

Фідровська Н. М., Писарцов О. С.

КОНАКТНІ НАПРУЖЕННЯ В ЗОНІ ВЗАЄМОДІЇ МІЖ КАНАТОМ І БАРАБАНОМ

У статті розглядається контакт двох пружних тіл, а саме контактні напруження в зоні взаємодії каната і барабана. Приведені формули для розрахунків цих напружень, а також за допомогою програми MathCad отримані графіки їх розповсюдження.

Ключові слова: напруження, тертя, переміщення, зона взаємодії, деформація, тиск, контактна задача.

1. **Актуальність.** Механіка контактної взаємодії являється актуальною областю механіки деформованого твердого тіла. Її розвиток стимулюється проблемами машинобудування, видобувної та переробної галузей промисловості, але в першу чергу питаннями трибології.

2. **Постановка задачі.** Задача міцності матеріалу в умовах контактних напружень з часом набуває все більшого значення. Це пояснюється з одного боку значним розповсюдженням видів деталей, міцність яких в значній мірі визначається контактними напруженнями (зубчасті колеса, підшипники, ходові колеса і таке інше), з другого – тим фактом, що сучасні знання законів міцності матеріалу дозволяють підійти до вирішення цієї проблеми більш обґрунтовано.

Взаємний контактний тиск викликає тангенційне переміщення на поверхні, що викликає проковзування, величина якого залежить від коефіцієнту тертя.

Якщо має місце проковзування, дотичне зусилля q пов'язане з нормальним тиском p співвідношенням $|q| = \mu p$, де μ - постійний коефіцієнт тертя.

Напрямок зусилля q протилежний напрямку сковзання. Напруження і деформації в довільній точці, зумовлені зусиллями зсуву, пропорційні розміру області контакту. Підвищення навантаження і збільшення розмірів області контакту викликає в точках обох поверхонь, які попередньо знаходилися поза зоною зціплення, різні тангенційні переміщення. Ці точки будуть зберігати відносне тангенційне зміщення $(u_{k_1} - u_{k_2})$ і відносну деформацію $(\partial u_{k_1} \setminus \partial_k - \partial u_{k_2} \setminus \partial_k)$, яку вони мали до цього.

Більшість поверхонь циліндричних, конічних на невеликій ділянці можуть бути апроксимовані таким чином, що для поверхонь, які стикаються, можна прийняти

$$z_1 = A_1 x^2 + B_1 xy + C_1 y^2; \quad z_2 = A_2 x^2 + B_2 xy + C_2 y^2. \quad (1)$$

Таким чином ми приходимо до випадку Герца [1].

Відстань точок поверхонь, які відповідають одним і тим же значенням координат x і y будуть:

$$z_1 + z_2 = \frac{1}{2}(A_1 + A_2)x^2 + \frac{1}{2}(B_1 + B_2)xy + \frac{1}{2}(C_1 + C_2)y^2. \quad (2)$$

Можна вибрати таку систему координат, для якої рівняння (1) приймає вигляд: $z_1 + z_2 = Ax^2 + By^2$. (3)

Коефіцієнти A і B визначають рішенням системи рівнянь

$$\begin{cases} 2(A + B) = K_{11} + K_{12} + K_{21} + K_{22}; \\ 2(A - B) = (K_{11} - K_{12})\cos 2\omega_1 + (K_{21} - K_{22})\cos 2\omega_2; \\ (K_{11} - K_{12})\sin 2\omega_1 + (K_{21} - K_{22})\sin 2\omega_2. \end{cases} \quad (4)$$

де: K_{11}, K_{12} – кривизни головних паралельних перерізів першої поверхні;

K_{21}, K_{22} – кривизни головних паралельних перерізів другої поверхні;

ω_1 - кут між площиною XZ і площиною кривизни $K_{11} Z_1$;

ω_2 – кут між площиною XZ і площиною кривизни $K_{21} Z$.

Якщо через ω позначити кут, який утворений площинами ZK_{11} і ZK_{21} , то

$$\omega_2 = \omega + \omega_1. \quad (5)$$

Тоді невідомий кут ω_1 можна визначити з формули:

$$\operatorname{tg} 2\omega_1 = \frac{-(K_{21} - K_{22}) \sin 2\omega}{K_{11} - K_{21} + (K_{21} - K_{22}) \cos 2\omega}. \quad (6)$$

3. **Основний матеріал.** При контакті двох пружних тіл, з яких хоч би одна має криволінійну поверхню, можна припустити, що при нормальному навантаженні буде відбуватись «вилощування» кривизни, тобто радіус кривизни збільшується (рис.1).

Тоді т. А, яка має координати x_1, z_1 переміститься в т. А з координатами x'_1, z'_1 . Так як дуга ОА дорівнює дузі ОА' одержимо [2]:

$$r_1 \phi_1 = r'_1 \phi'_1; \quad (7)$$

$$x_1 = r_1 \sin \phi_1;$$

$$x'_1 = r'_1 \sin \phi'_1; \quad (8)$$

$$z_1 = r_1 - r_1 \cos \phi_1 = r_1 (1 - \cos \phi_1);$$

$$z'_1 = r'_1 (1 - \cos \phi'_1). \quad (9)$$

Як бачимо з цих розрахунків, точка має не тільки вертикальні переміщення по осі z'_1 як раніше приймалось багатьма авторами, але й горизонтальні. Ці переміщення будуть максимальними по краям площини контакту, а в центрі вони дорівнюють нулю.

Знайдемо переміщення по осі z

$$w_1 = z_1 - z'_1 = r_1 (1 - \cos \phi_1) - r'_1 (1 - \cos \phi'_1). \quad (10)$$

Із формул, отриманих М.Губером для складових напружень, отримаємо:

$$r'_1 = \frac{r_1 \phi_1}{\phi'_1}. \quad (11)$$

Підставляючи цей вираз в рівняння (10) одержимо

$$w_1 = r_1 \left[(1 - \cos \phi_1) - \frac{\phi_1}{\phi'_1} (1 - \cos \phi'_1) \right]. \quad (12)$$

Аналогічно отримаємо переміщення другого тіла

$$w_2 = r_2 \left[(1 - \cos \phi_2) - \frac{\phi_2}{\phi'_2} (1 - \cos \phi'_2) \right]. \quad (13)$$

Переміщення по осі X для першого тіла

$$u_1 = x_1 - x'_1 = r_1 \left(\sin \phi_1 - \frac{\phi_1}{\phi'_1} \sin \phi'_1 \right). \quad (14)$$

Для другого тіла

$$u_2 = x_2 - x'_2 = r_2 \left(\sin \phi_2 - \frac{\phi_2}{\phi'_2} \sin \phi'_2 \right). \quad (15)$$

Для просторового тіла в площині уOz поперечні переміщення будуть дорівнювати

$$y_1 = R_1 \sin \beta_1; \quad y'_1 = R_2 \sin \beta'_1. \quad (16)$$

де R – радіус кривизни поверхні тіла в площині уOz.

Тоді переміщення поверхні тіла по осі у

$$v_1 = y_1 - y'_1 = R_1 \left(\sin \beta_1 - \frac{\beta_1}{\beta'_1} \sin \beta'_1 \right); \quad v_2 = y_2 - y'_2 = R_2 \left(\sin \beta_2 - \frac{\beta_2}{\beta'_2} \sin \beta'_2 \right). \quad (17)$$

Зближення тіл буде дорівнювати

$$\alpha = z'_1 - z_1 + z'_2 - z_2 = r_1 \left[\frac{\phi_1}{\phi'_1} (1 - \cos \phi'_1) - (1 - \cos \phi_1) \right] + \left[\frac{\phi_2}{\phi'_2} (1 - \cos \phi'_2) - (1 - \cos \phi_2) \right]. \quad (18)$$

Розглянемо контактні напруження в зоні взаємодії каната і барабана.

У випадку, якщо контакт виникає між канатом і канавкою барабана (рис.2) будемо мати:

$$K_{11} = r_b ; K_{12} = R ; K_{21} = r_k ; K_{22} = R.$$

$\gamma = 0$; $\gamma_1 = \gamma_2$ – кут девіації намотки каната, тоді

$$\begin{cases} 2(A + B) = \frac{1}{r_b} + \frac{1}{R} + \frac{1}{r_k} + \frac{1}{R} ; \\ 2(A + B) = \left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{R}\right) \cos \gamma_1 + \left(\frac{1}{r_k} - \frac{1}{R}\right) \cos \gamma_1 . \end{cases} \quad (19)$$

або

$$A = \frac{1}{2R} (1 - \cos 2\gamma_1) + \frac{1}{4r_b} (1 + \cos 2\gamma_1) + \frac{1}{4r_k} (1 + \cos 2\gamma_1); \quad (20)$$

$$B = \frac{1}{2R} (1 + \cos 2\gamma_1) + \frac{1}{4r_b} (1 - \cos 2\gamma_1) + \frac{1}{4r_k} (1 - \cos 2\gamma_1). \quad (21)$$

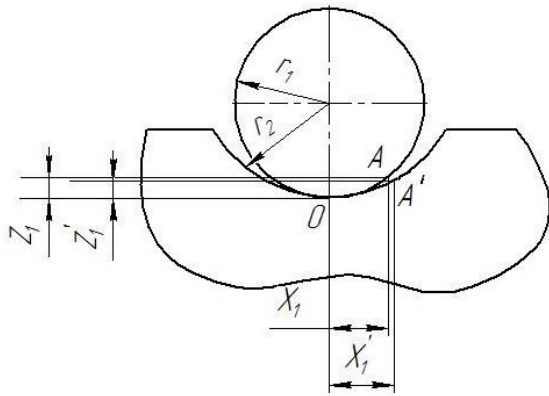


Рис. 1 – Схема контакту канату і барабана.

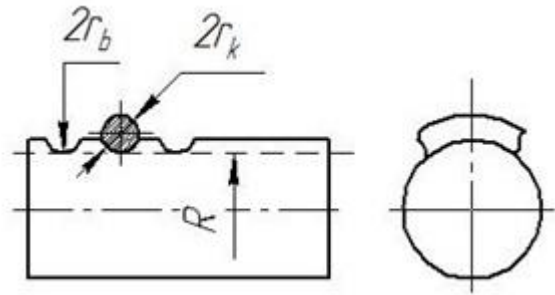


Рис.2 – Контакт між канатом і канавкою барабана

Якщо враховувати дуже мале значення

кута девіації ($\gamma \leq 3^\circ$) і співвідношення $\frac{R}{r_k} = 18 \dots 20$, то отримаємо:

$$\begin{cases} z_1 = \frac{1}{2r_k} x^2 + \frac{1}{R} y^2; \\ z_2 = \frac{1}{r_b} x^2 + \frac{1}{R} y^2. \end{cases} \quad (22)$$

Так як посередині поверхні тиску для кожної пари відповідних точок

$z_1 + z_2 + \omega_1 + \omega_2 = a$, то отримаємо

$$w_1 + w_2 = r_k (1 - \cos \phi_1) - 2r_b \left(1 - \cos \frac{r_k}{r_b}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_k}\right) x^2 - \frac{2}{R} y^2. \quad (23)$$

Враховуючи те, що поверхня канату при тиску займає точки поверхні канавки барабана, можна прийняти, що

$$\omega_1 = \omega_2$$

$$\text{Тоді } w_1 = \frac{r_k}{2}(1 - \cos \phi_1) - \frac{r_b}{2} \left(1 - \cos \frac{r_k}{r_b} \phi_1 \right) - \frac{x^2}{4} \left(\frac{1}{r_k} + \frac{1}{r_b} \right) - \frac{1}{R} y^2. \quad (24)$$

Запишемо рівняння пружної рівноваги

$$\begin{cases} \Delta^2 u + \frac{1}{1-2\lambda} \frac{\partial \Delta}{\partial x} = 0; \\ \Delta^2 v + \frac{1}{1-2\lambda} \frac{\partial \Delta}{\partial y} = 0; \\ \Delta^2 w + \frac{1}{1-2\lambda} \frac{\partial \Delta}{\partial z} = 0. \end{cases} \quad (25)$$

де u, v, w – проєкції переміщень на координатні осі x, y, z .

E – модуль пружності; G – модуль зсуву; λ – постійна Пуассона; $\Delta^2 u, \Delta^2 v, \Delta^2 w$ – операції Лапласа. Підставляючи вирази деформації u і v з формул (12) і (14) в систему рівнянь (26) отримаємо:

$$v = (1 - 2\lambda) y \left[\frac{1}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_k} + \frac{1}{r_b} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{z}{r_k(1 - \cos \phi_1)} - 1 \right) \right]. \quad (26)$$

Визначаємо дотичні напруження на поверхні тіла

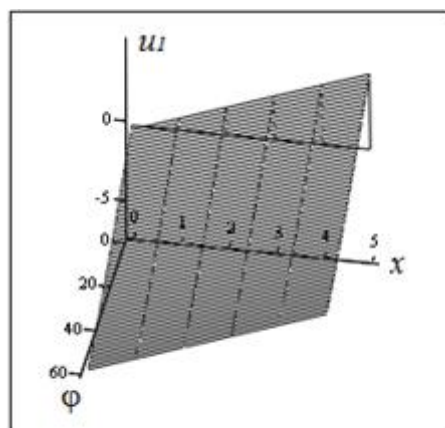
$$X = G \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) = Gx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_k} + \frac{1}{r_b} \right) + \frac{1}{r_k(1 - \cos \phi)} \right]; \quad (27)$$

$$Y = G \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = Gy \left[\frac{1}{R} + \frac{1 - 2\lambda}{2r_k(1 - \cos \phi)} \right]. \quad (28)$$

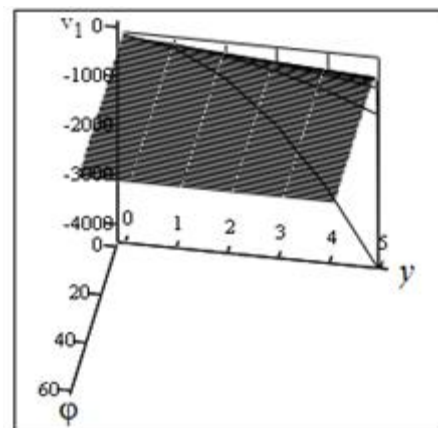
Нормальні напруження визначаємо по формулі

$$Z = 2G \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\lambda}{1 - 2\lambda} \Delta \right) = 2G \left[\frac{1}{2} \left(\frac{x}{r_k \sin \phi} - 1 \right) + \lambda \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{2r_k} + \frac{1}{2r_b} \right) \right]. \quad (29)$$

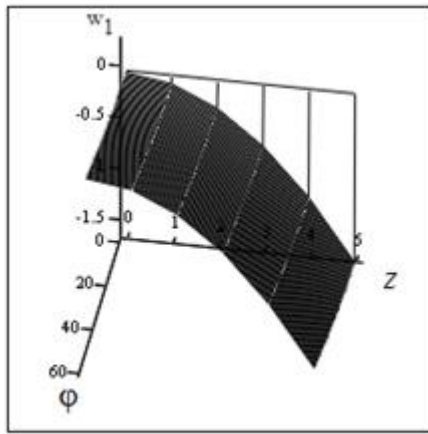
За допомогою програми MathCad були отримані графіки переміщень u_1, v_1, w_1 , та дотичних напружень X, Y, Z , для радіусу каната 7,75мм, радіусу канавки барабана 9 мм, та кута 60° :



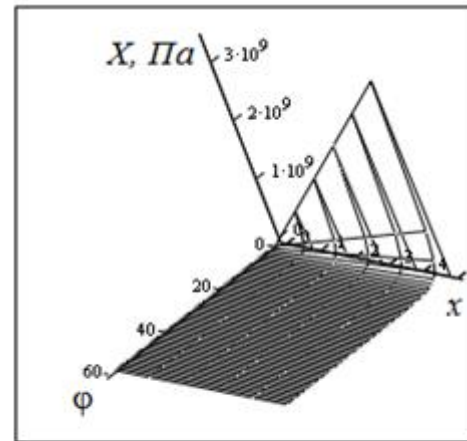
u_1 А



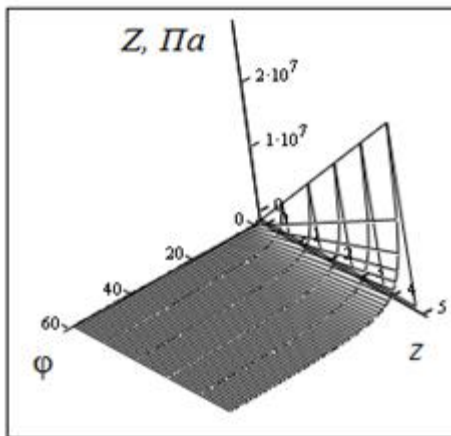
v_1 Б



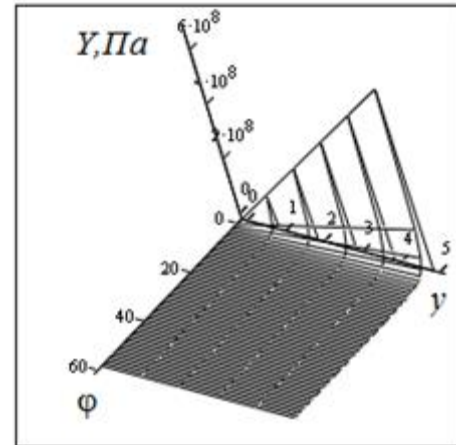
w_1 В



X Г



Z Д



Y Е

Графіки А, Б, В – графіки переміщень; Г, Д, Е – графіки напружень.

Висновки:

Такий підхід до рішення контактної задачі пояснює багато питань. Як показала практика, дотичні напруження збільшуються при віддаленості від центру дотику і найбільші значення вони мають по межі областей контакту, а в центрі контакту, тобто при $x = 0$, $y = 0$ вони дорівнюють нулю. Крім цього, найбільші дотичні напруження знаходяться на глибині, тобто в тих точках, де проходить максимальне зміщення матеріалу в результаті зміни радіуса кривизни поверхні тіла, яке знаходиться в контакті.

Виникнення тріщин на глибині тіла також можна пояснити тим, що є граничний шар, який розділяє серцевину тіла з практично незмінною структурою і поверхневого шару з поперечним тиском і повздовжнім зсувом. Якщо напруження зсуву поверхневих шарів, які залежать від властивостей матеріалу, рівня напруженого стану та інших факторів, достатньо великі, то тріщини можуть виникати на поверхні тіла, яке стискається, і розповсюджуються всередину.

Література

1. Hertz H Uber die Berührung fester elastischer Körper, Journ. für reine und angewandte Math., Bd.92,1882. Gesammelte Werke. Bd, Leipzig 1895.
2. Фидровская Н.Н. К вопросу о контактных напряжениях упругих тел.// Науковий вісник будівництва.–№40.– Харків.–ХДТУБА – с. 45-47.

В статті розглядається контакт двох пружних тіл, а саме контактні напруження в зоні взаємодії каната і барабана. Приведені формули для розрахунків цих напружень, а також з допомогою програми Mathcad отримані графіки їх розповсюдження.

Ключеві слова: напруження, тертя, переміщення, зона взаємодії, деформація, тиск, контактна задача.

The contact of two resilient bodies is examined in the article, namely contact tensions are in the area of co-operation of rope and drum. Resulted formulas for the calculations of these tensions, and also by the program Mathcad the charts of their distribution are got.

Keywords: tension, friction, moving, area of co-operation, deformation, pressure, contact task.