцієнтів витікання води.

Таблиця 2.5

Середні значення коефіцієнтів витікання води для різних випадків

Тип отвору і насадки	ε	φ	μ
Отвір в тонкій стінці	0,64	0,97	0,62
циліндрична зовнішня	1,00	0,82	0,82
циліндрична внутрішня	1,00	0,71	0,71
Конічна, що сходиться ($\theta = 13^\circ$)	0,98	0,96	0,94
Конічна, що розходиться ($\theta = 8^\circ$)	1,00	0,45	0,45
Коноїдальна насадка	1,00	0,97	0,97

Прикладами циліндричних насадок служать труби для випуску рідини із резервуарів і водойм, а також всілякі крани. Конічні насадки, що сходяться (ними часто замінюють насадки коноїдальні) застосовують для отримання великих вихідних швидкостей, збільшення сили і дальності польоту струменя рідини в пожежних брандспойтах, в форсунках для подачі палива, гідромоніторах для розмиву ґрунту, фонтанних соплах, соплах активних гідравлічних турбін. Конічні розбіжні насадки використовують для уповільнення течії рідини і відповідно для підвищення тиску - у всмоктуючих трубах гідравлічних турбін, трубах під насипами, для уповільнення подачі мастил та ін. Дуже широко застосовуються насадки в різноманітних приладах і пристроях для підйому рідини (ежектор та інжектор), розбризкування і розпилення її (в бризкальних градирнях і басейнах), а також в хімічній технології.

2.4. Взаємодія струменя з перешкодою

Якщо струмінь рідини (наприклад, яка витікає з отвору або через насадку) зустрічає на своєму шляху тверду перешкоду, вона надає на неї тиск, силу якого зазвичай називають силою дії струменя на перешкоду або силою удару струменя. Значення цієї сили залежить від середньої швидкості і розмірів поперечного перерізу струменя рідини, форми і розмірів перешкоди і її розташування по відношенню до струменя.

Зазначене явище спостерігається на практиці досить часто, наприклад, при ударі струменя рідини об лопатки активних гідравлічних турбін і водяних коліс, ударі струменя, що витікає з брандспойта, ударі хвилі об стінку набережної, в процесі буріння нафтових свердловин та ін. Визначення сили тиску струменя дуже важливе практичне завдання.

Розглянемо загальний випадок удару струменя рідини на симетричну по відношенню до струменя нерухому перешкоду, що має вигляд циліндричної криволінійної поверхні (рис. 2.40).

Після удару струмінь розтікається в протилежні сторони під кутами α до осі x , причому внаслідок симетрії швидкості і витрати в обох напрямках можна вважати однаковими. Виділимо в струмені деякий об'єм рідини, обмежений перерізами $1-1$, $2-2$ і $3-3$. Нехай через вельми малий проміжок часу цей об'єм переміститься в деяке нове положення з граничними перерізами $1'-1'$, $2'-2'$ і $3'-3'$. Для визначення сили тиску скористаємося відомою теоремою теоретичної механіки про проекції кількості руху, відповідно до якої зміна за час Δt проекції кількості руху рухомого тіла на вісь s дорівнює сумі проекцій імпульсів діючих на нього сил P_i за той же проміжок часу

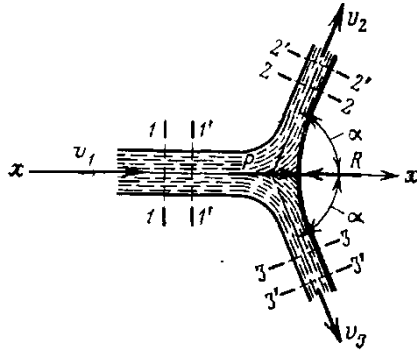


Рис. 2.40. Взаємодія струменя з перешкодою

$$\Delta(mv)_s = \sum (P_i \Delta t)_s.$$

Оскільки кількість руху середньої частини розглянутих об'ємів рідини, обмеженої перерізами $1-1$, $2-2$, $3-3$, при усталеному русі залишається незмінним, його шукану зміну можна знайти як різницю кількостей рухів об'ємів, обмежених перерізами $2-2$ і $2'-2'$, $3-3$ і $3'-3'$, і об'єму $1-1$, $1'-1'$. Позначимо маси рідини в цих об'ємах m_1, m_2, m_3 , середні швидкості в перерізах $1-1$, $2-2$ і $3-3$ відповідно v_1, v_2, v_3 і прийнемо за вісь проекцій горизонтальну вісь x , яка збігається з віссю симетрії.

Для знаходження проекції зміни кількості руху на цю вісь досить спроектувати на неї вектори кількостей руху об'ємів, обмежених перерізами $1-1$ і $1'-1'$, $2-2$ і $2'-2'$, $3-3$ і $3'-3'$. Отримаємо

$$\Delta(mv)_x = m_2 v_2 \cos \alpha + m_3 v_3 \cos \alpha - m_1 v_1.$$

З огляду на те, що в даному випадку $m_2 = m_3$ і $v_2 = v_3$, Отриманий вираз можна переписати таким чином

$$\Delta(mv)_x = 2m_2 v_2 \cos \alpha - m_1 v_1.$$

Перейдемо тепер до визначення суми проекцій імпульсів сил, що діють на струмінь за той же проміжок часу. У вираз для цієї суми увійде проекція імпульсу тільки однієї сили - сили реакції поверхні R . Решта сил або взаємно врівноважуються і не дають складової на вісь проектування (сили гідродинамічного тиску, атмосферний тиск), або настільки малі в порівнянні з кінетичною енергією струменя, що ними можна знехтувати (сили тяжіння). Тоді сила реакції дорівнює шуканій силі тиску P струменя на поверхню і як реактивна сила спрямована в протилежний бік, тобто по горизонталі справа наліво. Імпульс зазначеної сили проектується на вісь x в натуральну величину зі знаком мінус. Тому $\sum (P_i \Delta t)_x = -R \Delta t$ і

$$2m_2 v_2 \cos \alpha - m_1 v_1 = -R \Delta t.$$

Маючи на увазі сталість витрати рідини і нехтуючи гідравлічними опорами, що в даному випадку цілком допустимо, можна прийняти $m_1 = m_2$ і $v_1 = v_2$. Тоді замість отриманого вище рівняння маємо

$$m_1 v_1 (1 - \cos \alpha) = R \Delta t.$$

Висловимо далі масу рідини через витрати $m_1 = \rho Q \Delta t$, отримаємо

$$R = \rho Q v_1 (1 - \cos \alpha).$$

Звідси, внаслідок того, що $Q = v_1 f_1$, де f_1 - площа перерізу струменя, остаточно отримуємо загальний вираз для визначення сили реакції поверхні або рівній їй і протилежно спрямованій сили тиску струменя рідини

$$P = \rho v_1^2 f_1 (1 - \cos \alpha). \quad (2.112)$$

Якщо перешкодою є пластина, яка розташована нормально до осі струменя (рис. 2.41), то $\alpha = 90^\circ$, $\cos \alpha = 0$ і сила тиску струменя дорівнює

$$P = \rho v_1^2 f_1. \quad (2.113)$$

Якщо перешкода (рис. 2.42) являє собою криволінійну поверхню, що відхиляє струмінь на 180° , то сила тиску струменя на таку перешкоду дорівнює

$$P = 2 \rho v_1^2 f_1. \quad (2.114)$$

Розглянемо також перешкоду у вигляді пластини, встановленої під кутом α до осі струменя (рис. 2.43). В цьому випадку, звичайно званому косим ударом, сила тиску струменя на пластину в напрямку дії струменя

$$P = \rho v_1^2 f_1 \sin^2 \alpha . \quad (2.115)$$

Нормальна складова сили (рис. 2.43)

$$P_N = \rho v_1^2 f \sin \alpha . \quad (2.116)$$

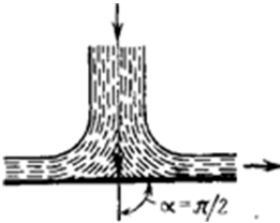


Рис. 2.41. Перешкода, що розташована перпендикулярно потоку



Рис. 2.42. Перешкода, що відхиляє потік на 180°

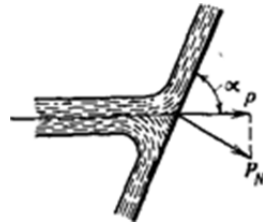


Рис. 2.43. Перешкода, що розташована під кутом α до струменя

2.5. Гідравлічний удар

Гідравлічним ударом зазвичай називають різке підвищення тиску, що виникає в напірному трубопроводі при раптовому гальмуванні потоку рідини. Точніше кажучи, гідравлічний удар являє собою коливальний процес, що виникає в пружному трубопроводі з крапельною рідиною при раптовій зміні її швидкості. Цей процес є дуже швидкоплинним і характеризується чергуванням різких підвищень і знижень тиску. Зміна тиску при цьому тісно пов'язана з пружними деформаціями рідини і стінок трубопроводу.

Гідравлічний удар найчастіше виникає при швидкому закритті або відкритті крана або іншого пристрою управління потоком, раптовій зупинці насосів. Особливо небезпечний гідравлічний удар в довгих трубопроводах, в яких рухаються значні маси рідини з великими швидкостями.

Теоретичне і експериментальне дослідження гідравлічного удару в трубах було вперше виконано видатним вченим, одним з засновників сучасної гідроаеромеханіки Н.Є. Жуковським і надруковано в 1898 р. в його фундаментальній праці «Про гідравлічний удар».

Нехай в кінці труби, по якій рідина рухається зі швидкістю v_0 , зроблено миттєве закриття крана (рис. 2.44, а). Тоді швидкість частинок рідини, натрапивши на кран, буде погашена, а їх кінетична енергія перейде в роботу деформації стінок труби і рідини. При цьому стінки труби розтягуються, а рідина стискається відповідно до підвищення тиску Δp_{y0} (нехтувати стисливістю рідини, як це зазвичай допускається в задачах гідравліки, в даному випадку не можна, так як мала стисливість рідини і є причиною виникнення великого, але кінцевого ударного тиску). На загальмовані частки у крана набігають інші, сусідні з ними частки і теж втрачають швидкість, в результаті чого переріз $n-n$ переміщається вправо зі швидкістю c , що називається швидкістю ударної хвилі; сама ж перехідна область, в якій тиск змінюється на величину Δp_{y0} , називається ударною хвилею.

Коли ударна хвиля переміститься до резервуара, рідина виявиться зупиненою і стислою у всій трубі, а стінки труби - розтягнутими. Ударне підвищення тиску Δp_{y0} пошириться на всю трубу (рис. 2.44, б).

Але такий стан не є рівноважним. Під дією перепаду тиску Δp_{y0} частинки рідини спрямуються з труби в резервуар, причому цей рух почнеться з перерізу, безпосередньо прилеглого до резервуару. Тепер переріз $n-n$ переміщається в зворотному напрямку - до крана - з тією ж швидкістю c , залишаючи за собою вирівняний тиск p_0 (рис. 2.44, в).



Рис. 2.44. Стадії гідравлічного удару

Рідина і стінки труби передбачаються пружними, тому вони повертаються до попереднього стану, відповідному тиску p_0 . Робота деформації повністю переходить в кінетичну енергію, і рідина в трубі набуває первісну швидкість v_0 , але спрямовану тепер в протилежну сторону.

З цією швидкістю «рідка колона» (рис. 2.44, з) прагне відірватися від крана, в результаті виникає негативна ударна хвиля під тиском $p_0 - p_{y0}$, яка направляєється від крана до резервуару зі швидкістю c , залишаючи за собою стиснуті стінки труби і розширену рідину, що обумовлено зниженням тиску (рис. 2.44, д). Кінетична енергія рідини знову переходить в роботу деформацій, але протилежного знаку.

Стан труби в момент приходу від'ємної ударної хвилі до резервуару показаний на рис. 2.44, е. Так само як і для випадку, зображеному на рис. 2.44, б, він не є рівноважним. На рис. 2.44, ж показаний процес вирівнювання тиску в трубі і резервуарі, що супроводжується виникненням руху рідини зі швидкістю v_0 .

Очевидно, що як тільки відбита від резервуару ударна хвиля під тиском Δp_{y0} досягне крана, виникне ситуація, яка вже мала місце в момент закриття крана. Весь цикл гідравлічного удару повториться.

У дослідях Н.С. Жуковського були зареєстровані до 12 повних циклів з поступовим зменшенням Δp_{y0} через тертя в трубі і розсіювання енергії в резервуарі.

Перебіг гідравлічного удару в часі ілюструється діаграмою, представленою на рис. 2.45, а і б.

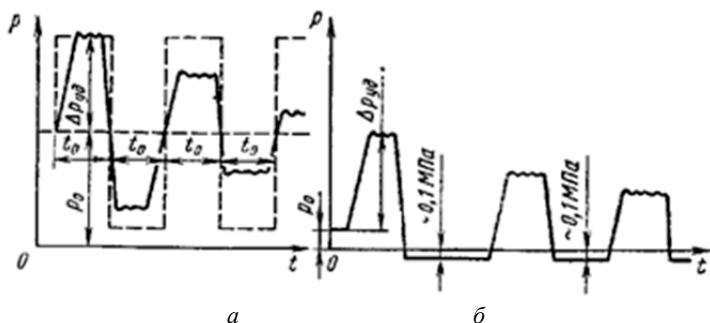


Рис. 2.45. Зміна тиску за часом:

$$a - p_0 > \Delta p_{y0}, \quad б - p_0 < \Delta p_{y0}$$

Діаграма, яка показана штриховими лініями на рис.2.45, *а*, характеризує теоретичну зміну тиску Δp_{nao} в точці *A* (див. рис.2.44) безпосередньо у крана (закриття крана передбачається миттєвим). Суцільними лініями даний приблизний вигляд дійсної картини зміни тиску за часом. Насправді тиск наростає (а також падає), хоча і круто, але не миттєво. Крім того, має місце згасання коливань тиску, тобто зменшення його амплітудних значень через тертя і відхід енергії в резервуар.

Описана картина зміни тиску може виникнути лише в тому випадку, коли є достатній запас тиску p_0 , тобто коли $p_0 > \Delta p_{yo}$ і при зниженні тиску на Δp_{yo} воно залишається додатним. Якщо ж тиск p_0 невеликий (що буває дуже часто), то початкове підвищення тиску при ударі буде приблизно таким же, як і в попередньому випадку. Однак зниження тиску на Δp_{yo} неможливо; абсолютний тиск у крана падає практично до нуля ($p_{nao} \approx 0,1$ МПа), «рідинна колона» відривається від крана, виникає кавітація і утворюється парова каверна. У зв'язку з цим порушується періодичність процесу, і характер зміни тиску за часом виходить приблизно таким, як показано на рис. 2.45, *б*.

Підвищення тиску Δp_{yo} легко зв'язати зі швидкостями v_0 і c , якщо розглянути елементарне переміщення ударної хвилі dx за час dt і застосувати до елементу труби dx теорему про зміну кількості руху. При цьому отримуємо (рис. 2.46)

$$[(p_0 + \Delta p_{yo}) - p_0] S dt = S \rho (v_0 - 0) dx.$$

Звідси швидкість поширення ударної хвилі

$$c = \frac{dx}{dt} = \frac{\Delta p_{yo}}{\rho v_0},$$

або

$$\Delta p_{yo} = \rho v_0 c. \quad (2.117)$$

Отриманий вираз носить назву формули Жуковського.

Так як невідома швидкість c , тому ударний тиск Δp_{yo} знайдемо з умови, що кінетична енергія рідини переходить в роботу деформації, а саме - роботу розтягування стінок труби і роботу стиснення рідини.

Кінетична енергія рідини в трубі радіусом r дорівнює

$$\frac{m v_0^2}{2} = \frac{\pi r^2 l \rho v_0^2}{2}.$$

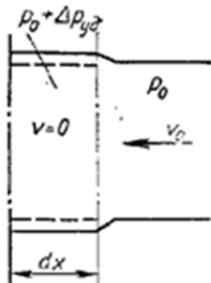


Рис. 2.46. Переміщення ударної хвилі

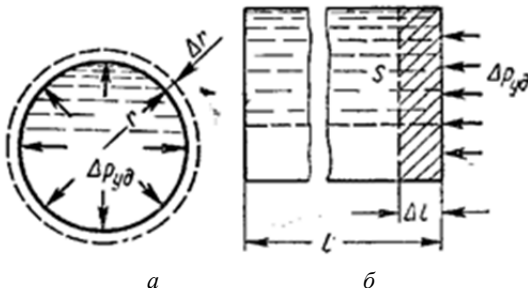


Рис. 2.47. Схема деформації труби і рідини: а – деформація стінок, б – стиснення рідини

Робота деформації дорівнює потенційній енергії деформованого тіла і становить половину добутку сили на подовження. Висловлюючи роботу деформації стінок труби як роботу сил тиску на шляху Δr (рис. 2.47, а), отримуємо

$$\Delta p_{y0} 2\pi r l \frac{\Delta r}{2}.$$

Згідно із законом Гука

$$\sigma = \frac{2\pi [(r + \Delta r) - r]}{2\pi r} E = \frac{\Delta r}{r} E, \quad (2.118)$$

де E - модуль пружності матеріалу стінки труби;

σ - нормальне напруження в матеріалі стінки труби, яке пов'язане з тиском Δp_{y0} і товщиною стінки δ залежністю

$$\sigma = \frac{\Delta p_{y0} r}{\delta}. \quad (2.119)$$

Тоді робота деформації стінок труби - $\frac{\Delta p_{y0}^2 \pi r^3 l}{\delta E}$.

Роботу стиснення рідини об'ємом V можна уявити як роботу сил тиску на шляху Δl (рис. 2.47, б)

$$\frac{1}{2} S \Delta p_{y0} \Delta l = \frac{1}{2} \Delta p_{y0} \Delta v \cdot$$

Аналогічно закону Гука для лінійного подовження, відносно зменшення об'єму рідини $\frac{\Delta V}{V}$ пов'язане з тиском залежністю

$$\frac{\Delta v}{v} K = \Delta p_{y0} ,$$

де K - середнє для даного Δp_{y0} значення адіабатного модуля пружності рідини.

Прийнявши за V об'єм рідини в трубі, отримаємо вираз роботи стиснення рідини - $\frac{\Delta p_{y0}^2 \pi r^2 l}{2K}$.

Таким чином, рівняння енергій набуде вигляду

$$\frac{\pi r^2 l \rho v_0^2}{2} = \frac{\Delta p_{y0}^2 \pi r^3 l}{\delta E} + \frac{\Delta p_{y0}^2 \pi r^2 l}{2K} .$$

Вирішуючи його щодо Δp_{y0} , отримаємо формулу Жуковського

$$\Delta p = \rho v_0 \frac{1}{\sqrt{\frac{\rho}{K} + \frac{2\rho r}{\delta E}}} = \rho v_0 c . \quad (2.120)$$

Тоді швидкість поширення ударної хвилі

$$c = \frac{\sqrt{\frac{K}{\rho}}}{\sqrt{1 + \frac{K}{E} \frac{d}{\delta}}} , \quad (2.121)$$

де $d = 2r$ - внутрішній діаметр труби.

Для труби з абсолютно жорсткими стінками, тобто $E = \infty$, то у формулі (2.121) залишиться лише $\sqrt{\frac{K}{\rho}}$, тобто швидкість звуку в однорідному

пружному середовищі з густиною ρ і об'ємним модулем K . Для води ця швидкість дорівнює 1414 м / с, для бензину 1116 м / с, для масла 1200-1400 м / с. Так як в даному випадку стінки труби не абсолютно жорсткі, то величина c являє собою швидкість поширення ударної хвилі в пружній

рідині, що заповнює пружний трубопровід. Ця швидкість трохи менше швидкості звуку.

Коли зменшення швидкості в трубі відбувається не до нуля, а до значення v_1 , виникає неповний гідравлічний удар і формула Жуковського набуває вигляду

$$\Delta p = \rho(v_0 - v_1)c.$$

Формули Жуковського справедливі при дуже швидкому закритті крана або, точніше кажучи, коли час закриття

$$t_{\text{зак}} < t_0 = \frac{2l}{c},$$

де t_0 - фаза гідравлічного удару.

За цієї умови має місце прямий гідравлічний удар, при $t_{\text{зак}} > t_0$ виникає непрямий гідравлічний удар, при якому ударна хвиля, відбившись від резервуара, повертається до крану раніше, ніж він буде повністю закритий. Очевидно, що підвищення тиску $\Delta p'_{y0}$ при цьому буде менше, ніж Δp_{y0} при прямому ударі.

Якщо припустити, що швидкість потоку при закритті крана зменшується, а тиск зростає лінійно за часом, то

$$\Delta p'_{y0} = \rho v_0 c \frac{t_0}{t_{\text{зак}}}. \quad (2.122)$$

Деякі значення модуля пружності матеріалів трубопроводів представлені в таблиці 2.6.

Т а б л и ц я 2.6

Модуль пружності матеріалів трубопроводів

матеріал	сталь	чавун	бетон	дерево	свинець
$E, \text{Па}$	$2 \cdot 10^{11}$	$1 \cdot 10^{11}$	$2 \cdot 10^{10}$	$1 \cdot 10^{10}$	$2 \cdot 10^7 \dots 5 \cdot 10^9$

Формули (2.117) і (2.121) отримані при використанні ряду припущень: справедливість закону Гука при деформації труби і рідини, відсутність тертя в рідині та інших видів розсіювання енергії в процесі удару, а також рівномірність розподілу швидкостей по перерізу труби.

Експериментальні дослідження гідравлічного удару показують, що якщо рідина не містить повітряних домішок і початковий тиск p_0 не вели-

кий, то, незважаючи на перераховані допущення, формула Жуковського досить добре підтверджується досвідом. Нерівномірність розподілу швидкостей, а отже, і режим течії в трубі (ламінарний або турбулентний), здавалося б, повинні впливати на величину Δp_{y0} , так як від цього залежить кінетична енергія потоку. Однак цей вплив практично відсутній. Пояснюється це тим, що при раптовому гальмуванні потоку відбуваються інтенсивний зсув шарів рідини і велика втрата енергії на внутрішнє тертя, яка приблизно компенсує надлишок кінетичної енергії за рахунок нерівномірності швидкостей.

При високих початкових тисках p_0 і великих Δp_{y0} значення підвищення тиску виходять дещо більшими, ніж за формулою Жуковського, внаслідок зростання модуля K , тобто порушення лінійності зміни деформації по тиску.

Способи запобігання і пом'якшення гідравлічного удару вибирають для кожного конкретного випадку. Найбільш ефективним методом зниження Δp_{y0} є усунення можливості прямого гідравлічного удару, що при заданому трубопроводі зводиться до збільшення часу спрацьовування кранів та інших пристроїв. Аналогічний ефект досягається установкою перед цими пристроями компенсаторів у вигляді достатніх місцевих об'ємів рідини, гідроакумуляторів або запобіжних клапанів. Зменшення швидкості руху рідини в трубопроводах (збільшення діаметру труби при заданій витраті) і зменшення довжини трубопроводів (для отримання непрямого удару) також сприяють зниженню ударного тиску.

2.5.1. Контрольні питання

1. Що таке коефіцієнт швидкості, стиснення, витрати? Що враховує кожен з них?
2. Чому витрати через насадок більше, ніж через отвір при інших рівних умовах?
3. Від чого залежить час витікання рідини з судини?
4. Перерахуйте параметри, що визначають величину підвищення тиску при гідравлічному ударі.
5. Заходи боротьби з гідравлічним ударом.

ГІДРАВЛІЧНИЙ РОЗРАХУНОК ТРУБОПОВОДІВ

3.1. Розрахунок простих трубопроводів

3.1.1. Основні положення

Простим трубопроводом називають трубопровід постійного діаметра, по якому рідина транспортується від живильника до приймача без проміжних відгалужень потоку (рис. 3.1).

Живильниками і приймачами в гідросистемах можуть бути різні пристрої - насоси та гідродвигуни, акумулятори, резервуари та ін.

Початковим при розрахунках простого трубопроводу є рівняння балансу напорів (рівняння Бернуллі) для потоку від 1-го перерізу a в живильнику перед входом в трубопровід до 2-го перерізу b в приймальнику після виходу рідини з трубопроводу.

При усталеному русі рідини це рівняння має вигляд

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} + \Sigma h ,$$

де Σh сума втрат напору на шляху між обраними перерізами, що складається з втрат на тертя по довжині і втрат в місцевих опорах, розташованих на трубопроводі (до місцевих втрат напору відносяться також втрати при вході потоку з живильника в трубопровід і при виході потоку з трубопроводу в приймач).

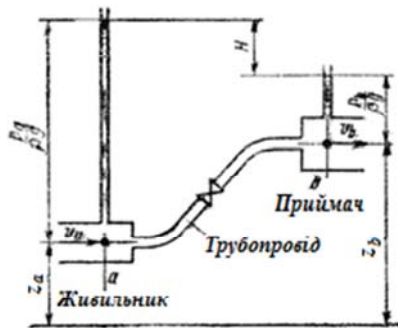


Рис. 3.1. Схема простого трубопроводу

Для зручності розрахунків вводиться поняття наявного напору

$$H_n = \left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g} \right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g} \right),$$

який представляє перепад гідростатичних напорів в живильнику і приймачі і виражається різницею п'єзометричних рівнів в обраних перерізах.

Перетворюючи рівняння балансу напорів, отримуємо загальний вигляд розрахункового рівняння простого трубопроводу (рівняння потрібно-го напору)

$$H_n = \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} - \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} + \Sigma h. \quad (3.1)$$

Якщо площі перерізів живильника і приймача досить великі в порівнянні з перерізом трубопроводу (наприклад, трубопровід, що з'єднує два великі резервуари), швидкісними напорами рідини в цих перерізах при складанні балансу напорів можна знехтувати. При цьому розрахункове рівняння набуває вигляду

$$H_n = \Sigma h. \quad (3.2)$$

Рівняння (3.2) може бути застосовано також незалежно від розмірів живильника і приймача в тих випадках, коли трубопровід має досить велику довжину, при якій швидкісні напори на вході і виході з трубопроводу виявляються зневажливо малими в порівнянні з втратами напору на тертя по його довжині.

Застосуємо рівняння (3.2) до простого трубопроводу довжиною l і діаметром d , який з'єднує два великі резервуари з постійними рівнями рідини.

Висловлюючи втрати на тертя по довжині і місцеві втрати напору відомими формулами, використовуючи рівняння витрати, отримаємо

$$H_n = \frac{v^2}{2g} \left(\lambda \frac{l}{d} + \Sigma \zeta \right), \quad (3.3)$$

де $\Sigma \zeta$ - сума коефіцієнтів місцевих опорів в трубопроводі.

Висловлюючи швидкість через витрати і визначаючи постійні величини, отримаємо

$$H_n = 0,0827 \frac{Q^2}{d^5} \left(\lambda \frac{l}{d} + \Sigma \zeta \right). \quad (3.4)$$

Таке ж рівняння отримаємо при досить великій відносній довжині $\frac{l}{d}$, тому що в цьому випадку можна знехтувати швидкісним напором в порівнянні з загальними втратами.

При виділенні рідини з більшого резервуара через трубопровід в атмосферу рівняння потрібного напору має вигляд

$$H_n = 0,0827 \frac{Q^2}{d^4} \left(\alpha + \lambda \frac{l}{d} + \Sigma \zeta \right). \quad (3.5)$$

3.1.2. Три основні задачі розрахунку простого трубопроводу

Задача 1

Дано: витрата рідини Q , її властивості: густина і в'язкість (ρ, ν) , розміри трубопроводу l, d , шорсткість його стінок Δ (прямо чи опосередковано), коефіцієнти місцевих опорів $\Sigma \zeta$.

Знайти: необхідний натиск H .

Порядок вирішення задачі:

1. За відомими Q, d, ν знаходиться число Рейнольдса $Re = \frac{v d}{\nu}$ і визначається режим руху рідини.

2. По знайденому числу Рейнольдса і відносній шорсткості $\bar{\Delta}$ знаходиться коефіцієнт опору λ (за графіком рис. 2.25 або емпіричними залежностями). Нагадаємо їх:

Ламінарний режим: $Re < 2320$, $\lambda = \frac{64}{Re}$, $\alpha = 2$.

Турбулентний режим: $Re > 2320$, в цьому випадку $\alpha = 1$, і якщо

$$Re \frac{\Delta}{d} < 10, \quad \lambda = \frac{0.3164}{\sqrt[4]{Re}},$$

$$10 < Re \frac{\Delta}{d} < 500, \quad \lambda = 0.11 \left(\frac{68}{Re} + \frac{\Delta}{d} \right)^{0.25},$$

$$Re \frac{\Delta}{d} > 500, \quad \lambda = 0.11 \left(\frac{\Delta}{d} \right)^{0.25}.$$

3. Знайдені величини підставляються в рівняння (3.4) або (3.5) і знаходиться необхідне значення напору.

Алгоритм розв'язання задачі першого типу можна записати в такому чином

$$Q \rightarrow v \rightarrow \text{Re} \rightarrow \alpha, \lambda, \zeta \rightarrow H.$$

Задача 2

Дано: наявний напір H_n , розміри трубопроводу l, d , шорсткість його стінок Δ і властивості рідини (ρ, ν).

Знайти: витрату Q .

Задачу другого типу можна вирішити двома способами - методом послідовних наближень і графоаналітичним способом.

Графоаналітичний спосіб вирішення більш наочний і не вимагає громіздких обчислень. Цей спосіб полягає в графічній побудові рівняння потрібного напору, тобто побудові графіку $H_n = f(Q)$.

Порядок вирішення задачі.

1. Задаємося витратою рідини Q .
2. За відомою витратою знаходимо швидкість рідини в трубі і визначаємо число Рейнольдса.
3. По знайденому числу Рейнольдса і відносній шорсткості $\bar{\Delta}$ знаходиться коефіцієнт опору λ (за графіком рис. 2.25 або емпіричним залежностям, наведеним вище).
4. Знайдені величини підставляються в рівняння (3.4) або (3.5) і знаходиться значення потрібного напору.
5. Так як графік $H_n = f(Q)$ в загальному випадку являє собою параболу, то для її побудови необхідно задатися кількома значеннями витрати Q і отримати кілька значень потрібного напору H_n .
6. За отриманими значеннями будуємо графік $H_n = f(Q)$, (рис.3.2).
7. По заданому наявному напору H_n знаходимо необхідну витрату Q .

Алгоритм розв'язання задачі другого типу можна записати таким чином

$$Q \rightarrow v \rightarrow \text{Re} \rightarrow \alpha, \lambda, \zeta \rightarrow H.$$

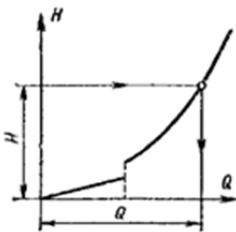


Рис. 3.2. Визначення витрати

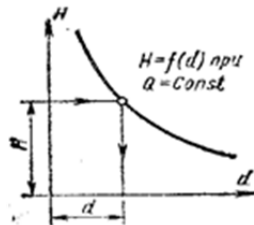


Рис. 3.3. Визначення діаметру

Задача 3

Дано: наявний напір H_n , витрати Q , довжина трубопроводу l , шорсткість його стінок Δ і властивості рідини (ρ, ν).

Знайти: діаметр трубопроводу d .

Задача так само може бути вирішена графічно, шляхом побудови залежності потрібного напору H_n від діаметра трубопроводу d при заданій витраті Q .

Порядок вирішення задачі:

1. Задаємося декількома значеннями діаметра трубопроводу d .
2. Для кожного значення діаметра визначаються величини Re , λ з урахуванням області опору, обчислюють відповідні значення напору H_n з наведених вище рівнянь зв'язку змінних.
3. Результати підрахунків наносять на графік $H = f(d)$ (рис. 3.3).
4. За відомим значенням H_n визначаємо діаметр трубопроводу d і далі уточнюємо його до найближчого більшого стандартного.

Алгоритм розв'язання задачі третього типу можна записати таким чином

$$d \rightarrow \nu \rightarrow Re \rightarrow \alpha, \lambda, \zeta \rightarrow H.$$

3.2. Розрахунок складних трубопроводів

3.2.1. Послідовне з'єднання

Візьмемо кілька труб, наприклад, 1, 2 і 3 різної довжини, різного діаметру та які містять різні місцеві опори, і з'єднаємо їх послідовно (рис. 3.4). В результаті отримаємо простий трубопровід змінного перерізу.

Очевидно, що при подачі рідини по такому трубопроводу витрати у всіх послідовно з'єднаних трубах одні і ті, а повна втрата напору між точками M і N дорівнює сумі втрат напору у всіх послідовно з'єднаних трубах, тобто маємо такі основні рівняння

$$\begin{aligned} Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q \\ \sum h = \sum h_1 + \sum h_2 + \sum h_3. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Ці рівняння визначають правило побудови характеристик послідовного з'єднання труб. Нехай дані характеристики трубопроводів 1, 2 і 3 (рис. 3.5). Щоб побудувати характеристику всього послідовного з'єднання $M - N$, слід відповідно до вираження (2.128) скласти втрати напору при однакових витратах, тобто скласти ординати всіх трьох кривих при рівних абсцисах.



Рис. 3.4. Послідовне з'єднання трубопроводів

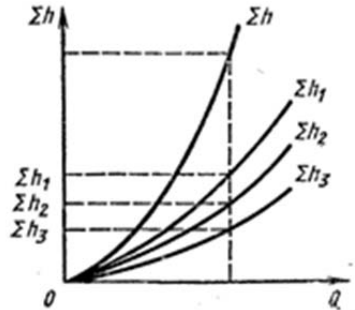


Рис. 3.5. Побудова характеристик трубопроводів при послідовному з'єднанні

3.2.2. Паралельне з'єднання

Таке з'єднання декількох простих трубопроводів (наприклад, 1, 2 і 3) між точками M і N показано на рис. 3.6. Для простоти припустимо, що трубопроводи розташовані в горизонтальній площині.

Позначимо повні напори в точках M і N відповідно через H_M і H_N , витрату в основній магістралі (тобто до розгалуження і після злиття) - через Q_Σ , а в паралельних трубопроводах через Q_1, Q_2 і Q_3 , сумарні втрати напору в цих трубопроводах через $\sum h_1, \sum h_2, \sum h_3$.

Так як точки M і N є відповідно точками розгалуження і злиття, то очевидно, що

$$Q_\Sigma = Q_1 + Q_2 + Q_3. \quad (3.7)$$

Потім виразимо втрати напору в кожному з трубопроводів через повні напори в точках M і N :

$$\begin{aligned} \sum h_1 &= H_N - H_M, \\ \sum h_2 &= H_N - H_M, \\ \sum h_3 &= H_N - H_M. \end{aligned}$$

або

$$\sum h_1 = \sum h_2 = \sum h_3, \quad (3.8)$$

тобто втрати напору в паралельних трубопроводах рівні між собою. Їх можна виразити в загальному вигляді через відповідні витрати в такий спосіб

$$\sum h_1 = 0,00827 \left(\lambda_1 \frac{l_1}{d_1} + \sum \zeta_1 \right) \frac{Q_1^2}{d_1^4},$$

$$\sum h_2 = 0,00827 \left(\lambda_2 \frac{l_2}{d_2} + \sum \zeta_2 \right) \frac{Q_2^2}{d_2^4},$$

$$\sum h_3 = 0,00827 \left(\lambda_3 \frac{l_3}{d_3} + \sum \zeta_3 \right) \frac{Q_3^2}{d_3^4}.$$

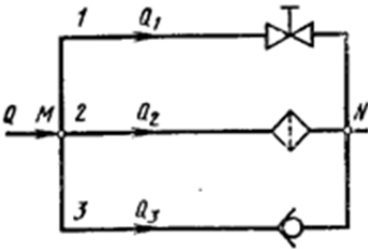


Рис. 3.6. Паралельне з'єднання трубопроводів

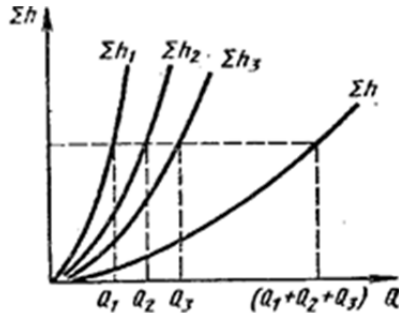


Рис. 3.7. Побудова характеристик трубопроводів при паралельному з'єднанні

Система наведених рівнянь дозволяє вирішувати, наприклад, наступну типову задачу: дані витрати в основній магістралі Q і всі розміри трубопроводів; визначити витрати в паралельних трубопроводах Q_1, Q_2 і Q_3 .

Користуючись виразами (3.7) і (3.8), можна скласти стільки рівнянь, скільки паралельних трубопроводів між точками M і N .

З рівнянь (3.7) і (3.8) витікає наступне важливе правило: для побудови характеристики паралельного з'єднання декількох трубопроводів слід скласти абсиси (витрати) характеристик цих трубопроводів при однакових ординатах ($\sum h$). Приклад такої побудови наданий на рис. 3.7.

Викладені співвідношення і правила для паралельних трубопроводів справедливі, зрозуміло, також в тому випадку, коли трубопроводи 1, 2, 3 і т. д. (рис. 3.8) не сходяться в одній точці N , а подають рідину в різні місця, але з однаковими тисками і рівними нівелірними висотами. Якщо ж остання умова не дотримується, то трубопроводи, що розглядаються, не можна вважати паралельними, а слід відносити до розряду розгалужених трубопроводів.

3.2.3. Розгалужене з'єднання

Розгалуженим з'єднанням називається сукупність кількох простих трубопроводів, які мають один спільний переріз - місце розгалуження (або змикання) труб.

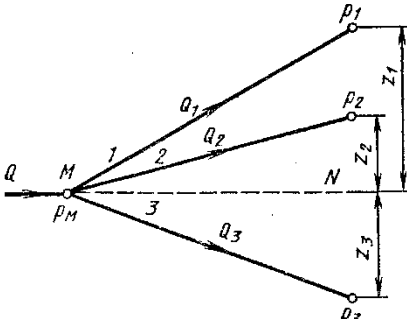


Рис. 3.8. Розгалужений трубопровід

Нехай основний трубопровід має розгалуження в перерізі $M - M$, від якого відходять, наприклад, три труби 1, 2 і 3 різних розмірів, що містять різні місцеві опори (рис. 3.8). Геометричні висоти z_1 , z_2 і z_3 кінцевих перерізів і тиску p_1 , p_2 та p_3 в них нехай будуть також різними.

Знайдемо зв'язок між тиском $p_M = \rho g H_M$ в перерізі $M - M$ і витратами Q_1, Q_2, Q_3 в трубопроводах, вважаючи напрямом течії в них заданим.

Так само як і для паралельних трубопроводів

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3.$$

Записавши рівняння Бернуллі для перерізу $M - M$ і кінцевого перерізу, наприклад першого трубопроводу, отримаємо (нехтуючи різницею швидкісних висот)

$$H_M = z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \sum h_1.$$

або

$$H_M = H_{cm} + 0,0827 \left(\lambda_1 \frac{l_1}{d_1} + \sum \zeta_1 \right) \frac{Q_1^2}{d_1^4},$$

$$\text{де } H_{cm} = z_1 + \frac{p}{\rho g}.$$

Аналогічно для двох інших трубопроводів можна записати

$$H_M = H_{cm} + 0,0827 \left(\lambda_2 \frac{l_2}{d_2} + \sum \zeta_2 \right) \frac{Q_2^2}{d_2^4}$$

$$H_M = H_{cm} + 0,0827 \left(\lambda_3 \frac{l_3}{d_3} + \sum \zeta_3 \right) \frac{Q_3^2}{d_3^4}.$$

Таким чином, отримуємо систему чотирьох рівнянь з чотирма невідомими: Q_1, Q_2, Q_3 і H_M .

Основною задачею з розрахунку розгалуженого трубопроводу є наступне: дані витрати в точці M , всі розміри гілок (включаючи геометричні висоти z), тиску в кінцевих перерізах і всі місцеві опори; визначити витрати (Q_1, Q_2, Q_3), а також потрібний натиск $H_M = H_n$. Можливі й інші варіанти постановки задачі, розв'язуваної на основі тієї ж системи рівнянь.

Побудова кривої потрібного напору для розгалуженого трубопроводу виконується складанням кривих потрібних напорів для гілок за правилом додавання характеристик паралельних трубопроводів (рис. 3.9) - складанням абсцис (Q) при однакових ординатах (H_M). Криві потрібних напорів для гілок відзначені цифрами 1, 2 і 3, а сумарна крива, тобто крива потрібного напору для всього розгалуження, позначена буквами $ABCD$. З графіка ясно, що умовою подачі рідини в усі гілки є нерівність $H_M > H_{cm}$.

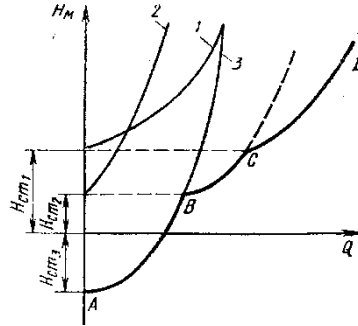


Рис. 3.9. Побудова характеристик розгалуженого трубопроводу

3.2.4. Складні трубопроводи

Складний трубопровід в загальному випадку складається з простих трубопроводів з послідовним і паралельним їх з'єднанням (рис. 3.10, а) або з розгалуженнями (рис. 3.10, б).

Розглянемо розімкнутий складний трубопровід з розгалуженнями і з роздачою рідини в кінцевих перерізах (точках) гілок. Магістральний трубопровід розгалужується в точках A і C . Рідина подається до точок (перерізах) B, D і E з витратами Q_B, Q_D і Q_E .

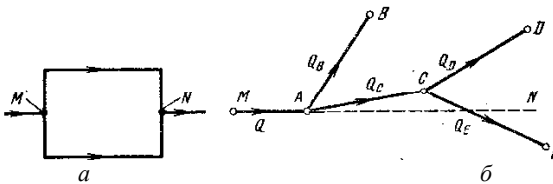


Рис. 3.10. Схеми складних трубопроводів

а – з послідовним та паралельним з'єднанням, б – з розгалуженим з'єднанням

Розміри магістралі і всіх гілок (простих трубопроводів) відомі, задані всі величини місцевих опорів, а також геометричні висоти кінцевих точок, відлічувані від площини $M-N$ і надлишковий тиск в кінцевих точках P_B , P_D і P_E . При таких умовах можуть бути вирішені два основних завдання, що розглянуті раніше, тобто при заданих магістральних витратах визначити витрати в кожній із гілок і необхідний потрібний напір, а також при заданому наявному напорі визначити магістральні (сумарні) витрати і витрати в кожній гілці.

Розрахунок складних трубопроводів часто виконують графоаналітичним способом, тобто із застосуванням кривих потрібного напору або характеристик трубопроводів. Криву потрібного напору H_n для всього складного трубопроводу можна побудувати наступним чином:

- 1) складний трубопровід розбити на ряд простих;
- 2) побудувати криві потрібних напорів для кожного з простих трубопроводів, причому для гілок з кінцевої роздачою - з урахуванням H_{cm} , а для проміжних ділянок (наприклад, AC і MA) - без урахування H_{cm} ;
- 3) скласти криві потрібних напорів для гілок (і паралельних ліній, якщо вони є) за правилом додавання характеристик паралельних трубопроводів;
- 4) отриману криву скласти з характеристикою послідовно приєднаного трубопроводу за відповідним правилом (див. п. 3.2.1) і т.д.

Таким чином, при розрахунку потрібно йти від кінцевих точок складного трубопроводу до початкової його точці, тобто проти течії рідини.

Керуючись цим правилом, можна побудувати криву потрібного напору для будь-якого складного трубопроводу, як при ламінарному, так і при турбулентному режимі течії.

Виконавши описану побудову і отримавши графік $H_n = f(Q)$, можна з його допомогою вирішувати розглянуті вище завдання 1 і 2 в різних варіантах.

Відзначимо, що в даний час є велика кількість комп'ютерних програм для розрахунку трубопроводів. Однак, автори вважають що, по найменш, попередні розрахунки повинні виконуватися викладеними вище методами. Це дає студенту можливість зрозуміти фізичні основи розрахунку.

3.2.5. Контрольні питання

1. Класифікація трубопроводів.
2. Перерахуйте три основні задачі розрахунку трубопроводів.
3. Поясніть методики розрахунку різних трубопровідних схем.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Альтшуль А.Д. Гидравлика и аэродинамика. – М.: Стройиздат, 1987. – 414 с.
2. Башта Т.М. и др. Гидравлика, гидромашины и гидроприводы: учебник для машиностроительных вузов. – М.: Машиностроение, 1982. – 423 с.
3. Емцев Б.Т. Техническая гидромеханика: учебник для вузов по специальности «Гидравлические машины и средства автоматики». – М.: Машиностроение, 1987. – 440 с.
4. Коваленко А.А. Гидравлические и аэродинамические машины. – Луганск: Дон-ГАСА, 2000. – 72с.
5. Коваленко А.А., Соколов В.И., Дымнич А.Х., Уваров П.Е. Основы технической механики жидкостей и газов: Учебное пособие. – Луганск: ВУГУ, 1998. – 272 с.
6. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1987. – 840 с.
7. Мандрус В.І., Лещій Н.П., Звягін В.М. Машинобудівна гідроліка. Задачі та приклади розрахунків. – Львів: Світ, 1995. – 264 с.
8. Повх И.Л. Техническая гидромеханика. – М.: Машиностроение, 1976. – 502 с.
9. Попов Д.Н. Гидромеханика: Учебник для вузов 2-е изд., стер. / Д.Н. Попов, С.С. Панайотти, М.В. Рябинин. – М.: МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2002. – 384 с.
10. Идельчик И. Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям / И. Е. Идельчик. – М.: Машиностроение, 1992. – 671 с.

Навчальне видання

**СОКОЛОВ Володимир Ілліч
КРОЛЬ Олег Соломонович
ЄПФАНОВА Ольга Вікторівна**

ГІДРАВЛІКА

Редактор	Лорія М.Г.
Оригінал-макет	Могильна О.В.

Підписано до друку 09.03.2017.
Формат 60х84 ¹/₁₆. Папір типогр. Гарнітура Times.
Друк офсетний. Умов. друк. арк. 9,3. Обл.-вид. арк. 10,6.
Тираж 100 екз. Вид. № 3098. Замов. № . Ціна договірна.

**Видавництво Східноукраїнського національного університету
імені Володимира Даля**

Свідоцтво про реєстрацію: серія ДК № 1620 від 18.12.03 р.
Адреса університету: просп. Радянський 59-А
м. Северодонецьк, 93400, Україна
e-mail: vidavnictvoSNU.ua@gmail.com.

Надруковано у типографії Мадрид, ООО

Свідоцтво про реєстрацію: ДК № 4399 від 27.08.2012.
Адреса типографії: вул. Ольминського, 11,
м. Харків, 61024, Україна
e-mail: : info@madrid.in.ua