

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
СХІДНОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені ВОЛОДИМИРА ДАЛЯ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

з дисципліни

«КОМП'ЮТЕРНА МАТЕМАТИКА»

*(для здобувачів вищої освіти спеціальності 141 «Електроенергетика,
електротехніка і електромеханіка»)*

(електронне видання)

ЗАТВЕРДЖЕНО

на засіданні кафедри

Комп'ютерно – інтегрованих

систем управління

Протокол 9 № від 19.03.2025 р

Київ, 2025р.

УДК 621.311

Конспект лекцій з дисципліни «Комп'ютерна математика» (для здобувачів вищої освіти спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка і електромеханіка») (електронне видання) / Уклад. Ж.Г. Самойлова.-Київ: вид-во- СНУ ім.В. Даля, 2025. – 97 с.

В курсі лекцій з дисципліни «Комп'ютерна математика» розглянуто основні питання математики, які застосовуються для опрацювання математичних моделей різних систем, процесів і явищ при розв'язуванні теоретичних і практичних задач у професійній діяльності, а також при дослідженні закономірностей, яким підпорядковуються реальні процеси в сфері електрики. Конспект лекцій може бути використаний студентами при підготовці к заняттям.

Укладач: Ж.Г. Самойлова, доц.

Відповідальний за випуск: Ж.Г. Самойлова, доц.

Рецензент: М.Г. Лорія, д.т.н., проф.

Зміст

| №п/п | Назва розділів | Стор. |
|------|---|-------|
| | Вступ | 5 |
| 1 | Основні поняття теорії множин | 7 |
| 2 | Способи завдання множин | 9 |
| 3 | Операції над множинами | 11 |
| 4 | Алгебра множин | 16 |
| 5 | Принцип двоїстості для алгебри множин | 19 |
| 6 | Вектори і прямиий добуток | 20 |
| 7 | Прямиий добуток множин | 22 |
| 8 | Проекція множин | 23 |
| 9 | Відповідності і відображення | 24 |
| 10 | Обернена відповідність | 26 |
| 11 | Композиція відповідностей | 27 |
| 12 | Відображення | 27 |
| 13 | Логічні операції і функції. Числення висловлювань | 31 |
| 13.1 | Висловлювання | 31 |
| 13.2 | Операції над висловлюваннями | 32 |
| 13.3 | Логічні функції. | 34 |
| 14 | Закони алгебри логіки | 38 |
| 15 | Перетворення елементарних функцій | 39 |
| 16 | Порядок виконання логічних операцій | 42 |
| 17 | Суперпозиція логічних функцій | 42 |
| 18 | Булева алгебра | 44 |
| 18.1 | Основні формули булевої алгебри | 44 |
| 18.2 | Спеціальні формули булевої алгебри | 45 |
| 19 | Булеві логічні елементи | 46 |
| 19.1 | Інвертор | 46 |

| | | |
|------|--|----|
| 19.2 | Кон'юнктор | 48 |
| 19.3 | Реалізація схеми I на основі правила де Моргана | 50 |
| 19.4 | Диз'юнктор | 51 |
| 19.5 | Реалізація схеми АБО на основі правила де Моргана | 52 |
| 20 | Загальна характеристик комбінаторних задач | 54 |
| 20.1 | Основні положення | 54 |
| 20.2 | Комбінаторні задачі | 55 |
| 20.3 | Правило Суми. | 56 |
| 20.4 | Правило Добутку | 61 |
| 21 | Елементарні комбінаторні конфігурації | 58 |
| 21.1 | Сполучення | 58 |
| 21.2 | Розміщення | 58 |
| 21.3 | Кількість розміщень | 59 |
| 21.4 | Кількість сполучень | 61 |
| 22 | Властивості біноміальних коефіцієнтів | 62 |
| 22.1 | Властивість симетрії | 62 |
| 22.2 | Властивості додавання | 62 |
| 22.3 | Властивості винесення за дужки | 65 |
| 23 | Теорія графів. | 67 |
| 23.1 | Первісні поняття теорії графів | 67 |
| 23.2 | Операції над графами. Способи завдання графів | 74 |
| 23.3 | Способи завдання графів | 79 |
| 24 | Маршрути, ланцюги, цикли й інші характеристики графа | 82 |
| 25 | Алгебраїчна форма подання графа | 87 |
| | Література | 95 |

Вступ

Обмін інформацією в системах комп'ютерного опрацювання інформації здійснюється за допомогою сигналів, якими можуть бути будь-які фізичні величини – струм, напруга, магнітні стани, світлові хвилі.

Фізичні величини являють собою функції часу або певний розподіл сигналів у просторі. Параметри часових функцій, що передаються, – таких як частота, амплітуда, фаза, тривалість імпульсів або просторовий розподіл сигналів, послідовність імпульсів, точок на зображенні, поєднання кольорів на екрані і т.п., – називають інформаційними параметрами сигналів.

Розрізняють такі види сигналів:

1. Аналоговий або безперервний

Його параметри всередині заданого діапазону можуть набувати будь яких значень у довільний момент часу. Ці параметри є інформаційними. Оскільки вони передають інформацію про стан об'єкта. Який вони відображають.

2. Дискретний сигнал

Параметри такого сигналу можуть набувати лише певних значень у дискретні моменти часу. При цьому важливим є не рівень сигналу, а його наявність. Це призводить до того, що перешкодам досить важко спотворити сигнал, оскільки стан сигналу залишається незмінним при різних його рівнях і формі. І лише тоді, коли зміни сигналу досягнуть певної межі, відбувається стрибкоподібний перехід його до іншого стану.

Те що дискретні сигнали меншою мірою підлягають спотворенням під впливом перешкод призводить до того, що ці спотворення легше виявляються і виправляються. Крім того їх простіше зберігати і обробляти. Тому дискретні сигнали знаходять ширше практичне застосування, ніж неперервні.

Існують два види дискретних сигналів:

1. Дискретні сигнали, отримані способом дискретизації неперервних сигналів.
2. Дискретні сигнали, подані у вигляді кодових комбінацій – слів.

Подання у вигляді слів є найбільш універсальним і поширеним. Воно застосовується для кодування людської мови, у математиці, цифровій електроніці.

Дискретна математика – це наука про способи побудови та ефективного опрацювання послідовностей цілих об'єктів, в окремому випадку літер $a_1 a_2 a_3 \dots a_i \dots a_n$, породжуваних деяким алфавітом $V = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$, $a_i \in V$, які можна розглядати як слова.

Таким чином, більшість дискретних пристроїв здійснює обробку інформації, поданої у вигляді слів. Використання вербальної (словесної) інформації не накладає обмежень на застосування дискретних пристроїв для обробки неперервної інформації, тому що неперервна інформація може бути з будь якою точністю апроксимована дискретними сигналами, а сигнали можуть бути подані у вигляді слів.

Найчастіше використовуються дискретні пристрої, в яких вхідні та вихідні сигнали мають два різних рівня. Це пов'язано з необхідністю простоти реалізації пристроїв для обробки неперервної інформації, міркуваннями щодо надійності і економічності виконання логічних і арифметичних операцій. Одному з рівнів присвоюється літера 0, а іншому – 1, і, таким чином, з допомогою цих літер, пристрій здійснює обробку двійкової інформації – слів у алфавіті V .

З причини зазначених переваг подання інформації за допомогою слів дискретні пристрої сьогодні займають домінуюче положення в галузі обробки інформації.

Електронні обчислювальні машини (ЕОМ) спочатку були аналоговими. Сьогодні цифрові ЕОМ практично витіснили аналогові. Те ж відбувається зі звуко- та відеозаписом, приймачами, телебаченням. У найближчі роки цифрова електроніка буде продовжувати займати монополію на ринку електронних систем і пристроїв. Однак витіснити аналогову техніку цифрова в принципі не може, оскільки фізичні об'єкти, від яких цифрові ЕОМ отримують інформацію, а також об'єкти керування звичайно мають аналогову природу. Тому на вході й на виході ЕОМ потрібні аналогові, цифро – аналогові і аналого –

цифрові пристрої. Крім того, часто в найвідповідальніших місцях цифрових схем використовуються аналогові елементи.

Аналогова електроніка має також неперевершену швидкість, що обмежується швидкістю фізичних процесів, а як наслідок, незважаючи на те, що питома вага аналогової електроніки спадає, її значення зовсім не зменшується. Тому «неперервна» математика в освіті фахівця з електроніки та автоматики не втрачає свого значення, хоча роль дискретної математики при цьому постійно зростає.

Дискретна математика, крім її застосування для електронних цифрових пристроїв і систем, широко також використовується для створення та експлуатації комплексних автоматизованих систем обробки інформації, пакетів прикладних програм, баз даних, мікропроцесорних систем, мереж передачі даних.

Основною особливістю дискретної математики є відсутність граничного переходу і неперервності, притаманних класичній математиці. Дискретна математика містить теорію множин і алгебраїчних систем. Математичну логіку, теорію графів, теорію автоматів і формальних граматики, теорію алгоритмів, теорію кодування, теорію чисел, комбінаторні обчислення, дискретні екстремальні задачі.

1. Основні поняття теорії множин

Під множиною розуміють об'єднання в одне загальне об'єктів, добре визначених нашою інтуїцією або нашою думкою.

Об'єкти, які утворюють множину, називають елементами множини.

Елементи множини не повторюються. Порядок елементів у множині довільний.

Множина, що не містить жодного елемента, називається порожньою і позначається символом \emptyset .

Приналежність об'єкта t множині M позначається за допомогою символу \in : $t \in M$. Символ \in означає відношення приналежності.

Множину M' називають підмножиною множини M , якщо будь-який елемент множини M' належить множині M : $M' \subseteq M$. Символ \subseteq означає відношення нестроного включення.

Якщо $M_1 \subseteq M_2$ і $M_2 \subseteq M_1$, то множини M_1 і M_2 називаються рівними: $M_1 = M_2$. Інакше кажучи, якщо дві множини складаються з тих самих елементів, то вони рівні.

Якщо $M_1 \subseteq M_2$ і $M_1 \neq M_2$, то множина M_1 називається власною підмножиною множини M_2 : $M_1 \subset M_2$. Інакше кажучи, якщо M_2 містить і інші елементи, крім елементів з M_1 , то $M_1 \subset M_2$. Символ \subset означає відношення строгого включення.

Таким чином, відношення приналежності \in демонструє зв'язок між елементами множини і самою множиною, а відносини включення \subset, \subseteq - зв'язок між двома множинами. Нестроге включення допускає рівність двох множин.

Приклад. Дано множину $M = \{1, 2, 3, \{3\}, \{4\}\}$. Які з наступних тверджень вірні (невірні) і чому?

2. $2 \in M$ – вірно, тому що в множині M є елемент 2;
3. $\{1, 2\} \subset M$ – вірно, тому що в множині M є елементи 1 і 2, тобто $1 \in M$ і $2 \in M$;
4. $\{3\} \subset M$ – вірно, тому що в множині M є елемент 3;
5. $\{3\} \in M$ – вірно, тому що в множині M є елемент $\{3\}$;
6. $4 \in M$ – не вірно, тому що в множині M немає елемента 4, тобто $4 \notin M$;
7. $\{4\} \in M$ – вірно, тому що в множині M є елемент $\{4\}$;
8. $\{4\} \subset M$ – не вірно, тому що в множині M немає елемента 4, тобто $\{4\} \not\subset M$.

2.Способи завдання множин

Основними способами завдання множин є:

- 1) перерахування елементів: $M = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, 9\}$;
- 2) зазначення характеристичних властивостей елементів:
 $M = \{m/m - \text{ціле}, 0 \leq m \leq 9\}$;
- 3) аналітичний (операції над множинами):
 $M = (M_1 \cup M_2) \cap M_3$;
- 4) графічний (кола або діаграми Ейлера) (рисунок 1.) :

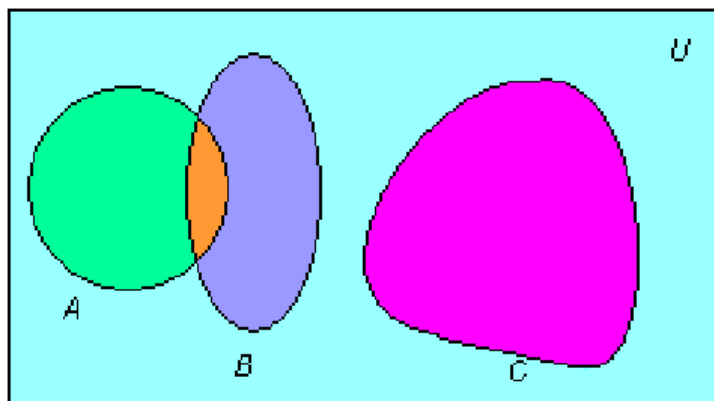


Рисунок 1. Кола або діаграми Ейлера

Множини можуть бути кінцевими (що складаються з кінцевого числа елементів) і нескінченними.

Число елементів у кінцевій множині M називається потужністю цієї множини і позначається $|M|$.

Потужність нескінченної множини буде розглянута після введення поняття відповідності.

Для кожної множини M існує множина, елементами якої є всі підмножини множини M . Таку множину називають сімейством множини M або булеаном цієї множини й позначають $B(M)$, а сама множина M – універсальним, універсумом або простором і позначають через U .

Потужність булеана від універсума U визначається по формулі

$$|B(U)| = 2^{|U|} \quad (1)$$

У загальному випадку булеан $B(U)$, де $U = \{M_1, M_2, \dots, M_n\}$, можна побудувати за наступним правилом. Першою множиною булеана буде порожня множина \emptyset , не утримуюча жодного елемента. Потім всі множини, що містять по одному елементу з U , потім всі множини, що містять по два елемента з U , потім по три елемента й т.д., і, нарешті, множина, що містить всі елементи U .

Приклад. Побудувати булеан $B(U)$ від універсума $U = \{x, y, z\}$ і визначити його потужність.

Відповідно до наведеного правила побудови булеана будемо мати

$$B(U) = \{ \emptyset, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, \{x, y, z\} \}. \quad (2)$$

Для визначення потужності булеана $B(U)$ знайдемо потужність універсума U :

$$|U| = |\{x, y, z\}| = 3 \quad (3)$$

Тоді

$$|B(U)| = 2^{|U|} = 2^3 = 8 \quad (4)$$

Порожня множина й сама множина є невласними підмножинами множини M , а інші підмножини – власні.

3. Операції над множинами

1. Об'єднанням $M_1 \cup M_2$ двох множин M_1 і M_2 є множина M , що складається з елементів, які належать хоча б одному із множин M_1, M_2 :

$$M = M_1 \cup M_2 = \{m/m \in M_1 \text{ или } m \in M_2\} \quad (5)$$

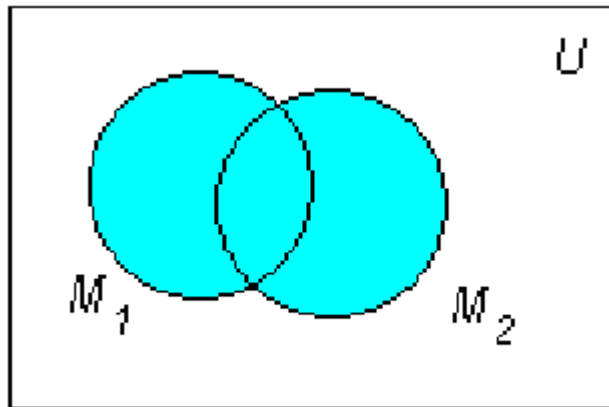
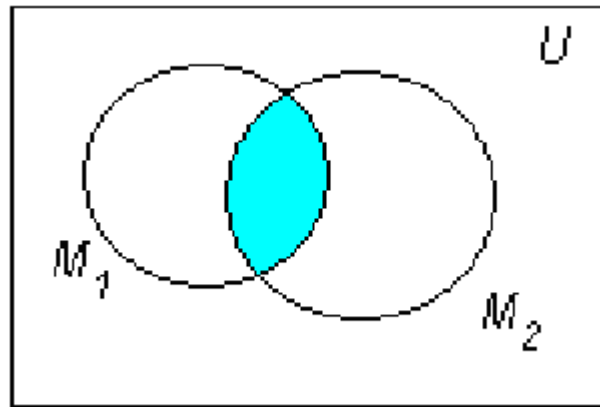


Рисунок 2. $M_1 \cup M_2$

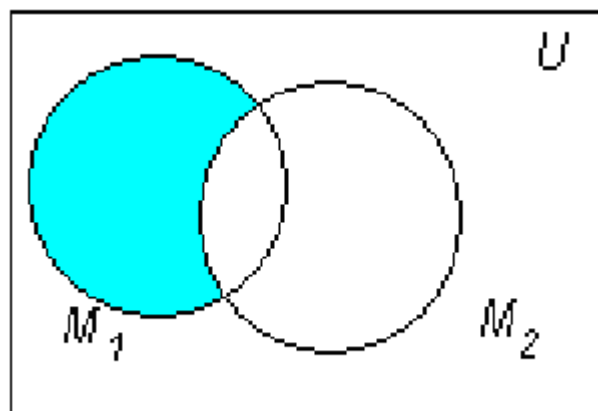
Перетинанням $M_1 \cap M_2$ двох множин M_1 і M_2 є множина M , що складається з елементів, які належать як множині M_1 , так і множині M_2 :

$$M = M_1 \cap M_2 = \{m/m \in M_1 \text{ и } m \in M_2\} \quad (6)$$

Рисунок 3. $M_1 \cap M_2$

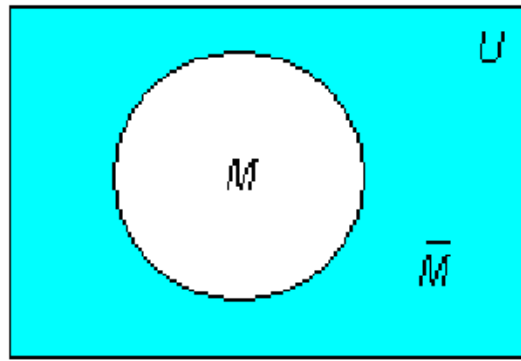
3. Різницею $M_1 \setminus M_2$ множин M_1 і M_2 є множина M , що складається з елементів, що належать множині M_1 і не належать множині M_2 :

$$M = M_1 \setminus M_2 = \{m/m \in M_1 \text{ и } m \notin M_2\} \quad (7)$$

Рисунок 4. $M_1 \setminus M_2$

4. Доповненням \bar{M} множини M (до універсума U) називають множину, обумовлену зі співвідношення $\bar{M} = U \setminus M$. Іншими словами

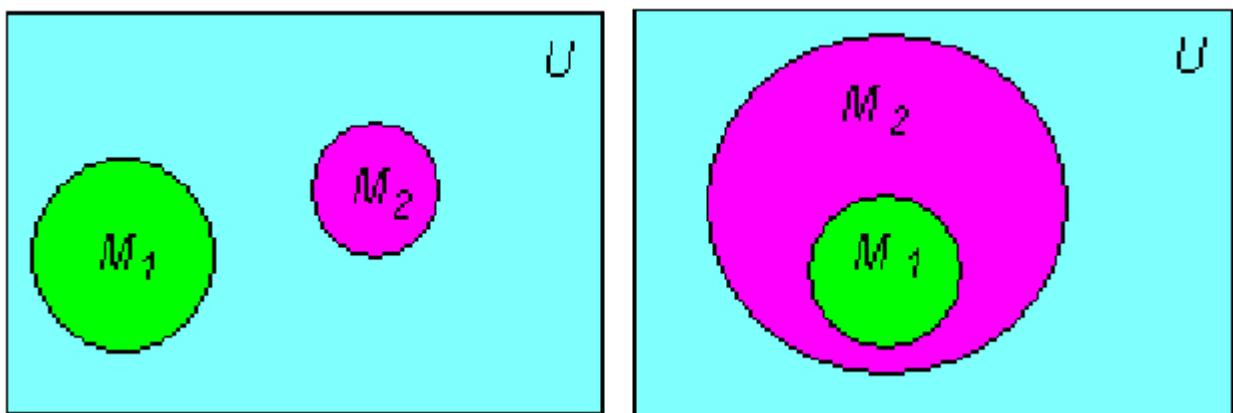
$$\bar{M} = \{m/m \in U \text{ и } m \notin M\} \quad (8)$$

Рисунок 5. \bar{M}

Операції об'єднання і перетинання множин можна узагальнити на кінцеве і нескінченне число множин. Використовуючи зазначені операції, можна виражати одні множини через інші, при цьому спочатку виконується операція доповнення, потім перетинання й тільки потім операція об'єднання (різниці). Для зміни цього порядку у виразі використовують дужки. Наприклад,

$$M = M(M_1, M_2, M_3) = M_1 \cup M_2 \cap (M_3 \setminus M_1) \cup \bar{M}_2 \quad (9)$$

Для наочності на рисунку 6 зображені за допомогою кіл Ейлера непересічні множини і включення множини :



а)

б)

Рисунок 6. а). $M_1 \cap M_2 = \emptyset$; б). $M_1 \subset M_2$

Кортежем (упорядкованою множиною) називають сукупність елементів, у якій кожний елемент займає визначене місце.

Число елементів кортежу називають його довжиною.

Наприклад, $a = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ є кортежем довжини n з елементами $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$.

Якщо елементи кортежу є дійсні числа, то такі кортежі називають векторами.

Наприклад, кортеж (a_1, a_2, a_3) можна розглядати, як вектор у тривимірному просторі. Тоді проєкції вектора на осі координат визначаються в такий спосіб:

$$\text{Пр}_i (a_1, a_2, a_3) = a_i, \quad i=1, 2, 3. \quad (10)$$

Можна визначити проєкції відразу на дві осі, наприклад, 1 і 2 :

$$\text{Пр}_{1,2} (a_1, a_2, a_3) = (a_1, a_2). \quad (11)$$

Якщо кортеж має вигляд $a = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$, то

$$\text{Пр}_i a = a_i, \quad i=1, 2, 3, \dots, n \quad i \quad (12)$$

$\text{Пр}_{i,j,\dots,l} a = (a_i, a_j, \dots, a_l)$, i, j, \dots, l - номери осей, причому

$$1 \leq i < j < \dots, l \leq n.$$

Прямим (декартовим) добутком $M_1 \times M_2$ множин M_1 і M_2 називають множину M вигляду

$$M = M_1 \times M_2 = \{(m_i, m_j) / m_i \in M_1 \text{ или } m_j \in M_2\} \quad (13)$$

де (m_i, m_j) – двоелементні кортежі.

Відзначимо, що в загальному випадку

$$M_1 \times M_2 \neq M_2 \times M_1. \quad (14)$$

Операцію прямого добутку можна поширити на більше число множин.

Приклад 1. Нехай

$$M_1 = \{a, b\}, M_2 = \{a, c, d\}. \quad (15)$$

Тоді

$$M = M_1 \times M_2 = \{a, b\} \times \{a, c, d\} = \{(a, a), (a, c), (a, d), (b, a), (b, c), (b, d)\} \quad (16)$$

Якщо деяка множина M складається з кортежів однакової довжини, то проекцією цієї множини на деяку вісь називають множиною проекцій кортежів із множини M на цю вісь.

Приклад 2. Визначити проекції $\text{Pr}_2 M_i$ і $\text{Pr}_{2,4} M_i$, $i=1, 2, 3$, якщо

$$M_1 = \{(1, 2, 3, 4, 5), (2, 1, 3, 5, 5), (3, 3, 3, 3, 3), (3, 2, 3, 4, 3)\}, \quad (17)$$

$$M_2 = \{(1, 2, 3, 4), (2, 1, 3, 5)\}, \quad (18)$$

$$M_3 = M_1 \cup M_2. \quad (19)$$

Спочатку визначимо проекції множин M_1 і M_2 . Відповідно до визначення проекції множини маємо:

$$\text{Pr}_2 M_1 = \{2, 1, 3\}, \quad \text{Pr}_{2,4} M_1 = \{(2, 4), (1, 5), (3, 3)\}, \quad (20)$$

$$\text{Pr}_2 M_2 = \{2, 1\}, \quad \text{Pr}_{2,4} M_2 = \{(2, 4), (1, 5)\}. \quad (21)$$

Для визначення $\text{Pr}_2 M_3$ і $\text{Pr}_{2,4} M_3$ необхідно знайти

$$M_3 = M_1 \cup M_2: \quad (22)$$

$$M_3 = M_1 \cup M_2 = \{(1, 2, 3, 4, 5), (2, 1, 3, 5, 5), (3, 3, 3, 3, 3), (3, 2, 3, 4, 3), (1, 2, 3, 4), (2, 1, 3, 5)\}. \quad (23)$$

Тому що в множині M_3 кортежі мають різні довжини, то проекцій $\text{Pr}_2 M_3$ і $\text{Pr}_{2,4} M_3$ не існує. Легко перевірити, що якщо

$$M = M_1 \times M_2, \quad (24)$$

то

$$\text{Пр}_1 M = M_1, \quad \text{Пр}_2 M = M_2 \quad (25)$$

а якщо

$$Q \subseteq M_1 \times M_2, \quad \text{те} \quad \text{Пр}_1 Q \subseteq M_1, \quad \text{Пр}_2 Q \subseteq M_2. \quad (26)$$

4. Алгебра множин

Алгебра множин являє собою сукупність тотожностей (рівностей).

Для будь яких підмножин A, B і C універсальної множини U дійсними є такі рівності:

$$1. A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C. \quad (27)$$

$$2. A \cup B = B \cup A \quad (28)$$

$$3. A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C). \quad (29)$$

$$4. A \cup \emptyset = A \quad (30)$$

$$5. A \cup \bar{A} = U; (\bar{\bar{A}} = U - A). \quad (31)$$

$$1'. A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \quad (32)$$

$$2'. A \cap B = B \cap A \quad (33)$$

$$3'. A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C). \quad (34)$$

$$4'. A \cap U = A \quad (35)$$

$$5'. A \cap \bar{A} = \emptyset \quad (36)$$

Кожну з наведених рівностей можна довести, показавши, що множина, яка стоїть з одного боку від знака рівності, включена до множини, що стоїть з іншого боку від цього знака рівності.

Доведемо рівність 3. Доведення складається з двох частин:

1. Нехай

$$x \in A \cup (B \cap C). \quad (37)$$

Тоді

$$x \in A \text{ або } x \in B \cap C. \quad (38)$$

Якщо

$$x \in A, \text{ то } x \in A \cup B \text{ і } x \in A \cup C, \quad (39)$$

і таким чином, x є елементом перетину цих множин:

$$(A \cup B) \cap (A \cup C). \quad (40)$$

Якщо

$$x \in (B \cap C), \quad (41)$$

то

$$x \in B \text{ і } x \in C. \quad (42)$$

Отже,

$$x \in A \cup B \text{ і } x \in A \cup C, \quad (43)$$

тобто і в цьому випадку x є елементом перетину цих множин:

$$(A \cup B) \cap (A \cup C). \quad (44)$$

2. Доведемо, що

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C). \quad (45)$$

Нехай

$$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C). \quad (46)$$

Тоді

$$x \in A \cup B \text{ і } x \in A \cup C. \quad (47)$$

Отже, або ж

$$x \in A, \text{ або } x \in B \text{ і } x \in C. \quad (48)$$

З цього випливає, що

$$x \in A \cup (B \cup C). \quad (49)$$

Рівності 1 і 1' називаються асоціативними законами для об'єднання і перетину, а тотожності 2 і 2' - комутативними законами для цих операцій.

Рівності 3 і 3' - це дистрибутивні закони для цих операцій.

У загальному вигляді рівності 3 і 3' можна подати в такий спосіб:

$$A \cup (B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n) = (A \cup B_1) \cap (A \cup B_2) \cap \dots \cap (A \cup B_n), \quad (50)$$

$$A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots \cup (A \cap B_n), \quad (51)$$

Для будь яких підмножин A, B і C універсальної множини U дійсними є такі рівності:

$$1. \text{ Якщо } B \not\subseteq A \text{ і } A \cup B = A, \text{ то } B = \emptyset. \quad (52)$$

$$2. \overline{\emptyset} = U \quad (53)$$

$$3. A \cup A = A. \quad (54)$$

$$4. A \cup U = U \quad (55)$$

$$5. \underline{A \cup (A \cap B)} = A \quad (56)$$

$$6. A \cup B = A \cap B \quad (57)$$

$$7. \text{ Якщо } A \cup B = U \text{ і } A \cap B = \emptyset, \text{ то } B = \bar{A} \quad (58)$$

$$1'. \text{ Якщо } B \not\subseteq A \text{ і } A \cap B = A, \text{ то } B = \bar{U}. \quad (59)$$

$$2'. \bar{U} = \emptyset \quad (60)$$

$$3'. A \cap A = A. \quad (61)$$

$$4'. A \cap \emptyset = \emptyset \quad (62)$$

$$5'. \underline{A \cap (A \cup B)} = A \quad (63)$$

$$6'. A \cap B = A \cup \bar{B} \quad (64)$$

$$7'. \text{ Якщо } A \cap B = \emptyset \text{ і } A \cup B = U, \text{ то } B = \bar{A} \quad (65)$$

Деякі з рівностей відомі під спеціальними назвами. Так, 3 і 3' - це закони ідемпотентності; 5 і 5' - закони поглинання; 6 і 6' - закони де Моргана.

Рівність алгебри множин, отримана з іншої рівності через заміну всіх входжень \cup на \cap , \cap на \cup , \emptyset на U і U на \emptyset , називається двоїстою (дуальною) по відношенню до вихідної рівності.

5. Принцип двоїстості для алгебри множин

Для будь якого істинного твердження, що формується в термінах \cup та \cap , \emptyset та U двоїсте по відношенню до цього речення також є істинним.

З цього принципу випливає, що якщо є деяке твердження 1-7 з термінами \cup та \cap , \emptyset та U , то відповідне йому твердження зі щтрихом 1' - 7' на підставі двоїстості випливає з цього самого твердження.

Це дозволяє спрощувати різні складні вирази алгебри множин.

Узагальнення операцій над множинами

1. Об'єднання n множин:

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{j=1}^n A_j, \text{ а також } \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \text{ при } n=\infty \quad (66)$$

2. Перетин множин

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \bigcap_{j=1}^n A_j, \text{ а також } \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \text{ при } n=\infty \quad (67)$$

3. Формула де Моргана

$$\overline{\bigcup_{j=1}^n A_j} = \bigcap_{j=1}^n \bar{A}_j \quad \overline{\bigcap_{j=1}^n A_j} = \bigcup_{j=1}^n \bar{A}_j \quad (68)$$

Приклад 1.

$$\overline{A \cap \bar{B}} \cup B = \bar{A} \cup B \cup B = \bar{A} \cup B \quad (69)$$

Приклад 2.

$$\begin{aligned} (A \cap B \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C) \cup \bar{B} \cup \bar{C} &= [(A \cup \bar{A}) \cap B \cap C] \cup \bar{B} \cup \bar{C} = \\ &= [(A \cup \bar{A}) \cap B \cap C] \cup \bar{B} \cup \bar{C} = (U \cap B \cap C) \cup \overline{B \cap C} = (B \cap C) \cup \overline{(B \cap C)} = U \end{aligned} \quad (70)$$

Приклад 3.

$$\begin{aligned} (A \cap B \cap C \cap \bar{X}) \cup (\bar{A} \cap C) \cup (\bar{B} \cup C) \cup (C \cap X) &= \\ &= (A \cap B \cap C \cap \bar{X}) \cup [(\bar{A} \cup \bar{B} \cup X) \cap C] = \\ &= [A \cap B \cap \bar{X} \cup \overline{\bar{A} \cap \bar{B}}] \cap C = U \cap C = C \end{aligned} \quad (71)$$

Приклад 4.

Довести тотожність

$$A \cup A = A \quad (72)$$

$$A \cup A = (A \cup A) \cap U = (A \cup A) \cap (A \cup \bar{A}) = A \cup (A \cap \bar{A}) = A \cup \emptyset = A \quad (73)$$

6. Вектори і прямий добуток

Вектор (кортеж) – це упорядкований набір елементів. Елементи, що утворюють вектор, називаються координатами, коефіцієнтами або компонентами вектора. Координати нумеруються зліва направо. Число координат називається довжиною, або розмірністю вектора. Координати вектора можуть збігатися. Вектор береться в круглі дужки, наприклад (0,5,4,5)

Вектори довжини 2 називаються упорядкованими парами, довжини 3 – трійками, довжини n- енками.

Два вектори рівні, якщо вони мають однакову довжину і відповідні їм коефіцієнти також рівні, тобто вектори (a_1, a_2, \dots, a_m) і (b_1, b_2, \dots, b_n) рівні, якщо $m=n$ і $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_m = b_n$.

Вектор (a_1, a_2) може розглядатись як точка на площині або як вектор, проведений від початку координат до даної точки (рис.7.)

Відповідно до цього вектор (a_1, a_2, a_3) розглядається як точка в тривимірному просторі (рис.8)

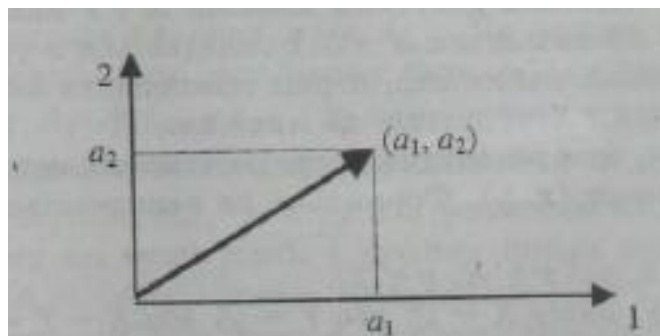


Рисунок 7. Завдання вектора на площині

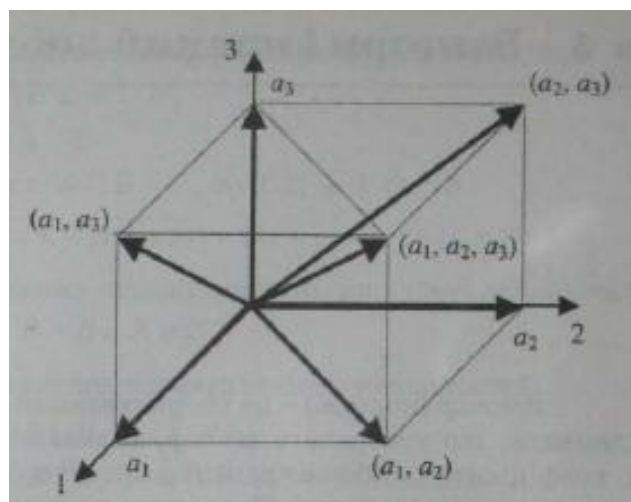


Рисунок 8. Завдання вектора в просторі

Проекції вектора на осі координат

$$\text{Пр}_i (a_1, a_2, a_3) = a_i, \quad i=1,2,3 \quad (74)$$

Проекції вектора на координатну площину

$$\text{Пр}_{i,j} (a_1, a_2, a_3) = (a_i, a_j), \quad i=1,2,3; j=1,2,3; i \neq j \quad (75)$$

Приклад 1.

$$\text{Пр}_1 (a_1, a_2, a_3) = a_1 \quad (76)$$

Приклад 2.

$$\text{Пр}_{2,3} (a_1, a_2, a_3) = (a_2, a_3) \quad (77)$$

7. Прямий добуток множин

Прямим добутком множин X і Y називається множина, що позначається $X \times Y$ і складається з усіх тихі лише тих упорядкованих пар, перша компонента яких належить до множини X , а друга – до множини Y .

Це означає, що елементами упорядкованої множини є двоелементні вектори (x,y) . Формально це визначається таким чином:

$$X \times Y = \{(x,y) | x \in X, y \in Y\}. \quad (78)$$

$$X \times Y = \emptyset, \text{ якщо } X = \emptyset \text{ або } Y = \emptyset \text{ або } X = Y = \emptyset. \quad (79)$$

Приклад 1.

Нехай

$$X = \{1,2\}, Y = \{1,2,3\}. \quad (80)$$

Тоді

$$X \times Y = \{(1,1), (1,3), (1,4), (2,1), (2,3), (2,4)\}. \quad (81)$$

Слід зазначити, що

$$X \times Y \neq Y \times X \quad (82)$$

Прямим добутком множин $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ називається множина, що позначається $A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n$, усіх векторів $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ довжини n , таких, що $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n$.

Нехай A – довільна множина. Назовемо n -м степенем множини A , що позначається як A^n , прямий добуток n однакових множин, що дорівнюють A :

$$A^n = \underbrace{A \times A \times A \dots A}_{n \text{ разів}} \quad (83)$$

При цьому $A^1=A$, $A^0=\{\emptyset\}$.

Якщо R – множина дійсних чисел, то $R^2=R \times R$ є дійсною площиною, а $R^3=R \times R \times R$ – тривимірним дійсним простором.

Теорема 1. Нехай $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ – кінцеві множини і $|A_1|=m_1, |A_2|=m_2, \dots, |A_n|=m_n$, де m_1, m_2, \dots, m_n число (потужність) елементів у множинах $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$. Тоді потужність множини $A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n$ дорівнює добутку потужностей множин $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$:

$$|A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n| = m_1 m_2 \dots m_n \quad (84)$$

Доведення (треба зробити самостійно)

8. Проекція множин

Застосовується лише до множин, елементами яких є кортежі однакової довжини.

Проекцією множини векторів M називається множина проєкцій векторів з M .

Нехай

$$M = \{(1,2,3,4,5), (2,1,3,5,5), (3,3,3,3,3)\}. \quad (85)$$

Тоді

$$\text{Пр}_2 M = \{2,1,3\}, \quad (86)$$

$$\text{Пр}_2 M = \{(2,4), (1,5), (3,3)\}, \quad (87)$$

Якщо

$$M = X \times Y, \quad (88)$$

то

$$\text{Pr}_1 M = X; \text{Pr}_2 M = Y, \quad (89)$$

якщо множина векторів

$$Q \subseteq X \times Y, \quad (90)$$

То

$$\text{Pr}_1 Q \subseteq X; \text{Pr}_2 Q \subseteq Y. \quad (91)$$

Нехай A – кінцева множина, елементами якої є різні символи – літери, цифри, знаки операцій тощо. Такі множини називаються алфавітами. Елементи множини « A » називаються словами довжини n в алфавіті A .

Слова не розділяються ні дужками, ні комами. Елементи слів також не розділяються. Тому слово в алфавіті A – це просто кінцева послідовність символів алфавіту A .

Наприклад, десяткове ціле число – це слово в алфавіті цифр $\{1, 2, \dots, 9\}$.

9. Відповідності і відображення

Будь яка підмножина $R \subseteq A \times B$ добутку множин називається бінарною відповідністю з A в B . Множина A називається множиною відправлення (визначення), а множина B – множиною прибуття (значення) відповідності R .

Відповідності полягають в тому, що деяким елементам множини A поставлені у відповідність елементи множини B .

Приклад 1.

Нехай

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{a, b, c, d, e, f\}.$$

(92)

Тоді

$$P = \{(1, a), (3, a), (3, b), (3, c), (4, c), (5, b), (5, e)\} \text{ – відповідність } P.$$

(93)

Існує багато способів завдання відповідностей. Два найбільш поширених з них - у вигляді графіків (рисунок 1) і стрілкове подання (рисунок 2).

Множина всіх $b \in B$, що відповідають елементу $a \in A$, називається образом a в B при відповідності P .

Множина всіх a , яким відповідає b , називається прообразом b в A при відповідності P .

Так, множина $\{a, b, c\}$ є образом 3 в P , множина $\{3, 5\}$ є прообразом b .

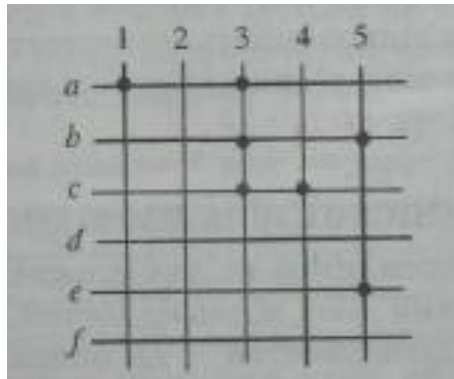


Рисунок 9. Графічне завдання відповідностей

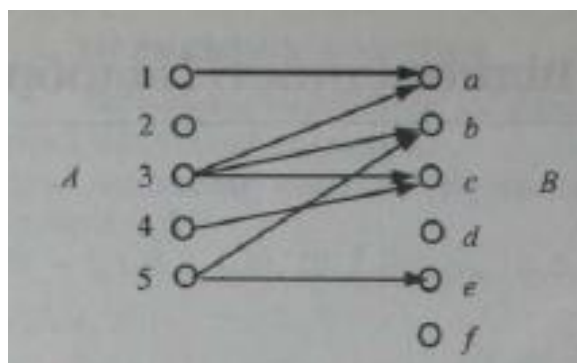


Рисунок 10. Стрілкове завдання відповідностей

Елементи множин A і B , що беруть участь у зіставленні, позначаються або як Pr_1P і Pr_2P – проекція множини визначення і проекція множини значень, або ж як область визначення і область значень відповідності.

Приклад 2.

Нехай

$$A = \{1, 2\}, B = \{3, 5\}, \quad (94)$$

тобто

$$A \times B = \{(1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5)\}. \quad (95)$$

Наведемо деякі з можливих відповідностей:

$$P_1 = \{(1, 3)\}; \text{Pr}_1P_1 = \{1\}, \text{Pr}_2P_1 = \{3\}. \quad (96)$$

$$P_2 = \{(1, 3), (1, 5)\}; \text{Pr}_1P_2 = \{1\}, \text{Pr}_2P_2 = \{3, 5\} = B. \quad (97)$$

$$P_3 = \{(1, 3), (2, 3)\}; \text{Pr}_1P_3 = \{1, 2\}, \text{Pr}_2P_3 = \{3\}. \quad (98)$$

Таким чином відповідність P входить до трійки множин (A, B, P) , в якій $P \subseteq A \times B$.

10.Обернена відповідність

Для кожної відповідності (A, B, P) , $P \subseteq A \times B$ існує обернена відповідність, яку можна одержати при розгляді даної відповідності у зворотному напрямку, тобто коли визначаються елементи $a \in A$, з якими зіставляються елементи $b \in B$. Обернена відповідність позначається (B, A, P^{-1}) , де $P^{-1} \subseteq A \times B$. Оберненою відповідністю оберненої відповідності є пряма відповідність $(P^{-1})^{-1} = P$.

11. Композиція відповідностей

Композицією відповідностей називається послідовне застосування двох відповідностей.

Композиція відповідностей – це операція з трьома множинами X, Y, Z , на яких визначені дві відповідності P і Q : (X, Y, P) і (Y, Z, Q) , де $P \subseteq X \times Y$, $Q \subseteq Y \times Z$.

При цьому область значень першої відповідності збігається з областю визначення другої відповідності: $\text{Pr}_2 P = \text{Pr}_1 Q$.

Перша відповідність визначає для будь якого $x \in \text{Pr}_1 P$ деякий, можливо і не один, елемент $y \in Y$. Згідно з означенням операції композиції відповідностей тепер потрібно для знайденого $y \in Y$ визначити $z \in Z$, скориставшись другою відповідністю Q .

Отже, композиція відповідностей зіставляє з кожним елементом x області визначення першої відповідності $\text{Pr}_1 P$ один або декілька елементів z з області значень другої відповідності $\text{Pr}_2 Q$.

Композицію відповідностей позначають через $P \circ Q$. При цьому композиція відповідностей запишеться у вигляді $(X, Y, P \circ Q)$, $P \circ Q \subseteq X \times Z$. Очевидно, що операцію композиції можна поширити і на кількість відповідностей більшу ніж два.

12. Відображення

Відображенням, або перетворенням множин A у множину B , називається відповідність, в якій кожному елементу множини A ставиться у відповідність не більше ніж один однозначно визначений елемент множини B .

Елемент $b \in B$ називається образом елемента a , а елемент a , у свою чергу, називається прообразом елемента b .

Відображення однієї множини в іншу позначається малими літерами грецького алфавіту: $\varphi: A \rightarrow B$, або $A \xrightarrow{\varphi} B$.

Образ елемента $a \in A$ позначається як $(a)\varphi$. Відображення однієї множини в іншу задається за допомогою графіків, стрілкових схем або таблиць, як у таблиці 1.

Таблиця 1. Задання відображення множин у вигляді таблиці

| | | | | |
|---------------|----------------|----------------|-------|----------------|
| a | a ₁ | a ₂ | | a _n |
| (a) φ | b ₁ | b ₂ | | b _n |

Відповідно до означення відображення кожному елементу множини B може відповідати один або більше елементів множини A.

Але одному елементу множини A не може відповідати більш ніж один елемент множини B. Тому відображення може бути подане таблицею. У цьому полягає відмінність відображення від більш загального поняття – відповідності. Відповідність в загальному випадку не можна подати у вигляді таблиці, оскільки елементу a можуть відповідати декілька елементів b.

Приклад 1. Нехай $A = \{3, 2, 6, 7\}$; $B = \{28, 12, 4, 9, 11\}$, $\varphi: A \rightarrow B$ – це відображення, яке кожному числу з A ставить у відповідність найменше спільне кратне цього числа і числа 4, яке входить до множини B. Отже, маємо (3) $\varphi = 12$, (2) $\varphi = 4$, (6) $\varphi = 12$, (7) $\varphi = 28$ (рис.11).

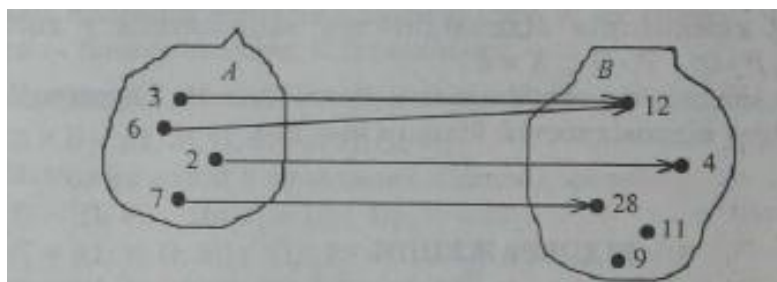


Рисунок 11. Приклад відображення множин за допомогою стрілкової схеми

Приклад 4. Нехай $A = \{г, а, и, л\}$; $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, а $\varphi: A \rightarrow B$ – є відображення, за яким кожній літері з множини A ставиться у відповідність її порядковий номер у слові «логарифм».

Графік цього відображення дається на рисунку 12.

Користуючись тим, що кожне відображення множини A і B повністю описується своєю таблицею значень, підрахуємо, скільки існує різних відображень множини A у множину B . Графік цього відображення дається на рисунку 12.

Користуючись тим, що кожне відображення множини A і B повністю описується своєю таблицею значень, підрахуємо, скільки існує різних відображень множини A у множину B .

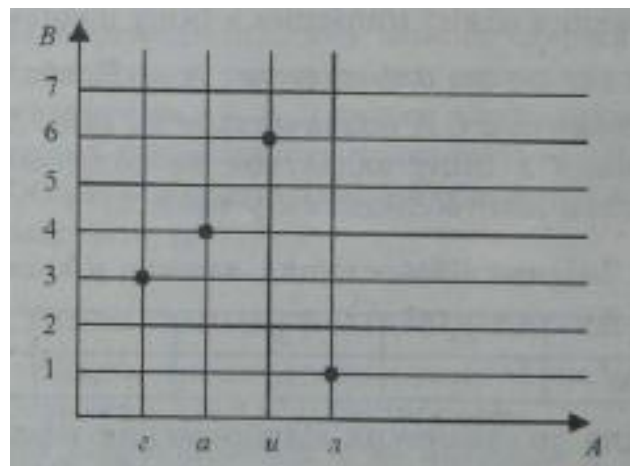


Рисунок 12. Приклад графічного завдання відповідностей

Позначимо елементи множини A символами a_1, a_2, \dots, a_n , а елементи множини B , в які відбувається відображення – символами b_1, b_2, \dots, b_m .

Причому останні не обов'язково різні. Верхній ряд таблиці 1 однаковий для всіх можливих відображень A у B , а нижній – змінюється. При цьому різних відображень A у B буде стільки, скількома різними способами можна заповнити другий ряд таблиці 1. До кожної клітинки другого ряду таблиці можна записати позначення якого завгодно елемента множини B , число яких дорівнює m . Таким чином, кожна з n клітинок нижнього ряду таблиці відображення можна заповнити m різними способами незалежно від способу заповнення інших клітинок. А це

означає, що в таблиці відображення можна утворити всього $m \cdot m \cdot \dots \cdot m = m^n$ різних нижніх рядів. Отже існує m^n різних відображень A у B .

Відображення $\varphi: A \rightarrow B$ називається відображенням на всю множину B , або сюр'єкцією, якщо для кожного елемента $b \in B$ знайдеться такий елемент $a \in A$, що $(a)\varphi = b$.

Якщо множини A і B скінченні та $\varphi: A \rightarrow B$ є сюр'єкцією, то в нижньому ряду її таблиці відображення знаходяться всі елементи з B , хоч можливо і не один раз, а на кожній горизонтальній прямій графіка сюр'єкції обов'язково є позначення вершини сітки. На стрілковій схемі сюр'єкції в кожному точку, яка позначає елемент множини B , входить принаймні одна стрілка (можливо і більше).

Сюр'єкція скінченної множини A на скінченну множину B існує не завжди. Для цього необхідно, щоб виконувалась нерівність $|A| \geq |B|$.

Відображення $\varphi: A \rightarrow B$ називається ін'єкцією, якщо різні елементи множини A переводяться цим відображенням у різні елементи множини B : для кожних $a_1, a_2 \in A$ і $a_1 \neq a_2$ випливає, що $(a_1)\varphi \neq (a_2)\varphi$.

У нижньому ряду таблиці ін'єктивного відображення $\varphi: A \rightarrow B$ кожний елемент множини B присутній лише один раз. Це означає, що при стрілковому зображенні ін'єкції в кожному точку, яка позначає елемент множини B , входить не більш одна стрілка.

Якщо множини A і B скінченні і існує ін'єкція A у B , то очевидно, що має виконуватись нерівність $|A| \leq |B|$.

Якщо відображення множини A в множину B є водночас ін'єктивним і сюр'єктивним, то воно називається взаємно однозначним відображенням множини A на множину B , або бієкцією A на B .

При бієкції має виконуватися рівність $|A| = |B|$.

Підрахуємо, скільки існує різних бієкцій множини $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ на множину $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$.

Кожна бієкція $f:A \rightarrow B$ повністю описується своєю таблицею типу таблиці 1, в якій кожному елементу a може бути відповідно поставлений у другому ряду такий елемент b , який не зустрінеться більше ні в якій іншій клітинці цього ряду.

Таким чином, верхній ряд таблиці 1 не змінюється, а в нижньому ряду можуть знаходитися довільно розміщені позначення елементів множини B , причому обов'язково різних. Отже, перше зліва місце нижнього ряду таблиці можна заповнити n різними способами. Якщо перше місце вже заповнене, то, незалежно від того, яким елементом оно заповнене, на друге місце можна поставити позначення будь-якого з решти n -елементів множини B . Аналогічно третю клітинку можна заповнити $n-2$ способами і т.д. Для передостаннього місця залишаються лише дві можливості цього заповнення, а для останнього – лише одна. Оскільки кожна клітинка заповнюється незалежно від решти, то існує $n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1 = n!$ різних способів одночасного заповнення клітинок. Отже, можна скласти $n!$ різних таких таблиць, а це означає, що існує $n!$ різних бієкцій A у B .

13. Логічні операції і функції. Числення висловлювань

13.1. Висловлювання

У численні висловлювань об'єктом дослідження є висловлювання (висловлення).

Означення 1. Будь-яке твердження, яке може бути істинним або хибним, називається висловлюванням.

Істинним висловлюванням приписується значення 1, хибним - 0. З одного або кількох висловлювань можна скласти нові висловлювання. Їх ще називають складеними висловлюваннями. При цьому окремі висловлювання позначатимемо великими літерами латинського алфавіту A, B, C, \dots .

Приклад 1. Висловлюваннями будуть: $A =$ "Вісім - парне число"; $B =$ "Вісім ділиться на два"; $C =$ "Вісім ділиться на три"; $D =$ "Київ - столиця України". З них

висловлювання А, В і Д -істинні, а висловлення С - хибне. Це записується як $A = B = C = 0, D = 1$.

Приклад 2. Складеним буде висловлення: "Якщо вісім - парне число, то вісім ділиться на два". Це висловлення істинне, тобто дорівнює 1.

Для об'єднання простих висловлювань у складені застосовують логічні операції.

13. 2. Операції над висловлюваннями

1. Логічна операція "Константа нуль" створює висловлювання, яке завжди є хибним. Позначається $F = 0$.

2. Логічна операція "Константа одиниця" створює висловлювання, яке завжди є істинним. Позначається $F = 1$.

3. Логічна операція "Змінна А" створює висловлювання $F = A$, яке дорівнює 0 тоді і лише тоді, коли А дорівнює 0, і 1, коли А дорівнює 1. Читається: "Висловлювання залежить лише від А".

4. Логічна операція "НІ" створює висловлювання $F = \bar{A}$, яке є істинним тоді і лише тоді, коли А хибне, і хибне, коли А є істинним. Читається: "Не А" або "Невірно, що А".

5. Логічна операція "І" (кон'юнкція, добуток, логічне множення) створює складене висловлювання $F = A \wedge B$ ($A \cdot B, AB, A \& B$), яке є істинним тоді і лише тоді, коли обидва висловлювання А і В істинні, і хибним, коли хоча б одне з цих висловлювань хибне. Читається: "А і В".

6. Логічна операція "АБО" (диз'юнкція, сума, логічне додавання) створює складене висловлювання $F = A \vee B$ ($A + B, A \text{ або } B$), яке є хибним тоді і лише тоді, коли обидва висловлювання А і В хибні, і істинним, коли хоча б одне висловлювання А чи В істинне. Читається: "А або В".

7. Логічна операція "Якщо - то" (імплікація) створює складне висловлювання $F = A \rightarrow B$, яке є хибним тоді і лише тоді, коли A істинне, а B - хибне. Для інших випадків значень, які приймають висловлювання A і B , воно істинне. Читається: "Якщо A , то B ".

8. Логічна операція "Заборона з B " (заперечення імплікації $A \rightarrow B$) створює складене висловлення $F = A \Delta B = \overline{A \rightarrow B}$, яке є істинним тоді і лише тоді, коли A істинне, а B хибне. Для інших випадків значень, які приймають висловлювання A і B , воно хибне. Читається: "Невірно, якщо A , то B ".

9. Логічна операція "Заборона з A " (заперечення імплікації $B \rightarrow A$) створює складене висловлювання $F = B \Delta A = \overline{B \rightarrow A}$, яке є істинним тоді і лише тоді, коли B істинне, а A хибне. Для інших випадків значень, які приймають висловлювання A і B , воно хибне. Читається: "Невірно, якщо B , то A ".

10. Логічна операція "Рівнозначність" (еквівалентність) створює складене висловлювання $F = A \sim B (A \equiv B)$, яке є істинним тоді і лише тоді, коли обидва висловлювання A і B істинні або хибні одночасно. Для інших випадків значень, які приймають висловлювання A і B , воно хибне. Читається: " A рівнозначне B ".

11. Логічна операція "Нерівнозначність" (сума за модулем два) створює складене висловлювання $F = A \oplus B (A \neq B)$, яке є істинним тоді і лише тоді, коли одне висловлювання є істинним, а друге - хибним. Для інших випадків значень, які приймають висловлювання A і B , воно хибне. Читається: " A нерівнозначне до B ", або "Сума за модулем 2".

12. Логічна операція "Стрілка Пірса" (функція Вебба, операція Пірса) створює складене висловлювання $F = A \downarrow B = \overline{A \vee B}$, яке є істинним тоді і лише тоді, коли обидва висловлювання A і B хибні одночасно. Для інших випадків значень, які приймають висловлювання A і B , воно хибне. Читається: "Ні A , ні B ".

13. Логічна операція "Операція Шеффера" (Штрих Шеффера) створює складене висловлювання $F = A | B = \overline{A \wedge B}$, яке є хибним тоді і лише тоді, коли обидва висловлювання A і B є істинні одночасно. Для інших випадків значень, які приймають висловлювання A і B , воно істинне. Читається: "Невірно, що A і B ".

13.3. Логічні функції.

Означення логічної функції

Означення 1. Функція F від n аргументів (змінних) x_1, x_2, \dots, x_n , яка так само, як і її змінні, може приймати лише два значення - 0 і 1, називається логічною (двійковою, булевою).

Розглянуті вище логічні операції над висловлюваннями можуть бути використані для побудови логічних функцій. Ці операції разом з побудованими з їх допомогою логічними функціями створюють алгебру логіки. У ній висловлювання в логічних функціях замінюються логічними змінними, і щодо них виконуються необхідні для розв'язання тієї чи іншої задачі логічні операції. Їх найбільш уживаний склад був розглянутий у попередній лекції.

Набори значень змінних логічної функції

Означення 2. Сукупність $a_1; a_2, \dots, a_n$ значень n змінних x_1, x_2, \dots, x_n називається набором і позначається a_1, a_2, \dots, a_n , де $a_i \in \{0,1\}$, $i=1,2,\dots, n$.

Розмістимо, наприклад, набори для трьох аргументів у вигляді двійкових чисел у спеціальній таблиці - таблиці наборів. Очевидно, що їх число дорівнює 8. Зліва в цій таблиці у вигляді номерів зазначимо десяткові еквіваленти двійкових наборів (табл. 2.). Це дозволяє досить легко перейти від десяткового запису номеру набору до його двійкового вигляду.

Таблиця 2. Набори значень двійкових змінних

| Номер набору | x_1 | x_2 | x_3 |
|--------------|-------|-------|-------|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 2 | 0 | 1 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 1 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 1 | 0 | 0 |
| 5 | 1 | 0 | 1 |
| 6 | 1 | 1 | 0 |
| 7 | 1 | 1 | 1 |

Через те, що кількість змінних скінченна, кількість можливих наборів обмежена, і, відповідно, ці набори й значення логічної функції можуть бути задані в спеціальній таблиці в порядку зростання від 0 до $2^n - 1$.

Теорема 1.

Число наборів для аргументів x_1, x_2, \dots, x_n логічної функції $N = 2^n$.

Доведення. Оскільки за означенням логічної функції кожна змінна x_i , $i = 1, 2, \dots, n$, може приймати значення 0 і 1, кількість наборів, що містять j одиниць і відповідно $n-j$ нулів, дорівнює числу сполучень j з $n - C_n^j$. Оскільки j може приймати значення 0, 1, ..., n , то число всіх можливих наборів дорівнюватиме $N = \sum_{j=0}^n C_n^j$, яке, як відомо, становить 2^n . Теорему доведено.

Кількість логічних функцій

Кожна логічна функція f приймає у кожному зі своїх наборів значення, яке дорівнюють 0 або 1. Кількість наборів, як було доведено в теоремі 1, відповідає числу $N = 2^n$. Виходячи з цього, має місце така теорема.

Теорема 2.

Кількість різних логічних функцій від n аргументів

$$M = 2^N \quad (99)$$

Доведення. Дійсно, оскільки на кожному наборі $i = 0, 1, \dots, N$ логічна функція F_i дорівнює 0 або 1, то число функцій, що приймають 1 на γ наборах і 0 на решті $M-\gamma$ наборах, дорівнює числу сполучень γ з числа можливих наборів $N-C_N^\gamma$.

Оскільки $\gamma = 0, 1, \dots, N$, то число всіх можливих функцій

$$M = \sum_{\gamma=0}^N C_N^\gamma = 2^N \quad (100)$$

Теорему доведено.

Елементарні логічні функції

Розмістимо логічні функції разом з таблицею наборів у порядку зростання їх десяткових індексів, починаючи з нуля, і зазначимо на кожному наборі значень змінних у відповідній клітинці таблиці значення функції, яке відповідає нулю або одиниці (табл. 3, 4). Створені таким чином таблиці називаються таблицями істинності. З їх допомогою для однієї і двох змінних побудуємо елементарні логічні функції, на основі яких можна створити інші функції, якими б складними вони не були.

Існує чотири різні логічні функції одного аргументу A (табл.3). Їх назва обирається відповідно до логічної операції, яка їх створює.

Таблиця 3. Таблиця істинності логічних змінних однієї змінної

| Номер набору | A | F ₀ | F ₁ | F ₂ | F ₃ |
|--------------|---|----------------|----------------|----------------|----------------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |

Функція F_0 тотожно дорівнює 0. Її називають "Константою нуль".

Функція повторює значення змінної і тому тотожно дорівнює цій змінній. Її називають "Змінна А". Функція F_2 приймає значення, протилежні до значень аргументу. Тобто це є логічна функція «НІ». Її ще називають "Інверсією А", або "Запереченням А". Позначається \bar{A} . Функція F_3 , тотожно дорівнює 1. Її називають "Константою одиниці".

Згідно з теоремою 2 існує $M = 2^N = 2^2 = 16$ різних логічних функцій двох аргументів А і В, кожна з яких визначена у $N = 2^2$ наборах змінних (табл. 4).

Таблиця 4. Таблиця істинності логічних функцій двох змінних

| Номер набору | Змінна | | Функція F | | | | | | | | | | | | | | | |
|--------------|--------|---|-----------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|
| | A | B | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |

Ці функції мають однакові назви з логічними операціями, які їх створюють:

1. $F_0 = 0$ - константа нуль;

2. $F_1 = A \wedge B$ — логічне множення (кон'юнкція, добуток);

3. $F_2 = A \Delta B$ - заборона за В

4. $F_3 = A$ - змінна А

5. $F_4 = B \Delta A$ - заборона за А;

6. $F_5 = B$ - змінна В;

7. $F_6 = A \oplus B$ - сума за модулем 2 (логічна нерівнозначність);

8. $F_7 = A \vee B$ - логічне додавання (диз'юнкція);

9. $F_8 = A \downarrow B$ - операція Пірса (стрілка Пірса);

10. $F_9 = A \sim B$ - логічна рівнозначність;

11. $F_{10} = \bar{B}$ - інверсія B;

12. $F_{11} = B \rightarrow A$ - імплікація від B до A;

13. $F_{12} = \bar{A}$ - інверсія A;

14. $F_{13} = A \rightarrow B$ - імплікація від A до B

15. $F_{14} = A|B$ - операція Шефера (штрих Шефера);

16. $F_{15} = 1$ - константа одиниця.

14. Закони алгебри логіки

В алгебрі логіки існують логічні закони, логічні суперечності і твердження, що логічно виконуються.

Означення 1. Висловлення, що є істинним для всіх можливих комбінацій значень простих висловлювань, з яких воно складається, називається логічним законом.

Означення 2. Висловлення, що є хибним для всіх можливих комбінацій значень простих висловлювань, з яких воно складається, називається логічною суперечністю.

Означення 3. Висловлення, що є істинним для одних значень простих висловлювань, з яких воно складається, і хибним для решти, називається твердженням, що логічно виконується.

Наведемо основні закони алгебри логіки (табл. 5).

Таблиця 5. Основні закони алгебри логіки

| Назва закону | Логічний запис |
|-------------------------------------|--|
| 1. Тотожності | $A = A$ |
| 2. Суперечності | $\overline{A\overline{A}} = 1$ |
| 3. Виключеного третього | $A + \overline{A} = 1$ |
| 4. Ідемпотентності | $AA = A; A + A = A$ |
| 5. Комутативний | $AB = BA, A + B = B + A$ |
| 6. Асоціативний | $(AB)C = A(BC);$ $(A + B) + C = A + (B + C)$ |
| 7. Дистрибутивний | $A(B + C) = AB + AC;$ $A + BC = (A+B)(A+C)$ |
| 8. Поглинання | $A(B + A) = A; A + AB = A$ |
| 9. Подвійності (теорема де Моргана) | $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}; \overline{\overline{A} + \overline{B}} = \overline{A}\overline{B}$ |
| 10. Подвійного заперечення | $A = \overline{\overline{A}}$ |
| 11. Властивість одиниці | $A \cdot 1 = A; A + 1 = 1$ |

15. Перетворення елементарних функцій

Запровадимо ряд важливих формул для елементарних функцій. Доведення правильності формули легко отримати за допомогою безпосередньої перевірки в таблицях істинності за збіжністю значень, що утворюють праву і ліву сторони співвідношень, які доводяться (табл.6-9).

Таблиця 6. $A \cdot B = \overline{\overline{A} + \overline{B}}$ – правило де Моргана

| A | B | $A \cdot B$ | \overline{A} | \overline{B} | $\overline{A} + \overline{B}$ | $\overline{\overline{A} + \overline{B}}$ |
|---|---|-------------|----------------|----------------|-------------------------------|--|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|

Таблиця 7. $A \vee B = \overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}$ – правило де Моргана

| A | B | $A \vee B$ | \overline{A} | \overline{B} | $\overline{A} \wedge \overline{B}$ | $\overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}$ |
|---|---|------------|----------------|----------------|------------------------------------|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |

Таблиця 8. $A \rightarrow B = \overline{A} \vee B$ – правило де Моргана

| A | B | $A \rightarrow B$ | \overline{A} | B | $\overline{A} \vee B$ |
|---|---|-------------------|----------------|---|-----------------------|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

Таблиця 9. $A \sim B = (\overline{A} \vee B)(A \vee \overline{B})$ – правило де Моргана

| A | B | $A \sim B$ | \overline{A} | B | $\overline{A} \vee B$ | A | \overline{B} | $A \vee \overline{B}$ | $(\overline{A} \vee B) \wedge (A \vee \overline{B})$ |
|---|---|------------|----------------|---|-----------------------|---|----------------|-----------------------|--|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

Аналогічно доводяться і співвідношення

1. $A = \overline{\overline{A}}$.
2. $A \sim B = AB \vee \overline{A} \overline{B}$.
3. $A \Delta B = \overline{\overline{A} \vee \overline{B}} = A \wedge B$.
4. $B \Delta A = \overline{\overline{B} \vee \overline{A}} = B \wedge A$.

5. $A \oplus B = \overline{A \sim B} = \overline{(\bar{A} \vee B)(A \vee \bar{B})} = (A \wedge \bar{B}) \vee (\bar{A} \wedge B).$
6. $A \downarrow B = \overline{A \vee B} = \bar{A} \wedge \bar{B}.$
7. $A \mid B = \overline{A \wedge B} = \bar{A} \vee \bar{B}.$
8. $B \rightarrow A = \bar{B} \vee A.$

У разі, коли однією зі змінних є константа 1 або 0, справедливі співвідношення, що наведені у таблиці 10.

Таблиця 10. Співвідношення для змінних x та 1, x та 0

| Співвідношення | Співвідношення |
|------------------------|-----------------------------|
| $x \vee 1 = 1$ | $x \vee 0 = x$ |
| $x \wedge 1 = x$ | $x \wedge 0 = 0$ |
| $x \sim 1 = x$ | $x \sim 0 = \bar{x}$ |
| $x \oplus 1 = \bar{x}$ | $x \oplus 0 = x$ |
| $x \rightarrow 1 = 1$ | $x \rightarrow 0 = \bar{x}$ |
| $1 \rightarrow x = x$ | $0 \rightarrow x = 1$ |
| $x \mid 1 = \bar{x}$ | $x \mid 0 = 1$ |
| $x \downarrow 1 = 0$ | $x \downarrow 0 = \bar{x}$ |

У випадках, коли дві змінні $x_1 = x_2 = x$, а також коли $x_1 = x$ і $x_2 = \bar{x}$, маємо для цих змінних співвідношення, які наведені в таблиці 11.

Таблиця 11. Співвідношення для змінних $x_1 = x_2 = x$ та $x_1 = x$ і $x_2 = \bar{x}$

| Співвідношення | Співвідношення |
|------------------|------------------------|
| $x \vee x = x$ | $x \vee \bar{x} = 1$ |
| $x x = x$ | $x \bar{x} = 0$ |
| $x \sim x = 1$ | $x \sim \bar{x} = 0$ |
| $x \oplus x = 0$ | $x \oplus \bar{x} = 1$ |

| | |
|----------------------------|--|
| $x \rightarrow x = 1$ | $x \rightarrow \bar{x} = \bar{x}$ $\bar{x} \rightarrow x = x$ |
| $x \mid x = \bar{x}$ | $x \mid \bar{x} = 1$ |
| $x \downarrow x = \bar{x}$ | $x \downarrow \bar{x} = 0$ |

16. Порядок виконання логічних операцій

Наведені елементарні функції дозволяють будувати нові, у тому числі й більш складні, функції від довільного скінченного числа змінних шляхом підстановки до функцій інших функцій замість змінних. При цьому для запису функцій використовуються дужки. Передбачається, що спочатку виконуються операції всередині дужок, після цього - операції під знаком заперечення, потім кон'юнкція, а надалі диз'юнкція і всі інші операції в порядку запису зліва направо, наприклад, імплікація.

17. Суперпозиція логічних функцій

Означення 1. Функція

$$F = F(F_1, F_2, \dots, F_n), \quad (101)$$

яка отримана із функцій F_1, F_2, \dots, F_n , називається суперпозицією функцій F_1, F_2, \dots, F_n .

Приклад 1. Надані функції

$$A = (\bar{x}_1 \sim x_3); B = x_1 \downarrow x_2; C = x_1 x \oplus; D = x_3. \quad (102)$$

Потрібно отримати суперпозицію функцій $A, B, C, D \rightarrow F(A, B, C, D)$, а з неї функцію $F(x_1, x_2, x_3)$.

Розв'язання. Отримаємо суперпозицію

$$F(A, B, C, D) = ((A \vee B) \wedge C) \rightarrow D. \quad (103)$$

Далі замість функцій A, B, C, D, запишемо їх значення:

$$F = ((A \vee B) \wedge C) \rightarrow D = F(x_1, x_2, x_3) = \{[(\overline{x_1} \sim x_3) \vee (x_1 \downarrow x_2)] \wedge (x_1 \oplus x_2)\} \rightarrow x_3. \quad (104)$$

Використовуючи таблиці елементарних логічних функцій для \sim , \vee , \downarrow , \oplus , \rightarrow отримаємо в таблиці 12, 13 всі значення функції $F(x_1, x_2, x_3)$.

Таблиця 12. Функція $F(x_1, x_2, x_3)$

| Номер набору | x_1 | x_2 | x_3 | $\overline{x_1}$ | $\overline{x_1} \sim x_3$ | $x_1 \downarrow x_2$ | $[\]$ |
|--------------|-------|-------|-------|------------------|---------------------------|----------------------|--------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 5 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Таблиця 13. Функція $F(x_1, x_2, x_3)$

| Номер набору | x_1 | x_2 | x_3 | $x_1 \oplus x_2$ | $\{ \}$ | x_3 | $F(x_1, x_2, x_3)$ |
|--------------|-------|-------|-------|------------------|---------|-------|--------------------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 3 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 5 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 6 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |

Таким чином, функція $F(x_1, x_2, x_3) = x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$ дорівнює 0 на наборі 4, і 1 на решті наборів.

18. Булева алгебра

18.1. Основні формули булевої алгебри

Означення 1. Логічні операції над змінними x_1, x_2, \dots, x_n логічних функцій $F = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, що містять у собі операції заперечення, диз'юнкції, кон'юнкції, а також операції константа 0 і константа 1, називаються булевими.

Означення 2. Булеві операції над змінними логічних функцій і співвідношення, які впливають з них, називаються булевою алгеброю. Важливим є те, що з допомогою цієї алгебри можна реалізувати будь-яку логічну функцію.

Ця алгебра отримала свою назву на честь англійського математика 19-го століття Джорджа Буля, що заклав її підвалини. Змінні x_1, x_2, \dots, x_n у булевій алгебрі вважаються довільними логічними функціями, тобто для них справджується принцип суперпозиції. Це означає, що будь-який вираз булевої алгебри являє собою логічну функцію і може бути позначений однією літерою, яка є змінною у іншому виразі.

Наведемо в таблиці 14 основні формули булевої алгебри для диз'юнкції, кон'юнкції та інверсії.

Таблиця 14. Основні формули булевої алгебри

| Формула для диз'юнкції | Формула для кон'юнкції | Формула для інверсії |
|------------------------|------------------------|----------------------|
| 1. $0 \vee 0 = 0$ | $0 \wedge 0 = 0$ | $\bar{0} = 1$ |
| 2. $1 \vee 0 = 1$ | $1 \wedge 0 = 0$ | $\bar{1} = 0$ |
| 3. $1 \vee 1 = 1$ | $1 \wedge 1 = 1$ | $\bar{\bar{x}} = x$ |
| 4. $0 \vee x = x$ | $0 \wedge x = 0$ | |

| | | |
|--|---|--|
| 5. $1 \vee x = 1$ | $1 \wedge x = x$ | |
| 6. $x \vee x = x$ | $x \wedge x = x$ | |
| 7. $x \vee \bar{x} = 1$ | $x \wedge \bar{x} = 0$ | |
| 8. $x \vee y = y \vee x$ | $x \wedge y = y \wedge x$ | |
| 9. $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ | $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ | |

18.2. Спеціальні формули булевої алгебри

1. Операція поглинання $x \vee xy = x$ і $x(x \vee y) = x$.
2. Операція склеювання $xy \vee x\bar{y} = x$ і $(x \vee y)(x \vee \bar{y}) = x$.
3. Операція з дужками $xy \vee xz = x(y \vee z)$.
4. Формули де Моргана: $\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$; $\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}$.
5. $x_1 F\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = x_1 F(1, x_2, \dots, x_n)$.
6. $x_1 \vee F(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \vee F(0, x_2, \dots, x_n)$.
7. $\bar{x}_1 F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bar{x}_1 \cdot F(0, x_2, \dots, x_n)$.
8. $\bar{x}_1 \vee F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bar{x}_1 \vee F(1, x_2, \dots, x_n)$.
9. $\overline{F(x_1, x_2, \dots, x_n, V, \blacksquare)} = F(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, \bullet, V)$.

Очевидно, що в формулах 5, 7 функція F представлена в ДНФ, а в формулах 6, 8 - в КНФ. Доведення формул 1-9 провести самостійно.

Формула 9 означає, що якщо функція F складена таким чином, що змінні пов'язані тільки операціями диз'юнкції і кон'юнкції, то, замінивши всюди у виразі

для F знак диз'юнкції на знак кон'юнкції і навпаки, а також узявши заперечення з кожної зі змінних, одержимо заперечення даної функції F .

Формули 8 і 9 з таблиці 14 являють собою комутативний і асоціативний закони, а формула 3 зі спеціальних формул -розподільний (дистрибутивний) закон. Тому у виразах, які створюють операції диз'юнкції і кон'юнкції, можна розкривати дужки, виносити спільний множник, переставляти місцями члени за правилами звичайної алгебри, вважати формально диз'юнкцію операцією додавання, а кон'юнкцію - операцією множення.

19. Булеві логічні елементи

19.1.Інвертор

Елементи цифрової техніки, які застосовують елементарні логічні функції, називаються логічними елементами цифрових пристроїв. Серед цих елементів вирізняють універсальні набори, з допомогою яких можна реалізувати логічну функцію будь-якої складності. Такі набори називають функціонально-повними універсальними логічними базисами. До цих базисів належить булевий набір логічних елементів, який складається з елементів НІ, І, АБО, а також констант 0 і 1.

Розглянемо цей базис.

У більшості випадків константа 1 реалізується з допомогою деякого значення фізичного параметру, а константа 0 - через відсутність цього значення, хоча можливе й зворотне кодування.

Елемент, що реалізує логічну функцію НІ з допомогою одиничних чи нульових значень напруги, струму чи інших фізичних параметрів, називають інвертором. Логіка його роботи зображена в таблиці 15, а функціональна схема на рисунку 13.

На функціональних схемах інвертор зображується прямокутником, в якого вхід - зліва, вихід - справа (рис. 13 а, б). На вихідній чи вхідній лінії місце її

з'єднання з прямокутником зображається кружком - символом інверсії. Стрілку на вхідних і вихідних лініях ставити заборонено.

Зображення інвертора може бути повернуте на 90° таким чином, що вхід буде зверху, а вихід знизу (рис. 13 в, г). Інші повороти заборонені.

Таблиця 15. Логіка функціонування інвертора

| x | $f=\bar{x}$ |
|---|-------------|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

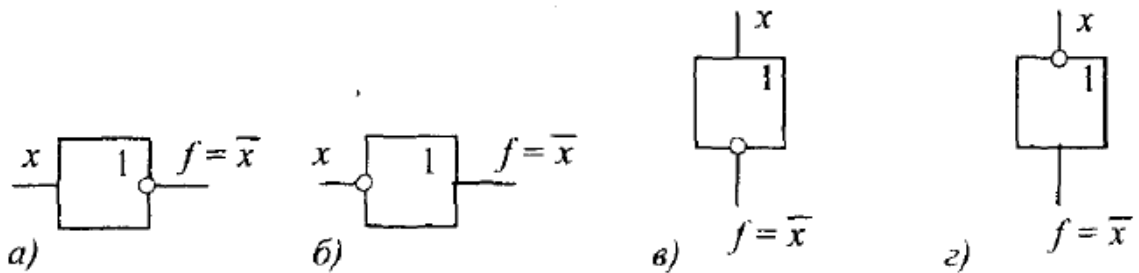


Рисунок 13.а,б,в,г, Функціональна схема інвертора

У релейно-контактній логіці функцію НІ реалізує контакт, який перебуває в замкнутому стані, поки в обмотках реле відсутній струм x , і розімкнутому під час подачі струму x (рис. 14). Часова діаграма його роботи зображена на рисунку 15.



Рисунок 14. Інвертор в релейному виконанні

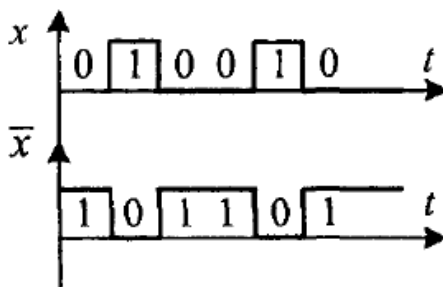


Рисунок 15. Часова діаграма роботи інвертора

19.2. Кон'юнктор

Кон'юнктор (схема І, схема кон'юнкції, клапан) - двійковий логічний елемент, який реалізує операцію І (логічне множення). Зображується, як це показано на рисунку 16. На його виході з'являється 1 тільки тоді, коли маємо сигнали 1 на всіх його входах (табл. 15).

Таблиця 15. Логіка функціонування кон'юнктора

| x_1x_2 | $f = x_1 \cdot x_2$ |
|----------|---------------------|
| 00 | 0 |
| 01 | 0 |
| 10 | 0 |
| 11 | 1 |

Логічна функція, що реалізує кон'юнктор, має вигляд

$$F = x_1 \cdot x_2 = x_1 \wedge x_2 = x_1 \&x_2 = x_1x_2 \quad (105)$$

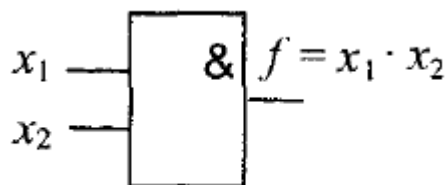


Рисунок 16. Функціональна схема кон'юнктора

У релейному вигляді кон'юнктор зображений на рисунку 16, а часова діаграма його роботи наведена на рисунку 17.

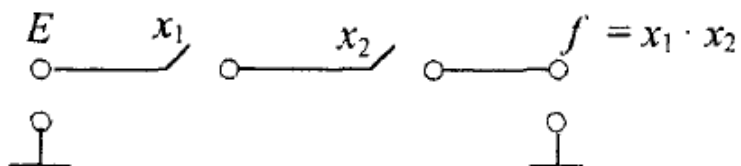


Рисунок 16. Кон'юнктор у релейному виконанні

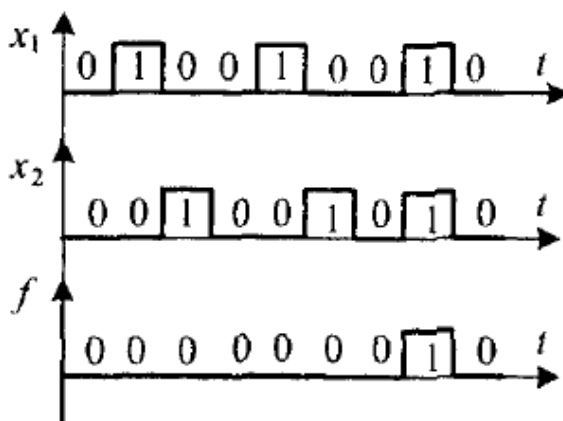


Рисунок 17. Часова діаграма роботи кон'юнктора

19.3. Реалізація схеми І на основі правила де Моргана

Для реалізації схеми І досить часто використовується формула де Моргана

$$x \cdot y = \overline{\overline{x} + \overline{y}} \quad (106)$$

Вона дозволяє функціонально замінити операцію І операцією АБО і інверсією, що можна в технічному плані легше реалізувати на практиці. Функціонування такої схеми наведено в таблиці 16, а її зображення - на рисунку 18.

Таблиця 16. Логіка роботи схеми І на основі правила де Моргана

| x | y | \overline{x} | \overline{y} | $\overline{x} + \overline{y}$ | $\overline{\overline{x} + \overline{y}} = x \cdot y$ |
|---|---|----------------|----------------|-------------------------------|--|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |

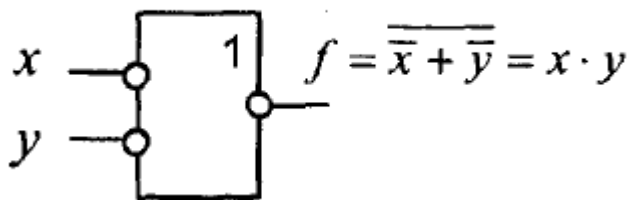


Рисунок 18. реалізація елемента І на основі правила де Моргана

19. 4. Диз'юнктор

Диз'юнктор (схема диз'юнкції, схема АБО) представляє логічний елемент, який реалізує операцію АБО (логічне додавання).

Логічна функція, яку реалізує диз'юнктор

$$f = x_1 + x_2 = x_1 \vee x_2 \quad (107)$$

Функціонує диз'юнктор відповідно до таблиці 17, а його функціональна схема наведена на рисунку 19. Релейний варіант схеми диз'юнкції наданий на рисунку 20. Часова діаграма роботи подається на рисунку 21.

Таблиця 17. Логіка роботи диз'юнктора

| x_1 | x_2 | $f = x_1 \vee x_2$ |
|-------|-------|--------------------|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

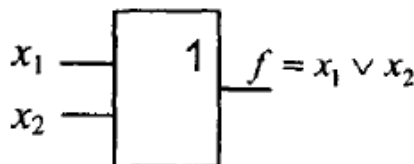


Рисунок 19. Функціональна схема диз'юнктора

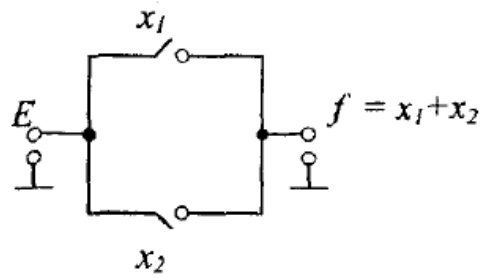


Рисунок 20. Диз'юнктор у релейному виконанні

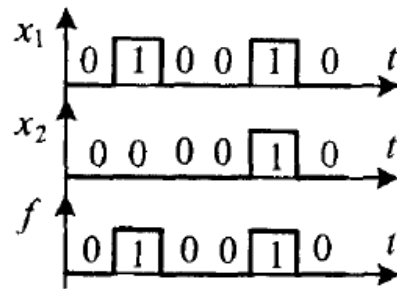


Рисунок 21. Часова діаграма роботи диз'юнктора

19.5.Реалізація схеми АБО на основі правила де Моргана

Правило де Моргана використовується у вигляді формули:

$$x + y = \overline{\bar{x} \cdot \bar{y}} \quad (108)$$

Функціонування схеми відбувається відповідно до таблиці 18.

Таблиця 18. логіка роботи схеми АБО на основі правила де Моргана

| x | y | \bar{x} | \bar{y} | $\bar{x} \cdot \bar{y}$ | $\overline{\bar{x} \cdot \bar{y}} = x + y$ |
|---|---|-----------|-----------|-------------------------|--|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |

Реалізується схема АБО з допомогою правила де Моргана у вигляді схеми, що подається на рисунку 22.

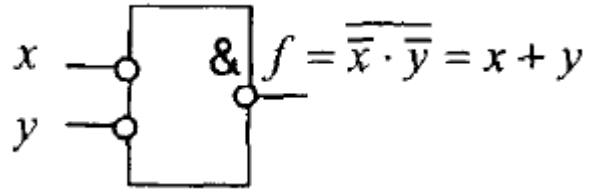
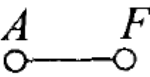
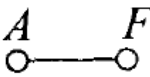
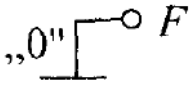
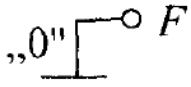
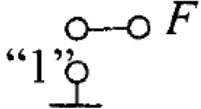
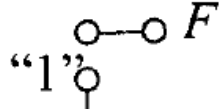


Рисунок 22. Реалізація елемента АБО на основі правила де Моргана

Таблиця 19. Зведена таблиця елементів універсального логічного базису

| Найменування | Графічне позначення | Реалізація функцій | Таблиця істинності | Релейне виконання | | | | | | | | | | | | | | | |
|--------------|---------------------|---|---|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|--|
| AND, 1, & | | $F = A \cdot B =$ $= AB =$ $= A \& B =$ $= A \wedge B$ | <table border="1"> <tr><td>A</td><td>B</td><td>F</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> </table> | A | B | F | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | |
| A | B | F | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | 0 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | 1 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 0 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| OR, АБО, 1 | | $F = A + B =$ $= A \vee B$ | <table border="1"> <tr><td>A</td><td>B</td><td>F</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> </table> | A | B | F | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| A | B | F | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | 0 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | 1 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 0 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| NOT, HI | | $F = \bar{A}$ | <table border="1"> <tr><td>A</td><td>F</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td></tr> </table> | A | F | 0 | 1 | 1 | 0 | | | | | | | | | | |
| A | F | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

| Змінна A |  | $F=A$ | <table border="1"> <thead> <tr> <th>A</th> <th>F</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>1</td> </tr> </tbody> </table> | A | F | 0 | 0 | 1 | 1 |  |
|-------------|---|-------|--|---|---|---|---|---|---|---|
| A | F | | | | | | | | | |
| 0 | 0 | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | | | | | | | | | |
| Константа 0 |  | $F=0$ | <table border="1"> <thead> <tr> <th>A</th> <th>F</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table> | A | F | 0 | 0 |  | | |
| A | F | | | | | | | | | |
| 0 | 0 | | | | | | | | | |
| Константа 1 |  | $F=1$ | <table border="1"> <thead> <tr> <th>A</th> <th>F</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>1</td> </tr> </tbody> </table> | A | F | 1 | 1 |  | | |
| A | F | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | | | | | | | | | |

20. Загальна характеристик комбінаторних задач

20.1. Основні положення

Під комбінаторикою звичайно розуміють розділ дискретної математики, присвячений розв'язанню задач про вибір та розміщення елементів скінченної множини згідно із заданими правилами. У результаті створюються необхідні комбінаторні об'єкти чи конфігурації. Характерними властивостями цих об'єктів є те, що вони відповідають деяким обмеженням щодо них, і тому завжди можна розпізнати дозволений комбінаторний об'єкт, який відповідає правилам його побудови, і недозволений, який не відповідає цим правилам.

З комбінаторикою мають справу хіміки при вивченні різних можливих типів зв'язків атомів у молекулах; біологи, наприклад, у процесі знаходження послідовностей амінокислот у білкових сполуках; кібернетики при розв'язанні задач кодування й побудові обчислювальних пристроїв, математики — при розв'язанні багатьох різних задач, особливо в теорії ймовірності. Також комбінаторику використовують у своїх моделях фізики, архітектори, економісти й представники багатьох інших наук.

20.2. Комбінаторні задачі

У комбінаториці є декілька задач, які вирішуються послідовно одна за одною. Перша з них спочатку формулює вимоги до класу комбінаторних конфігурацій, які потрібно побудувати. Доводиться, що хоча б одна така конфігурація існує, незважаючи на те, що побудувати таку конфігурацію може бути досить непросто. Тому інколи буває достатньо теоретичного доведення її існування.

Після розв'язання першої задачі комбінаторики розв'язується не менш важлива друга - задача переліку комбінаторних об'єктів, які відповідають вихідним правилам їх побудови. Саме на розв'язання цієї задачі спрямовані сьогодні зусилля багатьох учених. Є досить багато задач, які так чи інакше стосуються цієї загальної задачі.

Наприклад, до неї належить питання про кількість різних способів, якими можна розмістити групу студентів з 30 чоловік на 30 чи більше місцях, або про кількість способів проведення матчів з футболу між 10 різними командами?

Далі на основі отриманих розв'язків конкретних задач з переліку комбінаторних об'єктів розв'язується третя задача комбінаторики - це її побудова. Наприклад, потрібно не лише підрахувати кількість можливих варіантів розподілу 30 студентів на 30 місцях, а й побудувати всі ці розподіли або деякі з них у вигляді їх комбінаторних конфігурацій. Також може виникнути потреба побудувати таблицю матчів між 10 футбольними командами, а не тільки знати їх кількість.

Четверта і остання задача комбінаторики - це задача про пошук серед комбінаторних конфігурацій такої, яка б приводила деяку функцію до оптимуму. Це на сьогодні досить нелегка для розв'язання загальна задача. Вона містить задачі комбінаторної оптимізації, наприклад, задачу комівояжера, яка на сьогодні ще не має остаточного розв'язання, хоча на її ґрунті сформульований клас складних переборних задач.

20.3.Правило Суми

В основі розв'язання багатьох задач комбінаторики лежать два простих правила - правило Суми та правило Добутку.

Правило Суми стверджує, що якщо є можливість вибрати елемент з деякої множини елементів A m способами, а елемент з множини B , яка не має спільних елементів з множиною A , - k способами, то вибрати елемент множини A або елемент множини B можна $m + k$ способами.

Це правило зручно продемонструвати з допомогою такої моделі. Якщо маємо дві урни і в одній з них знаходиться m куль, а в іншій k , то кількість способів, якими можна буде вийняти кулю з тієї чи іншої урни, дорівнюватиметься $m + k$. Дійсно, з першої урни кулю можна вийняти m способами, але якщо з першої урни кулю не виймати, то тоді з другої урни її можна вийняти k способами. Тому загальна кількість способів, якими можна вийняти одну кулю з двох урн, буде дорівнювати $m + k$.

У загальному випадку правило Суми може бути сформульоване таким чином.

Якщо треба виконати якусь дію n_1 , n_2 , або n_k способами, то кількість можливих способів реалізації цієї дії буде дорівнювати

$$N = n_1 + n_2 + \dots + n_k. \quad (109)$$

Особливістю цього правила є те, що воно використовує сполучник або, який протиставляє різні дії одна одній.

Приклад 1. На денне чергування в студентському гуртожитку може піти або студент з кімнати 1, де проживають три студенти, або студент з кімнати 2, де проживають чотири студенти. Скількома способами можна вибрати одного студента на денне чергування в гуртожитку?

Розв'язання. Загальна кількість способів, якими можна вибрати одного студента або з кімнати 1 або з кімнати 2 на денне чергування, згідно з правилом Суми буде $3+4 = 7$.

20.4. Правило Добутку

Правило Добутку використовується тоді, коли кожний елемент множини А може бути вибраний разом з елементом множини В. Відповідно до кожного способу вибору елемента множини А буде зіставлятися к способів вибору елемента множини В. Тоді загальна кількість способів сумісного вибору елементів множини А з елементами множини В, очевидно, дорівнюватиме $m \cdot k$.

Модель урн можна застосувати і для ілюстрації правила Добутку. У цьому випадку розглядаються дві урни, у першій з яких знаходиться m куль, а в другій k . Будемо вважати, що будь-якій кулі першої урни може відповідати будь-яка куля з другої урни. А оскільки в першій урні знаходиться m куль, то й кількість способів вибору куль з першої урни разом з різними кулями з другої урни буде дорівнювати $m \cdot k$. У загальному вигляді правило Добутку буде мати такий вигляд.

Якщо треба виконати якусь дію, що може бути виконана к сумісними діями, перша з яких може бути виконана n_1 способами, друга – n_2 і т.д. до k -ої дії, яку можна виконати n_k способами, то основна дія може бути виконана M способами, де

$$M = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k \quad (110)$$

У цьому правилі важливу роль відіграє сполучник і, який об'єднує різні дії в одну.

Приклад 2. На денне чергування в студентському гуртожитку вибирається два студента - один студент з трьох, що проживають у кімнаті 1, і один студент з чотирьох, які проживають у кімнаті 2.

Скільки існує можливих способів формування різних пар з двох студентів для чергування?

Розв'язання. Кількість способів чергувань двох студентів з різних кімнат відповідно до правила Добутку буде дорівнювати 12.

21. Елементарні комбінаторні конфігурації

21.1. Сполучення

Припустимо, що S є множина, яка утворюється з n елементів.

Кожна її підмножина з k елементів, має назву сполучення k елементів з n , де n, k - цілі додатні числа $0, 1, \dots; n > k$. Кількість усіх можливих сполучень k елементів з n називають біноміальним коефіцієнтом і позначають як C_n^k . Чому цей коефіцієнт одержав таку назву, буде з'ясовано пізніше.

Так, якщо елементами деякої множини будуть літери a, b, c, d, e , то з них можна отримати такі сполучення: $abc, abd, abe, acd, ace, ade, bcd, bce, bde, cde$, кількість яких, як це видно з їх переліку, $C_5^3=10$.

Різні сполучення відрізняються одне від одного лише складом елементів, які їх утворюють, а порядок їх розташування в сполученнях не відіграє ролі. Наприклад, послідовності $abc, acb, bac, bca, cab, cba$ являють собою одне сполучення, що складається з 3 елементів a, b, c , порядок яких у ньому не важливий.

21.2. Розміщення

Якщо порядок у послідовностях з k різних елементів, що вибираються з n елементів, має значення, то кожна з таких послідовностей буде мати назву розміщення k елементів з n без повторення. Без повторення тому, що жоден елемент розміщення не може бути представлений у ньому більше ніж один раз. Якщо ж ця

умова не виконується і елементи, що входять в розміщення, повторюються, то в такому разі отримують розміщення з повтореннями.

Наприклад, з $n = 3$ літер a, b, c можна отримати такі розміщення без повторення, кожне з яких складається з $k = 2$ елементів: ab, ba, ac, ca, bc, cb . Наведені вище шість послідовностей з трьох елементів a, b, c показують також розміщення без повторень.

21.3. Кількість розміщень

У багатьох комбінаторних задачах важливу роль виконує кількість розміщень. Тому виникає потреба в їх підрахунку.

Теорема 1. Кількість розміщень для k елементів з $n, n \geq k$,

$$A_n^k = n(n - 1) \dots (n - k + 1) \quad (111)$$

Доведення. Перший елемент розміщення з n , можна обрати n способами, другий $n - 1$ і т.д. до k -го елемента, який може бути обраний $n - k + 1$ способами, оскільки в момент вибору k -го елемента залишилось $n - (k - 1) = n - k + 1$ елементів. У результаті кількість способів, якими можна обрати k елементів з n -елементної множини, а отже, і кількість розміщень

$$A_n^k = n(n - 1) \dots (n - k + 1) \quad (112)$$

Теорему доведено.

Розміщення, для якого $k = n$, має назву перестановки. Кількість Перестановок

$$P_n = A_n^n = n! = n(n - 1) \dots 1 \quad (113)$$

Теорема 2.

$$A_n^k = P_k C_n^k = k! C_n^k \quad (114)$$

Доведення. Кожному сполученню k елементів з n відповідає $P_k = k!$ перестановок, а всі можливі перестановки для всіх сполучень утворюють усі розміщення k елементів із n . Тому

$$A_n^k = P_k C_n^k = k! C_n^k \quad (115)$$

Теорему доведено.

Приклад 1. Скільки шестизначних чисел, кратних п'яти, можна скласти із цифр 1, 2, 3, 4, 5 за умови, що в числі цифри не повторюються?

Розв'язання. Для того щоб шестизначне число, яке складається з наданих цифр, ділилось на 5, необхідно і достатньо, щоб цифра 5 в ньому стояла на останньому місці. Інші 5 цифр можуть стояти на місцях, які залишилися, у будь-якому порядку.

Отже, кількість шестизначних чисел, кратних 5, дорівнює кількості перестановок з 5 елементів, тобто

$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Приклад 2. Студенти вивчають 14 предметів. Скільки існує способів, якими можна скласти розклад занять на суботу, якщо в цей день неділі повинно бути 5 різних занять?

Розв'язання. Різних способів складення розкладу, очевидно, буде стільки, скільки існує впорядкованих підмножин з п'яти елементів чотирнадцятиелементної множини. Кожна така упорядкована підмножина в цьому випадку буде зображати одне розміщення.

Отже, кількість способів складання розкладу занять дорівнює кількості розміщень 5 елементів з 14:

$$A_{14}^5 = 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 = 240240$$

21.4. Кількість сполучень

Теорема 3. Кількість сполучень для k елементів із n

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (116)$$

Доведення. З теореми 2 випливає, що

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{A_n^k}{k!} \quad (117)$$

А з теореми 1, що

$$A_n^k = n(n-1) \dots (n-k+1). \quad (118)$$

Тому

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (119)$$

Теорему доведено.

Прийнято вважати, що $0! = 1$, тому

$$C_0^0 = \frac{n!}{n!0!} = \frac{n!}{n!1} = 1 \quad (120)$$

$$C_0^0 = \frac{0!}{0!0!} = \frac{1}{1 \cdot 1} = 1 \quad (121)$$

Приклад 3. Скільки комісій, які складаються із 7 членів, можна створити з 15 викладачів?

Розв'язання. Очевидно, стільки, скільки існує сполучень з 14 викладачів по 7

$$C_{14}^7 = \frac{14!}{7!7!} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 3432$$

22. Властивості біноміальних коефіцієнтів

22.1. Властивість симетрії

Теорема 1

$$C_n^k = C_n^{n-k} \quad (122)$$

Доведення. Після того, як підставимо $n-k$ замість k у формулу, яке обчислює біноміальні коефіцієнти, одержимо

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = C_n^{n-k} \quad (123)$$

Теорему доведено.

Ця властивість відома як властивість симетрії біноміальних коефіцієнтів. Її особливість полягає в тому, що не має значення, як обирати елементи: з n по k або з n по $n - k$. У тому чи іншому випадку кількість підмножин буде однакою.

22.2. Властивості додавання

Теорема 2.

$$C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k \quad (124)$$

Доведення.

$$C_n^{k+1} + C_n^k = \frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!} + \frac{n!}{(n-k)!k!} =$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!(k+1)!} \left(\frac{n-k}{1} + \right. \\ \left. + \frac{k+1}{1} \right) = \frac{(n+1)!}{(n+1-(k+1)!(k+1)!} = C_{n+1}^{k+1} \quad (125)$$

Теорему доведено.

Доведення даної теореми також можна отримати, якщо виходити з таких міркувань.

Число C_{n+1}^{k+1} визначає кількість тих підмножин з $k+1$ елементів, які можуть бути обрані з множини, що містить $n+1$ елементів.

Оберемо один з цих елементів, наприклад, x та розкладемо початкову (вихідну) множини з C_{n+1}^{k+1} підмножинами на два класи, один з яких містить у своїх підмножинах елемент x , а другий ні.

У першому класі елемент x присутній у всіх без винятку підмножинах. Це означає, що він просто приєднується до k елементів, які тепер обираються не з $n+1$ елементів, як це було до розкладу на два класи, а з n (елемент x під час їх вибору відсутній). Тому кількість підмножин у першому класі дорівнює C_n^k .

Оскільки елемент x у другому класі відсутній, то підмножини, які до нього належать, не містять цього елемента, хоча й без нього до них належать $k+1$ елементів, однак вони вибираються не з $n+1$ елементів, а з n . Тому кількість підмножин у другому класі дорівнює C_n^{k+1} .

Відповідно сума підмножин першого та другого класу

$$C_n^{k+1} + C_n^k = C_{n+1}^{k+1} \quad (126)$$

що й доводить початкове твердження.

Теорема 3.

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + \dots + C_{k-1}^{k-1} = \sum_{i=0}^{n-k} C_{k+i-1}^{k-1} \quad (127)$$

Доведення.

На основі теореми 2 запишемо рівності:

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}, \quad C_{n-1}^k = C_{n-2}^{k-1} + C_{n-2}^{k-2} + \dots + C_{k+2}^k = C_{k+1}^k + C_{k+1}^{k-1}, \quad (128)$$

$$C_{k+1}^k = C_k^k + C_k^{k-1} \quad (129)$$

Оскільки

$$C_k^k = C_{k-1}^{k-1} = 1, \quad (130)$$

То після підстановки виразу для C_{k+1}^k у вираз для C_{k+2}^k , отримаємо:

$$C_{k+2}^k = C_k^k + C_k^{k-1} + C_{k+1}^{k-1} = C_{k+1}^{k-1} + C_k^{k-1} + C_k^k = C_{k+1}^{k-1} + C_k^{k-1} + C_{k-1}^{k-1} \quad (131)$$

Після того, як підставимо коефіцієнти для C_{k+2}^k у попередню йому рівність

$$C_{k+3}^k = C_{k+2}^k + C_{k+2}^{k-1} \quad (132)$$

одержимо, що

$$C_{k+3}^k = C_{k+2}^{k-1} + C_{k+1}^{k-1} + C_k^{k-1} + C_{k-1}^{k-1}, \quad (133)$$

Потім таку ж саму операцію виконаємо для решти коефіцієнтів безпосередньо до i в результаті отримаємо необхідну рівність, яка доводить дану теорему.

Теорему доведено.

Теорема 4.

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-2}^{k-1} + \dots + C_{n-k+1}^2 + C_{n-k}^1 + C_{n-k-1}^0 = \sum_{i=0}^k C_{n-k+i-1}^i \quad (134)$$

Доведення. На основі рівності

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} \quad \text{і} \quad C_{n-k-1}^0 = C_{n-k}^0 = 1 \quad (135)$$

Маємо

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} \quad (136)$$

$$C_{n-k}^1 + C_{n-k}^0 = C_{n-k+1}^1, \quad (137)$$

Потім

$$C_{n-k+1}^2 + C_{n-k+1}^1 = C_{n-k+2}^2 \quad (138)$$

і так до одержання в кінцевому підсумку необхідного результату.

Теорему доведено.

22.3. Властивості винесення за дужки

Теорема 5.

При $k \neq 0, n \neq 0$

$$C_n^k = \frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1} \quad (139)$$

Доведення.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n}{k} \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \quad (140)$$

Оскільки відношення

$$\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = C_{n-1}^{k-1} \quad (141)$$

То

$$C_n^k = \frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1} \quad (142)$$

Теорему доведено.

Наслідок 1.

$$kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1} \quad (143)$$

Наслідок 2.

$$\frac{1}{n}C_n^k = \frac{1}{k}C_{n-1}^{k-1} \quad (144)$$

Теорема 6.

При $k \neq 0, n \neq 0$

$$C_n^k = \frac{n}{n-k}C_{n-1}^k \quad (145)$$

Доведення.

Відповідно до теореми 5

$$C_n^{n-k} = \frac{n}{n-k}C_{n-1}^{n-k-1} \quad (146)$$

Унаслідок теореми 1, згідно з якою

$$C_{n-1}^{n-k-1} = C_{n-1}^k \quad (147)$$

$$C_n^{n-k} = \frac{n}{n-k}C_{n-1}^k \quad (148)$$

Теорему доведено.

23. Теорія графів.

23.1. Первісні поняття теорії графів

Теорія графів пов'язана із проектуванням обчислювальних машин, комбінаторним аналізом, служить математичною моделлю для всякої системи, що містить бінарне відношення. Теорія графів застосовується при аналізі функціонування складних систем, таких як комп'ютерні й телефонні мережі, мережі залізниць, іригаційні системи. Ця теорія традиційно є ефективним апаратом формалізації задач економічної й планово-виробничої практики, застосовується в втоматизації керування виробництвом, у календарному та сітковому плануванні. У теорії графів вирішувалося багато проблем, вартих уваги самих спокушених математиків. Засновником теорії графів вважається Леонард Ейлер, що довів неможливість маршруту проходження всіх чотирьох частин суши в задачі про Кенігсбергські мости (1736 р.). Графи володіють естетичною привабливістю завдяки їхньому поданню у вигляді діаграм.

Графом G називається сукупність множин V і U , тобто

$$G = \langle V, U \rangle, \quad (149)$$

де носій V – множина вершин, а сигнатура U – множина дуг або ребер графа.

Дуга – лінія з орієнтацією, що з'єднує дві вершини графа.

Ребро – лінія без орієнтації, що з'єднує дві вершини графа.

Графи можна розбити на дві великі групи: орієнтовані (орграфи) і неорієнтовані графи.

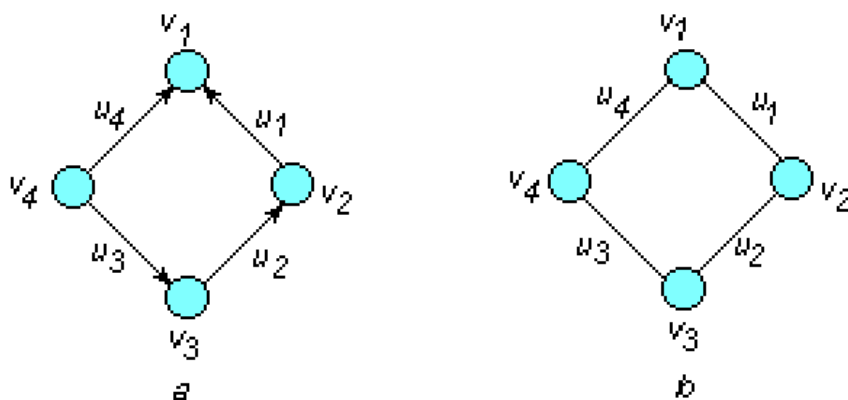


Рисунок 23. Орієнтований граф (а), неорієнтований граф (b)

Орієнтований граф $G = \langle V, U \rangle$ (рис. 23.а) має:

$$\text{множину вершин } V \{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \quad (150)$$

$$\text{множину дуг } U \{u_1, u_2, u_3, u_4\} = \{(v_2, v_1), (v_3, v_2), (v_4, v_3), (v_4, v_1)\}. \quad (151)$$

У дузі (v_i, v_j) v_i – початок дуги, v_j – кінець дуги.

Неорієнтований граф $G = \langle V, U \rangle$ (рис. 23.б) має:

$$\text{множину вершин } V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \quad (152)$$

$$\text{множину ребер } U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\} = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_1, v_4)\}. \quad (153)$$

Дуга (ребро) u , з'єднана з вершиною v , називається інцидентною вершині v , а вершина v – інцидентною дузі (ребру) u .

Дві дуги (ребра) називаються суміжними, якщо вони інцидентні одній й тій же вершині.

Дві вершини графа називаються суміжними, якщо вони з'єднані ребром (дугою). Вершини графа можуть бути з'єднані двома й більше ребрами або дугами:



кратні ребра.

Рисунок 24. Кратні ребра графа

Граф, що містить кратні ребра, називається мультиграфом.



*кратні дуги
(строго паралельні)*



*кратні дуги
(не строго паралельні)*

Рисунок 25. Кратні дуги графа

Число вершин графа називається його порядком. Ступенем $s(v)$ вершини v називається число дуг (ребер), інцидентних цій вершині.

Граф може мати петлі:



Рисунок 26. Петлі графа

Петля дає в ступінь вершини внесок 2.

Якщо ступінь вершини дорівнює нулю, то вершина називається ізольованою, а якщо одиниці – висячою.

Граф, що складається з однієї ізольованої вершини, називається тривіальним.

Граф називається однорідним ступеня k , якщо ступені всіх його вершин рівні k . Граф без петель і кратних ребер (строго паралельних дуг) називається простим графом, з петлями й кратними ребрами (строго паралельними дугами) – псевдографом. Граф називається повним, якщо всі його вершини попарно суміжні. Повний граф позначають через K_n , де n – число вершин.

Приклад.

Задано орієнтований граф $G = \langle V, U \rangle$, у якого

$$V = \{ v_1, v_2, v_3, v_4 \}, \quad (154)$$

$$U = \{ (v_1, v_2), (v_2, v_2), (v_3, v_1), (v_3, v_2), (v_4, v_1), (v_4, v_3) \}. \quad (155)$$

Чи є заданий граф G повним, однорідним? Визначити ступінь вершини v_2 .

Знаючи множину вершин V і множину дуг U , завжди можна побудувати граф G (рис. 26)

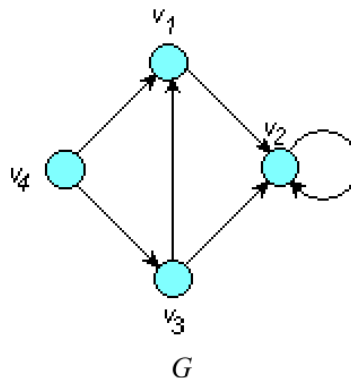


Рисунок 26. Неповний граф

Заданий граф G не є повним, тому що не всі вершини попарно суміжні: вершини v_2 і v_4 не суміжні. Граф G не є однорідним, тому що не всі ступені його

вершин мають однакове значення. Ступінь вершини v_2 дорівнює 4, тобто $s(v_2)=4$, тому що цій вершині інцидентні дві дуги й ця вершина має петлю.

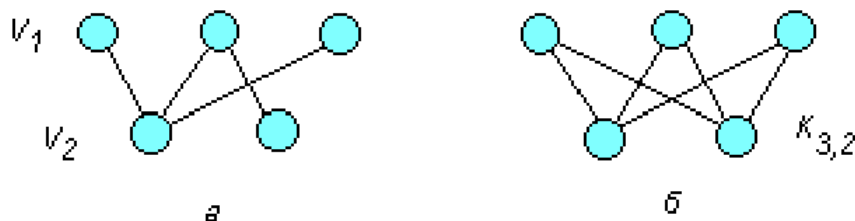


Рисунок 27. Двочастковий граф

Двочастковий граф називається повним, якщо кожна вершина з V_1 з'єднана з кожною вершиною з V_2 і навпаки й позначається $K_{m,n}$, де m – число вершин V_1 , а n – число вершин V_2 (рис. 27.б).

Граф $K_{m,n}$ має $m + n$ вершин і $m \cdot n$ ребер. Граф $K_{1,n}$ називається зірковим графом. Граф $G' = \langle V', U' \rangle$ є частиною графа $G = \langle V, U \rangle$, якщо $V' \subseteq V$, $U' \subseteq U$. Частина графа G' може збігатися із самим графом G (також як у теорії множин $M' \subseteq M$). Граф, отриманий із графа G видаленням деяких вершин і інцидентних їм дуг (ребер) називається підграфом графа G . Підграф, що містить всі вершини графа, називається остовним підграфом. Підграф також є частиною графа. Множина вершин, суміжних з вершиною v_α , називається її околицею (околицею одиничного радіуса, перетином) і позначається Γv_α . Тоді граф G можна визначити як сукупність множини вершин і множини їхніх околиць, тобто

$$G = \langle V, \Gamma \rangle . \quad (156)$$

Приклад. Визначити околицю вершини v_3 графа, зображеного на рисунку

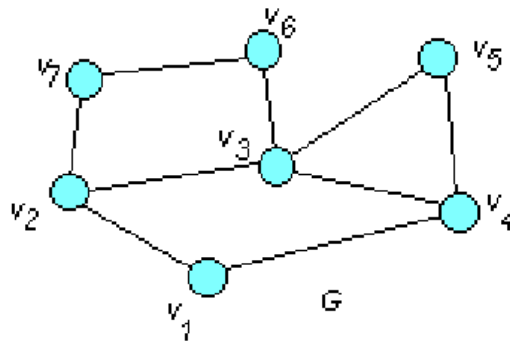


Рисунок 28. Граф з вершиною v_3

Суміжними з вершиною $v_3 \in$ вершини v_2, v_4, v_5, v_6 .

Тому

$$\Gamma v_3 = \{v_2, v_4, v_5, v_6\}. \quad (157)$$

Два графи G і G_1 називаються ізоморфними, якщо між множинами їхніх вершин існує така взаємно однозначна відповідність, при якій ребрами з'єднані вершини в G і тільки в G тому випадку, якщо в іншому графі ребрами з'єднані ті ж вершини. Для орграфів орієнтація дуг також повинна бути однаковою.

Інакше кажучи, графи G і G_1 ізоморфні, якщо для них зберігається відношення інцидентності.

Приклад. Показати, що графи G і G_1 (рис. 29) ізоморфні.

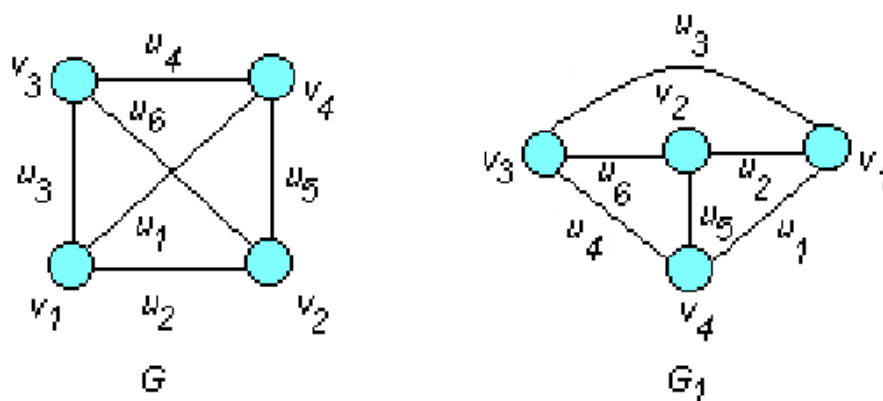


Рисунок 29. Ізоморфні графи

Перевіримо для цих графів збереження відносини інцидентності.

Граф G :

вершина v_1 інцидентна ребрам u_1, u_2, u_3 ;

вершина v_2 інцидентна ребрам u_2, u_5, u_6 ;

вершина v_3 інцидентна ребрам u_3, u_4, u_6 ;

вершина v_4 інцидентна ребрам u_1, u_4, u_5 .

Граф G_1 :

вершина v_1 інцидентна ребрам u_1, u_2, u_3 ;

вершина v_2 інцидентна ребрам u_2, u_5, u_6 ;

вершина v_3 інцидентна ребрам u_3, u_4, u_6 ;

вершина v_4 інцидентна ребрам u_1, u_4, u_5 .

Відношення інцидентності виконуються, виходить, графи G і G_1 ізоморфні.

Очевидно, що відношення ізоморфізму графів є відношенням еквівалентності, тобто воно рефлексивно, симетрично й транзитивно. Отже, множина всіх графів розбивається на класи так, що графи з одного класу попарно ізоморфні, а графи з різних класів не ізоморфні.

Якщо зіставити кожній вершині $v_i \in V$ графа $G = \langle V, U \rangle$ вагу w_i з множини ваг W , то одержимо множину зважених вершин

$$\{(v_i, w_i) | i = 1, 2, \dots, n\}. \quad (158)$$

Якщо зіставити кожній дузі $u_i \in U$ графа $G = \langle V, U \rangle$ вагу p_i із множини ваг P , то одержимо множину зважених дуг

$$\{(u_i, p_i) | i = 1, 2, \dots, m\}. \quad (159)$$

Сукупність множини зважених вершин і множини зважених дуг визначає зважений граф $G = \langle (V, W), (U, P) \rangle$.

Аналогічно визначається зважений неорієнтований граф.

Зовсім не обов'язково, щоб були зважені одночасно вершини і дуги (ребра) графа. Як ваги можуть використовуватися які-небудь числа, змінні, функціональні змінні.

23.2. Операції над графами. Способи завдання графів

Операції над графами

Об'єднанням графів $G_1 = \langle V_1, U_1 \rangle$ і $G_2 = \langle V_2, U_2 \rangle$ називається граф $G = \langle V, U \rangle$, у якого $V = V_1 \cup V_2$ і $U = U_1 \cup U_2$.

Приклад.

Задано граф

$$G_1 = \langle V_1, U_1 \rangle, \quad (160)$$

у якого

$$V_1 = \{a, b\}, U_1 = \{(a, b)\} \quad (161)$$

і граф

$$G_2 = \langle V_2, U_2 \rangle, \quad (162)$$

у якого

$$V_2 = \{a, d, c\}, \quad (163)$$

$$U_2 = \{(a, d), (a, c), (d, c)\}. \quad (164)$$

Знайти об'єднання $G_1 \cup G_2$ цих графів.

По визначенню

$$G_1 \cup G_2 = G = \langle V, U \rangle, \quad (165)$$

де

$$V=V_1 \cup V_2 \quad (166)$$

і

$$U=U_1 \cup U_2, \quad (167)$$

отже,

$$V=\{a,b\} \cup \{a,d,c\}=\{a,b,c,d\}, \quad (168)$$

$$U=\{(a,b), (a,d),(a,c),(d,c)\} = \{(a,b),(a, d),(a, c),(d, c)\}. \quad (169)$$

Знаючи V і U , завжди можна побудувати граф G (рис. 30) :

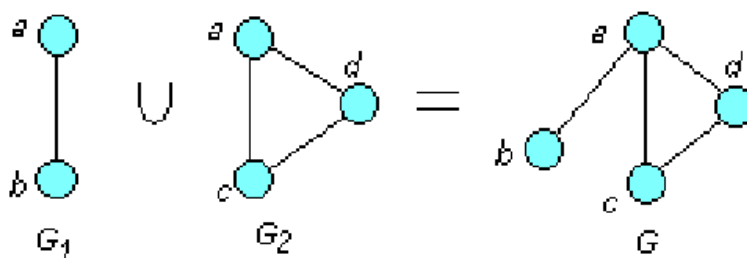


Рисунок 30. Граф G

Сумою (з'єднанням) графів $G_1 = \langle V_1, U_1 \rangle$ і $G_2 = \langle V_2, U_2 \rangle$ називається граф $G = \langle V, U \rangle$, що представляє собою об'єднання графів G_1 , G_2 і повного двочасткового графа $K_{m,n}$, побудованого на носіях $V_1 \setminus V_1 \cap V_2$ і $V_2 \setminus V_1 \cap V_2$.

Інакше кажучи, при побудові суми графів G_1 і G_2 визначається їхнє об'єднання й кожна вершина $v_i \in V_1$, що не увійшла в перетинання $V_1 \cap V_2$, з'єднується з усіма вершинами $v_i \in V_2$, що не увійшли в перетинання $V_1 \cap V_2$, і навпаки.

Приклад.

Знайти суму $G_1 + G_2$ графів G_1 і G_2 , розглянутих у попередньому прикладі.

По визначенню

$$G_1 + G_2 = G = G_1 \cup G_2 \cup K_{m,n}, \quad (170)$$

де

$$G = \langle V, U \rangle. \quad (171)$$

Тоді,

$$V = V_1 \cup V_2 \cup V_k \quad (172)$$

$$U = U_1 \cup U_2 \cup U_k, \quad (173)$$

де V_k і U_k – множина вершин і множина ребер повного двочасткового графа $K_{m,n}$ відповідно. У двочастковому графі множина вершин розбита на дві непересічні підмножини V_{k1} й V_{k2} , тобто

$$V_k = V_{k1} \cup V_{k2}, \quad (174)$$

причому

$$V_{k1} = V_1 \setminus V_1 \cap V_2 \quad (175)$$

і

$$V_{k2} = V_2 \setminus V_1 \cap V_2. \quad (176)$$

Визначаємо V_{k1} , V_{k2} :

$$V_{k1} = \{a, b\} \setminus \{a, b\} \cap \{a, d, c\} = \{b\}, \quad (177)$$

$$V_{k2} = \{a, d, c\} \setminus \{a\} = \{d, c\}. \quad (178)$$

Тоді

$$V_k = \{b\} \cup \{d, c\} = \{b, d, c\}, \quad U_k = \{(b, d), (b, c)\}. \quad (179)$$

Повний двочастковий граф має вигляд

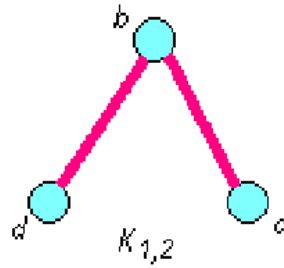
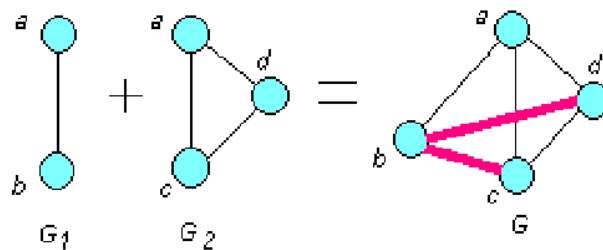


Рисунок 31. Повний двочастковий граф

Поєднуючи три графи $G_1, G_2, K_{1,2}$, одержимо шуканий граф G (рис. 32):

Рисунок 32. Шуканий граф G

У графі G тонкими лініями виділені ребра графа, що є об'єднанням графів G_1 і G_2 (порівн. з рис. 30), товстими лініями – ребра повного двочасткового графа $K_{1,2}$.

Добутком графів

$$G_1 = \langle V_1, U_1 \rangle \quad (180)$$

і

$$G_2 = \langle V_2, U_2 \rangle \quad (181)$$

називається граф

$$G = \langle V, U \rangle, \quad (182)$$

у якого

$$V = V_1 \times V_2 = \{(v_{1i}, v_{2j}) \mid v_{1i} \in V_1, v_{2j} \in V_2\}, \quad (183)$$

а множина ребер U визначається у такий спосіб :

вершини (v_{1m}, v_{2n}) і (v_{1p}, v_{2k}) суміжні в графі G тоді й тільки тоді, коли або $v_{1m} = v_{1p}$, а v_{2n} і v_{2k} суміжні в G_2 , або v_{1m} і v_{1p} суміжні в G_1 , а $v_{2n} = v_{2k}$.

Приклад.

Знайти добуток $G_1 \times G_2$ графів G_1 і G_2 , у яких

$$V_1 = \{x_1, x_2\}, \quad (184)$$

$$U_1 = \{(x_1, x_2)\}, \quad (185)$$

$$V_2 = \{y_1, y_2, y_3\}, \quad (186)$$

$$U_2 = \{(y_1, y_2), (y_2, y_3)\}. \quad (187)$$

Відповідно до визначення добутку графів :

$$\begin{aligned} V &= V_1 \times V_2 = \{x_1, x_2\} \times \{y_1, y_2, y_3\} = \\ &= \{(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_1, y_3), (x_2, y_1), (x_2, y_2), (x_2, y_3)\}. \end{aligned} \quad (188)$$

З огляду на правило побудови множини ребер U графа G , одержимо:

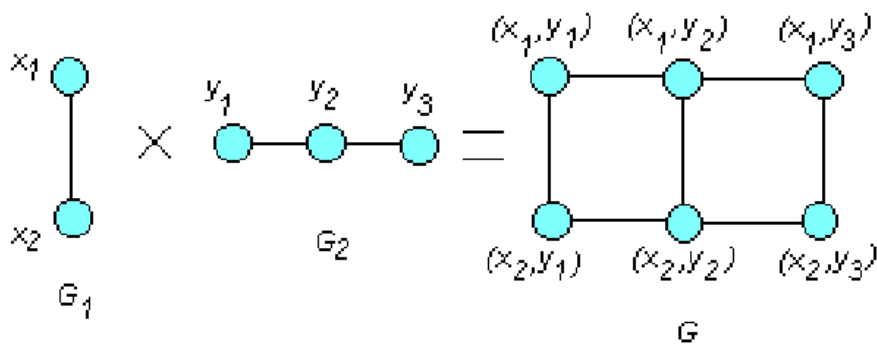


Рисунок 33. Правило побудови множини ребер U графа G

За допомогою операції добутку можна ввести одиничні n – мірні куби – один із класів графів. Зазначений n – мірний куб H_n уводиться рекурентно:

$$H_1 = K_2, H_n = K_2 \times H_{n-1}, n > 1 \quad (189)$$

де K_2 – повний граф із числом вершин, рівним двом.

Таким чином, H_n – граф порядку $2n$, вершини якого можна представити векторами довжини n , причому такими, що вектори, що відповідають двом

суміжним вершинам, будуть різнитися рівно в одній координаті. На рисунку 34 представлені куби H_2 і H_3 :

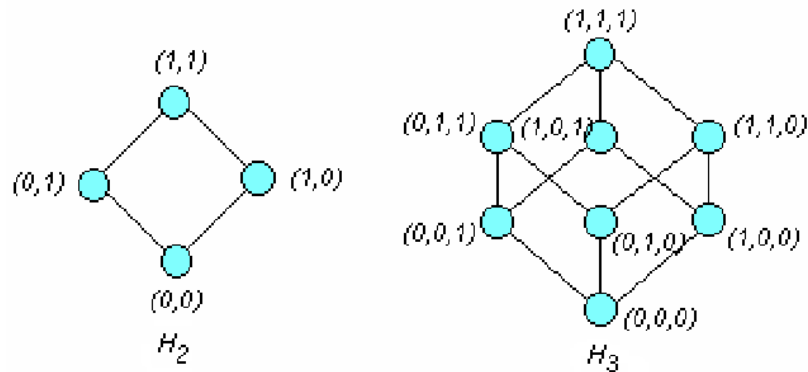


Рисунок 34. Куби H_2 і H_3

З рисунка видно, що кожна вершина n – мірного куба інцидентна n ребрам. Отже, число ребер n – мірного куба дорівнює $n \cdot n^{2n-1}$.

23.3. Способи завдання графів

У переважній більшості випадків граф задається матрицею. Для розрахунків на ЕОМ це єдиний спосіб.

Якщо граф $G = \langle V, U \rangle$ має n вершин і m дуг, то матриця інциденцій

$$A(G) = \|a_{ij}\|_{m \times n} \quad (190)$$

визначається в такий спосіб :

$$a_{ij} \begin{cases} 1, \text{ якщо вершина } v_j \text{ – початок дуги } u_i; \\ -1, \text{ якщо вершина } v_j \text{ – кінець дуги } u_i; \\ 0, \text{ якщо вершина } v_j \text{ – не інцидентна дузі } u_i. \end{cases} \quad (191)$$

Якщо граф $G = \langle V, U \rangle$ має n вершин, то матриця суміжності

$$S = \|s_{ij}\|_{n \times n} \quad (192)$$

визначається в такий спосіб :

$$s_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } (v_i, v_j) \in U \\ 0, \text{ якщо } (v_i, v_j) \notin U. \end{cases} \quad (193)$$

Приклад.

Задати граф, зображений на рисунку 35, матрицею інциденцій і матрицею суміжності

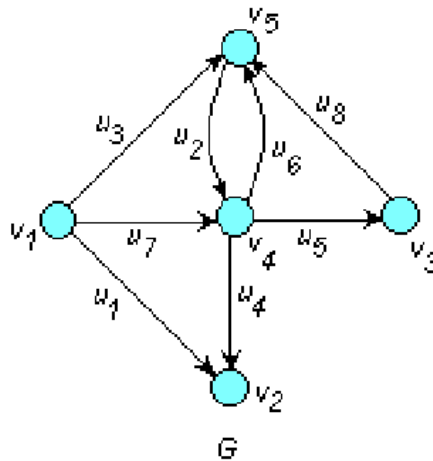


Рисунок 35. Граф, заданий матрицею інциденцій і матрицею суміжності

Використовуючи визначення матриць інциденцій і суміжності, побудуємо ці матриці :

$$A(G) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \left\| \begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right\| \begin{array}{l} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{array} \end{array} \quad (194)$$

$$S(G) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \left\| \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right\| \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \end{array} \quad (195)$$

Приклад.

Задати граф, зображений на рисунку 36, матрицею інциденцій і матрицею суміжності

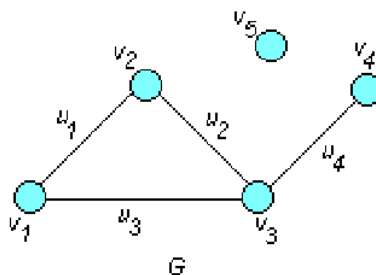


Рисунок 36. Граф, заданий матрицею інциденцій і матрицею суміжності

Заданий граф є неорієнтованим. Значить у матриці інциденцій не буде від'ємних одиниць. В іншому побудова матриць аналогічна. Матриці мають вигляд

$$A(G) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \left\| \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right\| \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{array} \end{array} \quad (196)$$

$$S(G) = \begin{matrix} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} \end{matrix} \quad (197)$$

24. Маршрути, ланцюги, цикли й інші характеристики графа

Розглянемо неорієнтований граф $G = \langle V, U \rangle$. Послідовність

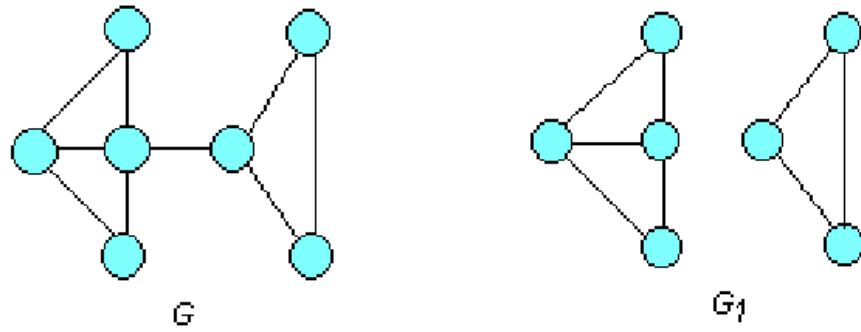
$$v_1, u_1, v_2, u_2, v_3, u_3, \dots, v_{n-1}, u_{n-1}, v_n \quad (n \geq 2) \quad (198)$$

у якій чергуються вершини й ребра і при цьому для кожного $i = 1, 2, \dots, n-1$ ребро u_i має вигляд (v_i, v_{i+1}) , називається маршрутом, що з'єднує вершини v_i і v_n .

Очевидно, що маршрут можна задати послідовністю його вершин v_1, v_2, \dots, v_n або послідовністю ребер u_1, u_2, \dots, u_{n-1} .

Число ребер у маршруті називається його довжиною $l(v_i, v_j)$ (кожне ребро рахується стільки разів, скільки разів воно зустрічається в даному маршруті).

Маршрут, у якому всі ребра різні, називається ланцюгом. Маршрут, у якому всі вершини різні, називається простим ланцюгом. Маршрут, у якому перша і остання вершини збігаються, називається замкнутим. Замкнутий маршрут, у якому всі ребра різні, називається циклом. Цикл, у якому всі вершини, крім першої і останньої, різні, називається простим циклом. Граф називається зв'язковим, якщо для будь-яких двох різних вершин існує ланцюг (маршрут, простий ланцюг), що з'єднує їх. Максимальний по включенню вершин зв'язний підграф графа називається його компонентом зв'язності. Граф є незв'язним, якщо число його компонентів зв'язності більше одного.

Приклад.Рисунок 37. Зв'язний граф G і незв'язний граф G_1 .

На рисунку 37 показані два графи G і G_1 . Граф G є зв'язним графом, тому що будь-яка пара його вершин зв'язана ланцюгом. Граф G має один компонент зв'язності.

Граф G_1 є незв'язним графом, тому що він має два компоненти зв'язності, тому будь-які дві вершини з різних компонентів зв'язності не зв'язані ланцюгом.

Відстанню $r(v_i, v_j)$ між вершинами v_i і v_j графа називається мінімальна довжина ланцюга, що з'єднує ці вершини

$$r(v_i, v_j) = \min_k l_k(v_i, v_j) \quad (199)$$

де $l_k(v_i, v_j)$ - довжини ланцюгів між вершинами v_i і v_j .

Максимальна відстань між вершинами графа G називається діаметром графа :

$$D(G) = \max_{ij} \min_k l_k(v_i, v_j) \quad (200)$$

Відстань $r(v_i, v_j)$ є метричною характеристикою графа, тобто задовольняє аксіомам метрики:

1. $r(v_i, v_j) \geq 0$, причому $r(v_i, v_j) = 0$ тоді й тільки тоді, коли $v_i = v_j$;

$$2. \quad r(v_i, v_j) = r(v_j, v_i);$$

3. справедлива нерівність трикутника:

$$r(v_i, v_j) + r(v_j, v_k) \geq r(v_i, v_k). \quad (201)$$

Приклад.

На рисунку 38 показаний граф G . Знайти відстань між вершинами v_1 і v_5 .

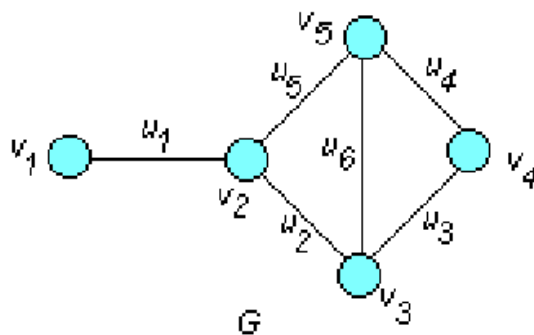


Рисунок 38. Граф G

З вершини v_1 можна потрапити у вершину v_5 по ребрах u_1, u_5 , по ребрах u_1, u_2, u_6 , по ребрах u_1, u_2, u_3, u_4 . Значить

$$l_1(v_1, v_5) = 2, \quad l_2(v_1, v_5) = 3, \quad l_3(v_1, v_5) = 4.$$

Відповідно до визначення відстані

$$r(v_1, v_5) = \min_3 \{2, 3, 4\} = 2$$

Приклад.

Знайти діаметр графа G , що показаний на рисунку 39.

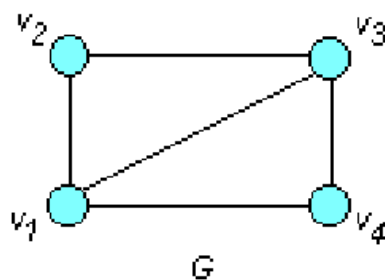


Рисунок 39. Діаметр графа G

Визначаємо відстані між вершинами :

$$r(v_1, v_2) = 1, r(v_1, v_3) = 1, r(v_1, v_4) = 1, r(v_2, v_3) = 1, r(v_2, v_4) = 2, r(v_3, v_4) = 1$$

Максимальною відстанню є відстань між вершинами v_2 і v_4 . Значить

$$d(G) = 2.$$

Деревом називається зв'язний ациклічний (тобто не має циклів) граф.

Кістяком називається остовний підграф, що є деревом.

Приклад

Граф G_1 є остовним підграфом графа G, тому що містить всі вершини. Але він не є кістяком, тому що містить цикл, тобто не є деревом. Граф G_2 є остовним підграфом графа G і є кістяком, тому що є деревом.

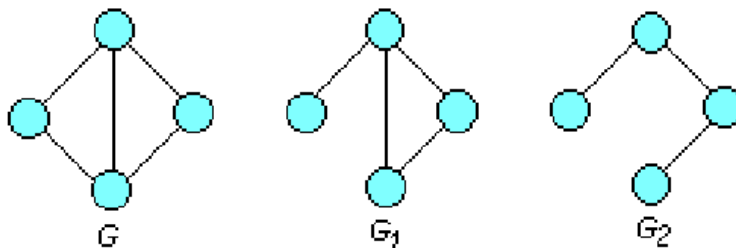


Рисунок 40. Граф G з підграфами G_1 і G_2

Якщо граф складається з декількох компонентів зв'язності, кожен з яких є деревом, то такий граф називається лісом.

Теорема Кеніга.

Граф є двочастковим тоді й тільки тоді, коли всі його цикли мають парну довжину. Зоряний граф $K_{1,n}$ є деревом. Будь-яке дерево є двочастковим графом.

Розглянемо орієнтований граф $G = \langle V, U \rangle$.

Характеристики і поняття, визначені для неорієнтованого графа, можна поширити на орієнтований граф G . Тільки в орграфі замість ланцюг прийнято говорити шлях, замість простий цикл – контур, і необхідно враховувати напрямки дуг.

Напівступенем результату вершини v орграфа G називається число дуг графа G , які виходять із вершини v .

Напівступенем заходу вершини v орграфа G називається число дуг графа G , що заходять у вершину v . Для орграфа G існують поняття зв'язності, сильної зв'язності, однобічній зв'язності. Для визначення зв'язності орієнтованого графа не треба враховувати орієнтацію дуг. Орграф G називається сильнозв'язковим (або сильним), якщо будь-яка вершина в ньому досяжна із усякої іншої його вершини (тобто зв'язані шляхами). Орграф G називається односторонньо зв'язковим (або однобічним), якщо для будь-яких двох різних його вершин щонайменше одна досяжна з іншої.

Приклад.

Орієнтовані графи G_1, G_2, G_3 є зв'язковими. Граф G_1 є сильно зв'язним графом. Граф G_2 є несильно (слабко) зв'язковим графом. Він має два компоненти сильної зв'язності: G_2' , G_2'' . Граф G_3 є односторонньо зв'язковим, тому що немає шляху з вершини v_3 у вершину v_1 .

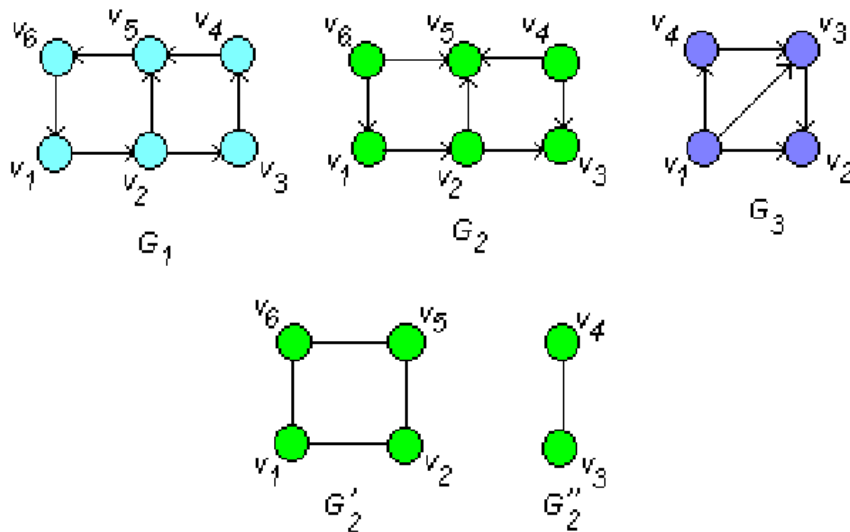


Рисунок 41. Зв'язкові графи G_1 , G_2 , G_3

25. Алгебраїчна форма подання графа

Основні принципи теорії графів використовуються для побудови математичної моделі, що виникає при проектуванні і аналізі мереж ЕОМ. Графова структура є найбільш зручною формою подання моделі мережі для користувача. Природним представляється зробити таку форму технологічною і для машини.

Така модель повинна мати наступні властивості:

- компактність подання інформації про граф;
- прив'язка до розповсюдженого математичного апарата;
- наявність ефективних методів аналізу графових відносин;
- можливість аналітичного опису функцій і структур.

З огляду на те, що вершини графа й змінні в булевій алгебрі зв'язані між собою системою відношень, скористаємося апаратом останньої для опису графових структур.

Орієнтований граф $G = \langle N, E \rangle$ є множина вершин $N = \{N_1, N_2, \dots, N_i, \dots, N_k\}$, які зв'язані між собою відношеннями, ідентифікованими сукупністю дуг $E = \{E_1, E_2, \dots, E_r, \dots, E_n\}$, де кожна дуга задається конкатенацією двох з'єднаних

між собою вершин і позначається у вигляді $E_r = E_i \cap E_j$ або $E_i \wedge E_j$, або $E_i \& E_j$, або $E_i \cdot E_j$, або $E_i E_j$.

Орієнтована дуга $H_i \& H_j$, що зв'язує дві вершини в графі, де H_i – джерело, а H_j – стік, називається імплікативним відношенням.

Якщо α, β - множини вершин або дуг, що належать графу G , тобто $\alpha \vee \beta$ диз'юнкція або об'єднання цих множин.

Розглянемо побудову формул в алгебраїчній формі подання графа (АФПГ):

1. Символ $H_i \in H$ є формула АФПГ;
2. Символ 1 є позначенням псевдовершини і є також формулою АФПГ;
3. Якщо α, β - формули АФПГ, то $\alpha \cdot \beta$ і $\alpha \vee \beta$ також є формулами;
4. Формули використовують відкриваючу й закриваючу дужки;
5. Упорядкована сукупність вершин, з'єднана знаками імплікації, називається термом АФПГ.

Алгебраїчною формою подання графа є вирази, побудовані відповідно до зазначених вище визначень.

Для АФПГ виконуються наступні аксіоми абстрактних математичних решіток:

Аксіома 1.

Комутативність:

$$\alpha \vee \beta = \beta \vee \alpha, \alpha \wedge \beta = \beta \wedge \alpha \quad (202)$$

Остання рівність вірна для неорієнтованих графів.

Аксіома 2.

Асоціативність:

$$\alpha \vee (\beta \vee \delta) = (\alpha \vee \beta) \vee \delta \quad (203)$$

$$\alpha \wedge (\beta \wedge \delta) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \delta \quad (204)$$

Аксиома 3.

Дистрибутивність:

$$\alpha \wedge (\beta \vee \delta) = (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \delta) \quad (205)$$

$$\alpha \vee (\beta \wedge \delta) = (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \delta) \quad (206)$$

Аксиома 4.

Ідемпотентність:

$$\alpha \vee \alpha = \alpha \quad (207)$$

Аксиома 5.

Аксиома про одиничний елемент

$$\alpha \vee 1 = \alpha \quad (208)$$

$$\alpha \wedge 1 = \alpha \quad (209)$$

Для цілей структурного аналізу й синтезу графів корисними є наступні тотожності:

Тотожність 1.

Правило поглинання (мінімізації) фрагмента графа.

Якщо α, β є вирази АФПГ, що описують два фрагменти графа, то дійсними є наступні рівняння:

$$\alpha\beta \vee \beta = \alpha\beta \quad (210)$$

$$\alpha\beta \vee \alpha = \alpha\beta \quad (211)$$

На підставі аксіоми про одиничний елемент і дистрибутивний закон для першої рівності маємо

$$\alpha\beta \vee \beta = \alpha\beta \vee \beta \cdot 1 = (\alpha \vee 1)\beta = \alpha\beta \quad (212)$$

Аналогічно доводиться справедливість другої рівності.

Наслідок.

Якщо α, β вершини графа, то дуга $\alpha\beta$ поглинає будь-яку вершину, що входить у дану дугу.

Тотожність 2.

Правило конкатенації (підстановки, зчеплення).

Якщо α, β, δ є виразами АФПГ, то дійсно наступне рівняння:

$$\alpha\beta\vee\beta = \alpha\beta\vee\beta \cdot 1 = (\alpha\vee 1)\beta = \alpha\beta \quad (213)$$

$$\alpha\beta\vee\beta\delta = \alpha\beta\delta \quad (214)$$

Нехай α, β, δ є вершини графа G . Тоді вираз $\alpha\beta\vee\beta\delta$ означає, що існують спрямовані дуги, що з'єднують вершини α, β й β, δ . Але оскільки вершина β є для першої дуги стоком, а для другої – джерелом, то існує єдине рішення, коли через вершину β проходить шлях $\alpha\beta\delta$.

Тотожність 3.

Правило розкладання (декомпозиції).

Якщо α, β, δ є виразами АФПГ, що є компонентами або буквами терма, то його можна розкласти на два терма по будь-якій букві (змінній), що входить у вихідне вираження:

$$\alpha\beta\delta = \alpha\vee\alpha\beta\delta; \quad (215)$$

$$\alpha\beta\delta = \alpha\beta\vee\beta\delta; \quad (216)$$

$$\alpha\beta\delta = \alpha\beta\delta\vee\delta \quad (217)$$

Дійсно, перша й остання рівності вірні відповідно до правила поглинання. Друга вірна внаслідок застосування правила конкатенації.

Теорема.

Якщо α, β є довільні формули АФПГ, то вірним є вираз

$$\alpha\beta\alpha = \beta\alpha\beta. \quad (218)$$

Доказ:

На підставі правила конкатенації маємо

$$\alpha\beta\alpha = \alpha\beta\vee\beta\alpha, \quad (219)$$

а з урахуванням аксіоми комутативності одержуємо

$$\alpha\beta\vee\beta\alpha = \beta\alpha\vee\alpha\beta. \quad (220)$$

Після цього, використовуючи знову правило конкатенації, одержуємо необхідний вираз

$$\beta\alpha\vee\alpha\beta = \beta\alpha\beta. \quad (221)$$

Розглянута теорема визначає необхідні й достатні умови існування контуру (циклу) у графі, що представляється цікавим для розв'язання задач аналізу цифрових схем з метою розриву глобальних зворотних зв'язків і наступного ациклювання графових структур.

Наслідок.

Якщо в термі (шляху) існує вершина α , що входить у терм двічі, то всі вершини, що перебувають між вершинами α й α разом з вершиною α утворять контур або замкнутий шлях (цикл).

Терм, у якому існують тільки дві однакові вершини α й α і не існує інших вершин, називається одиничним термом.

Терм, що складається з вершин, що утворюють контур, називається контурним. Довжина контуру, що задається контурним термом, визначається числом вхідних у нього букв мінус одиниця.

Критерій суміжності вершин. Неорієнтований граф можна представити у вигляді розширення орієнтованого графа. Основна умова при цьому – якщо дві вершини α , β є суміжними, то для орієнтованої структури дана обставина припускає

наявність двох дуг:

$$\alpha\beta\vee\beta\alpha. \quad (222)$$

Лема.

Кожна пара суміжних дуг неорієнтованого графа представлена в АФПГ контуром довжини, рівної 2.

Дійсно, якщо вершини α , β суміжні, то існує шлях (орієнтована дуга) $\alpha\beta$ і навпаки $\beta\alpha$. В цьому випадку дві дуги можна записати у вигляді одного терма

$$\alpha\beta\vee\beta\alpha = \beta\alpha\vee\alpha\beta, \quad (223)$$

що є критерієм суміжності для неорієнтованого графа.

Наслідок.

Для алгебраїчної форми подання неорієнтованого графа виконується аксіома комутативності щодо операції конкатенації (кон'юнкції)

$$\alpha\wedge\beta = \beta\wedge\alpha. \quad (224)$$

Зауваження.

АФПГ є універсальний математичний апарат для аналітичного (компактного) подання графових структур, що включають фрагменти з орієнтованими, неорієнтованими дугами або без них.

Приклад.

Граф G , який представлений на рисунку 42 і відображує топологію зірки, може бути описаний за допомогою наступного рівняння алгебраїчної форми подання графа:

$$\begin{aligned}
G &= W_0 \wedge M_N \wedge W_1 \wedge M_X \vee W_2 \wedge M_N \vee W_3 \wedge M_X \vee \\
&\vee W_4 \wedge M_X \vee W_5 \wedge M_X \vee W_6 \wedge M_N \vee W_7 \wedge M_N \vee \\
&\vee M_N \wedge W_0 \vee M_X \wedge W_1 \vee M_N \wedge W_2 \vee M_X \wedge W_3 \vee \\
&\vee M_N \wedge W_4 \vee M_X \wedge W_5 \vee M_N \wedge W_6 \vee M_X \wedge W_7 = \\
&= (W_0 \vee W_1 \vee W_2 \vee W_3 \vee W_4 \vee W_5 \vee W_6 \vee W_7) \wedge M_N \vee \\
&\vee M_N \wedge (W_0 \vee W_1 \vee W_2 \vee W_3 \vee W_4 \vee W_5 \vee W_6 \vee W_7)
\end{aligned} \tag{225}$$

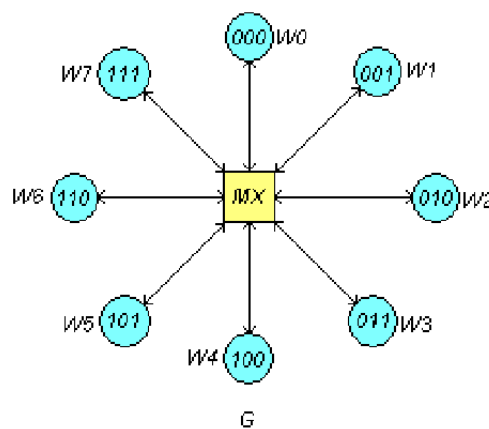


Рисунок 42. Граф G відображує топологію зірки

яке на підставі правила конкатенації можна записати:

$$\begin{aligned}
G &= (W_0 \vee W_1 \vee W_2 \vee W_3 \vee W_4 \vee W_5 \vee W_6 \vee W_7) \wedge M_N \wedge \\
&\wedge (W_0 \vee W_1 \vee W_2 \vee W_3 \vee W_4 \vee W_5 \vee W_6 \vee W_7)
\end{aligned} \tag{226}$$

Запропонована форма опису графів особливо корисна якщо буде потреба опису функцій і структур одним математичним апаратом, для якого розроблені ефективні методи аналізу.

АФПГ представляє також зручну форму для розв'язання задачі знаходження мінімального покриття шляхами всіх вершин в орієнтованому графі.

Наприклад, для структури, представленої на рисунку 43, розв'язання такої

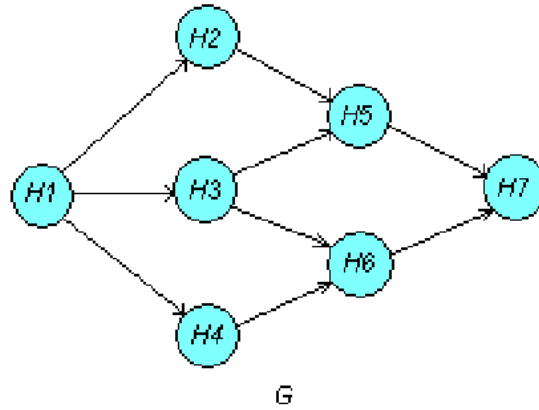


Рисунок 43. Структура графа

задачі приводить до наступного кінцевого результату:

$$G = \{H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6, H_7\} \quad (227)$$

який визначає в якості термов всі шляхи, у цьому випадку довжиною 4, у графі від вершини – джерела H_1 до вершини – стоку H_7 .

Література:

1. Бардачов Ю.М., Соколова Н.А., Ходаков В.Е. Дискретна математика: Підручник. - К.: Вища школа, 2002. - 287 с.
2. Бондаренко М.Ф., Білоус Н.В., Гуткас \ А.Г. Комп'ютерна дискретна математика: Підручник. - Х.: Компанія С-МІТ, 2004. - 480 с.
3. Борисенко О.А. Лекції з дискретної математики (множини і логіка): Навч. посіб. - Суми: Університетська книга, 2002. • 176 с.
4. Борисенко А.А. Введение в теорию биномиального счета: Монография. - Суми: ИТД «Университетская книга», 2004. - 88 с.
5. Борисенко А.А. Биномиальный счет: Монография. - Сумы: ИТД «Университетская книга», 2004. - 170 с.
6. Бородін І.О. Історія розвитку поняття про число і системи числення. - К.: Радянська школа, 1978. -- 104 с.
7. Вивальнюк Л.М., Григоренко В.К., Левіщенко С.С. Числові системи: Навч. посіб. - К.: Вища школа, 1988. -- 272 с.
8. Глушков В.М. Введение в кибернетику. - К.: Изд-во АН УССР, 1964. - 324 с.
9. Касаткин В.М. Новое о системах счисления. -К.: Вища школа, 1982. -9 6 с.
10. Кухар В.М., Білий Б.М. Теоретичні основи початкового курсу математики: Навч. посіб. - К.: Вища школа, 1980. - 360 с.
11. Математична хрестоматія. Алгебра і початки аналізу / За ред. М.І. Кованцова. - К.: Радянська школа, 1977. - 215 с.
12. Нікольский Ю.В., Пасічник В.В., Щербина Ю.М. Дискретна математика: Підручник. - Л.: Магнолія Плюс, 2006.
13. Основи дискретної математики / Ю.В. Капітонова, С.Л. Кривий, О.А. Летичевський та ін. - К.: Наукова думка, 2002. - 580 с.

14. Процай В.Ф. Новикова У.В. Комбінаторика і теорія ймовірностей у школі: Навч. посіб. - Х.: Каравела, 1997. - 192 с.
15. Спееторський І.я. Дискретна математика: Навч. посіб. - 2-ге вид. - К.: Політехніка, 2004 - 220 с.

Навчальне видання

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

з дисципліни

«КОМП'ЮТЕРНА МАТЕМАТИКА»

(для здобувачів вищої освіти спеціальності 141 «Електроенергетика,
електротехніка і електромеханіка»)

(електронне видання)

Укладач:
Ж.Г. САМОЙЛОВА

Оригінал-макет Ж.Г. Самойлова

Підписано до друку 15.05.2025.

Формат 60x84 ¹/₁₆. Папір типогр. Гарнітура Times.

Друк офсетний. Умов. друк. арк. ____ . Обл.-вид. арк. ____ .

Тираж ____ екз. Вид. № ____ . Замов. № ____ . Ціна договірна.

**Видавництво Східноукраїнського національного університету
імені Володимира Даля**

Свідоцтво про реєстрацію: серія ДК № 1620 від 18.12.03 р.

Адреса університета: вул. Іоанна Павла 2, 17
м. Київ, 01042, Україна

e-mail: vidavnictvoSNU.ua@gmail.com.