

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
СХІДНОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
імені Володимира Даля

**КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ**  
**з дисципліни**  
**"Будівельна механіка" ч.2**

*(для здобувачів вищої освіти спеціальності 192  
«Будівництво та цивільна інженерія»)  
(Електронне видання)*

**ЗАТВЕРДЖЕНО**  
на засіданні кафедри будівництва,  
урбаністики та просторового планування  
Протокол № 1 від 27.08.2024 р.

Київ 2024

УДК 539.3

Конспект лекцій з дисципліни «Будівельна механіка» ч.2 (для здобувачів вищої освіти спеціальності 192 «Будівництво та цивільна інженерія») (Електронне видання) / уклад.: Медвідь І.І. – Київ : вид-во СНУ ім. В. Даля, 2024. – 28 с.

В методичних вказівках розглядається структурний та кінематичний аналіз стержневих систем. Розрахунок статично визначних стержневих систем. Визначення реакцій у в'язях. Внутрішні сили. Визначення внутрішніх сил методом перерізів.

Статично визначні плоскі ферми. Основні поняття. Аналітичні методи визначення зусиль в елементах ферм. Графічний метод розрахунку плоских ферм.

Статично визначні рами. Основні поняття. Побудова епюр внутрішніх сил. Особливості розрахунку тришарнірних рам, рам з замкнутим контуром.

.

Укладач: І.І.Медвідь – доцент.

Рецензент: Н.І. Білошицька – доцент.

## ЗМІСТ

<b>5. СТАТИЧНО ВИЗНАЧНІ ФЕРМИ .....</b>	<b>4</b>
5.1 Основні означення .....	4
5.2 Класифікація ферм .....	4
5.3 Спосіб вирізання вузлів .....	6
5.4 Спосіб моментної точки і спосіб проєкцій .....	7
5.5 Визначення зусиль в елементах складних ферм .....	10
5.6 Графічний метод визначення зусиль в стержнях ферм .....	11
5.7 Приклади рішення задач .....	13
5.8 Завдання для самостійної роботи .....	15
5.9 Питання до самоконтролю знань .....	15
<b>6. СТАТИЧНО ВИЗНАЧНІ РАМИ .....</b>	<b>16</b>
6.1 Розрахунок консольних і балочних рам .....	16
6.2 Особливості розрахунку тришарнірних рам .....	20
6.3 Статично визначні рами із замкнутими контурами .....	20
6.4 Особливості розрахунку складених рамних систем .....	22
6.5 Приклади рішення задач .....	23
6.6 Завдання для самостійної роботи .....	25
6.7 Питання до самоконтролю знань .....	26
<b>ЛИТЕРАТУРА .....</b>	<b>27</b>

## 5. СТАТИЧНО ВИЗНАЧНІ ФЕРМИ.

### 5.1. Основні означення.

**Фермою** називається стержнева система, яка залишається геометрично незмінною після умовної заміни в розрахунковій схемі жорстких вузлів шарнірами. При цьому рахують, що осі стержнів проходять через центри шарнірів, а шарніри являються ідеально гладкими, позбавленими тертя.

Якщо навантаження на ферму передається тільки у вузлах у вигляді зосереджених сил, то воно викликає в стержнях тільки поздовжні зусилля. У випадку розподіленого або рухомого навантаження передбачається наявність на фермі додаткових елементів, які опираються на вузли ферми і передають на них навантаження.

Системи, в яких стержні сприймають тільки поздовжні сили (осьові зусилля), мають переваги в розумінні раціонального використання конструктивного матеріалу за рахунок відсутності поперечного згину.

Хоч в дійсності з'єднання стержнів у вузлах ферми при її виготовленні зварюванням не забезпечує вільного повороту їх, як це буває при шарнірному з'єднанні, порівняльні розрахунки показують, що зусилля в елементах мало відрізняються (в межах допустимої точності інженерних розрахунків) від зусиль в елементах ферми з ідеальним шарнірним з'єднанням.

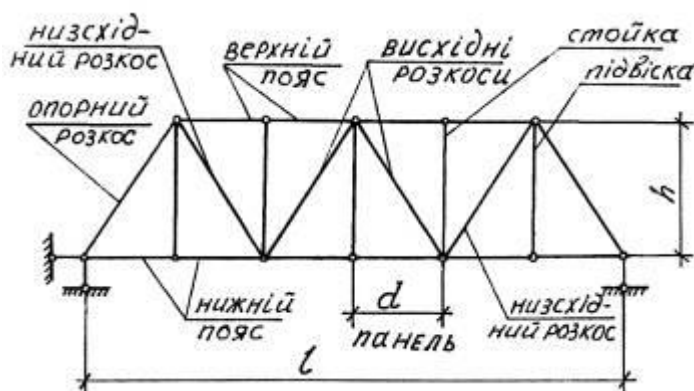


Рис. 5.1 Ферма

Нагадаємо, що в розрахунках приймається спрощене зображення дійсної споруди, тобто розрахункова схема. В фермах спрощення зводиться перш за все до того, що з'єднання у вузлах рахується ідеально шарнірним. Зауважимо, однак, що в фермах з вузлами великої жорсткості (наприклад, залізобетонних фермах) це допущення значно спотворює результати обчислень; в цьому випадку при розрахунку рекомендується враховувати жорсткість вузлів.

По розташуванню і характеру роботи в фермі виділяють **пояса** і **решітку**. Решітку утворюють похилі елементи - розкоси і вертикальні - стійки, і підвіски (рис.5.1). Стійки працюють на стиск, а підвіски - на розтяг.

### 5.2. Класифікація ферм.

Ферми класифікуються по наступних ознаках:

- по призначенню: мостові (ферми прольотних конструкцій мостів, мостових кранів), стропильні (ферми покрить будівель і споруд), ферми каркасів будівель і споруд та ін.;
- по умовах закріплення: балочні (рис. 5.2,а), консольні (рис. 5.2,б), арочні, або розпірні (рис. 5.2,в);
- по геометричній формі поясів: ферми з паралельними поясами (рис. 5.1), з трикутною (рис. 5.3,а) і полігональною (рис. 5.3,б) формою поясів;

- по системі решіток: ферми з простою решіткою - трикутною (рис. 5.4,а), (рис. 5.4,в); ферми з складною решіткою - двохрозкосні (рис. 5.4,г), багаторозкосні та інші.

Область застосування ферм достатньо широка і приведена вище класифікація не є вичерпною.

Розрахунок ферми полягає перш за все у визначенні зусиль в її стержнях. Для визначення зусиль застосовується як аналітичні, так і графічні методи.

З аналітичних методів найбільш широко застосовується **метод перерізів**.

Метод перерізів в залежності від розташування і конфігурації перерізу, а також від типу рівнянь рівноваги реалізується: способом вирізання вузлів, способом моментної точки, способом проєкцій, способом двох перерізів, способом замкнутого перерізу.

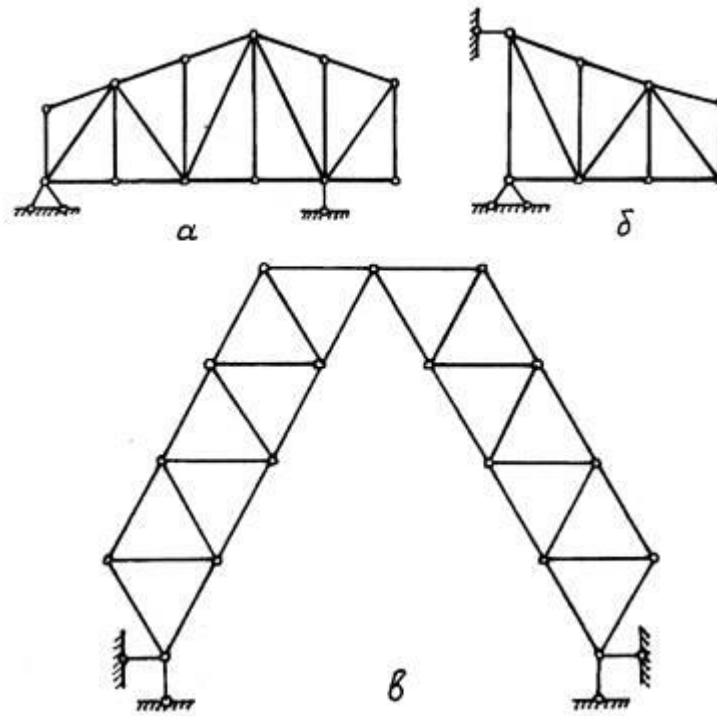


Рис. 5.2 Класифікація ферм по умовах закріплення:  
а – балочні; б – консольні; в - арочні

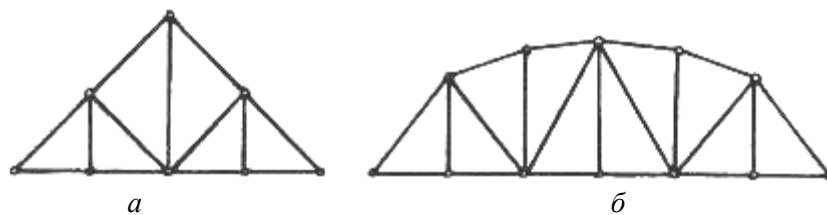


Рис. 5.3 Класифікація ферм по геометричній формі поясів:  
а - з трикутною формою поясів; б - з полігональною формою поясів;

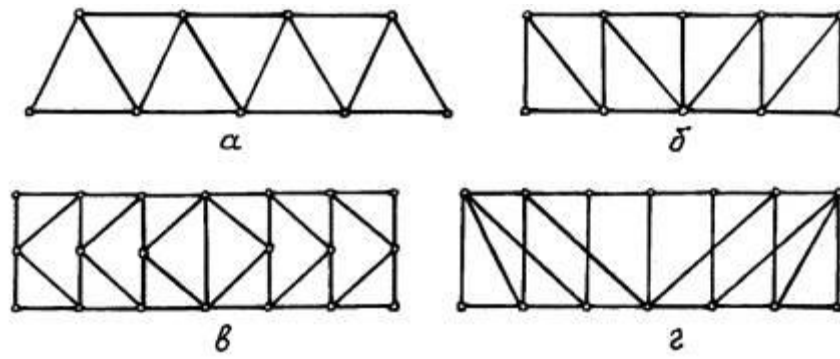


Рис. 5.4 Класифікація ферм по системі решіток:  
а, в - з трикутною решіткою; б, г - з розкосною решіткою

### 5.3. Спосіб вирізання вузлів.

Спосіб вирізання вузлів застосовується для визначення зусиль в фермах, розрахункова схема яких може бути утворена послідовним приєднанням вузлів парами стержнів (рис. 5.5,а).

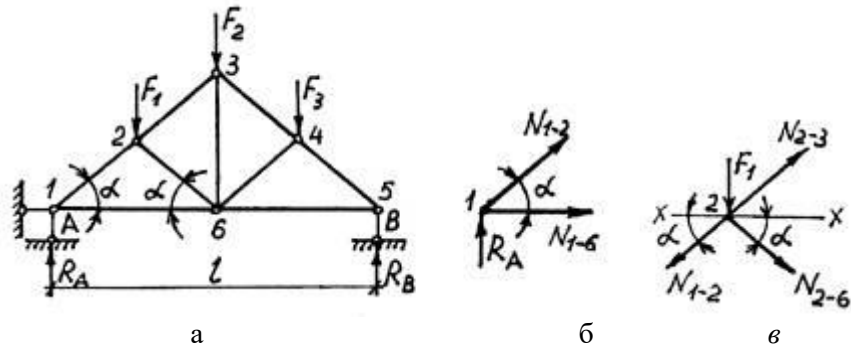


Рис. 5.5 Схема розрахунку:  
а – ферма; б - двостержневий вузол; в - трестержневий вузол

В цьому випадку розрахунок починають з двостержневого вузла, наприклад вузла 1 (рис. 5.5,б), з рівнянь рівноваги якого знаходять зусилля  $N_{1-2}$  і  $N_{1-6}$ . Потім переходять до наступного вузла, в який входять два невідомі зусилля (вузол 2 на рис. 5.5,в). Вирахувавши зусилля  $N_{2-3}$ ,  $N_{2-6}$ , продовжують розглядати слідуєчі вузли в такому порядку, щоб в кожному новому вузлі зустрічалось не більше двох невідомих зусиль (вузол 3, вузол 4, вузол 5). Після обчислення всіх зусиль залишаються невикористаними умови рівноваги (одна у вузлі 5 і дві у вузлі 6). Виконання цих умов рівноваги дозволяє судити про правильність обчислення зусиль.

Недоліками способу вирізання вузлів є залежність наступних обчислень від попередніх і поступове накопичення похибок при переході від вузла до вузла, а також його непридатність для розрахунку ферми з довільним розташуванням стержнів.

При використанні способу вирізання вузлів необхідно запам'ятати деякі випадки їх рівноваги:

- а) в не навантаженому двохстержневому вузлі (рис. 5.6,а) обидва стержні є нульовими:  $N_1 = 0$ ;  $N_2 = 0$ ;
- б) в не навантаженому трестержневому вузлі (рис. 5.6,б)  $N_1 = N_2$ , а третій стержень називається одиночним і зусилля в ньому рівне нулю:  $N_3 = 0$ ;
- в) в двохстержневому вузлі, навантаженому так, що сила  $F$  проходить по напрямку одного з стержнів (рис. 5.6,в) зусилля  $N_2 = 0$ ,  $N_1 = -F$ ;

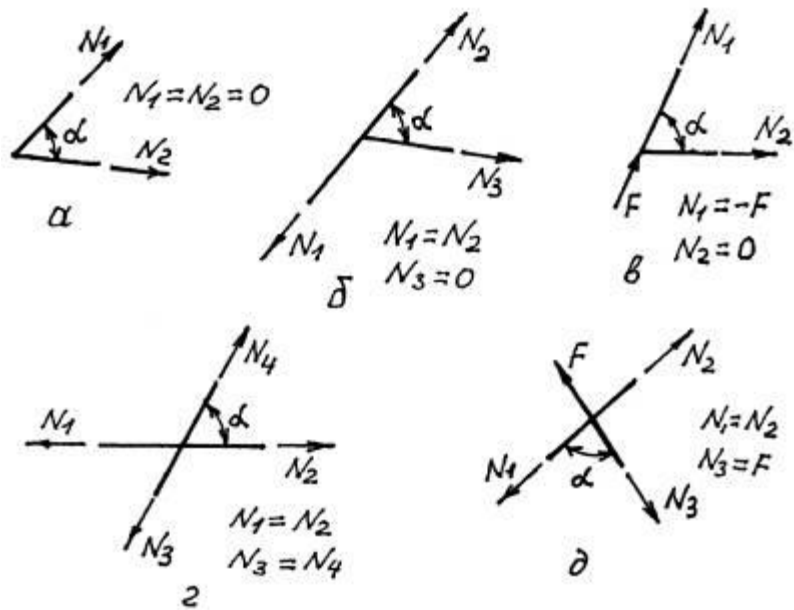


Рис. 5.6 Особисті випадки:

а - не навантажений двохстержневий вузол; б - не навантажений тристержневий вузол;  
 в – навантажений двохстержневий вузол; г - не навантажений чотирьохстержневий вузол;  
 д – навантажений тристержневий вузол

г) в не навантаженому чотирьохстержневому вузлі, в якому осі стержнів направлені по двох прямих (рис. 5.6,г) зусилля  $N_1 = N_2$ ,  $N_3 = N_4$ ;

д) в тристержневому вузлі з навантаженням  $F$ , направленим вздовж одиночного стержня (рис. 5.6,д),  $N_1 = N_2$ ,  $N_3 = F$ . У всіх випадках, приведених на рис. 5.6 кут  $\alpha$  не рівний  $0^\circ$  або  $180^\circ$ .

Стержні, в яких зусилля рівне нулю, називаються нульовими.

#### 5.4. Спосіб моментної точки і спосіб проєкцій. Розподіл зусиль в стержнях балочної ферми.

При визначенні зусиль в стержнях ферми зручно користуватися способами моментної точки і проєкцій. Їх застосування дозволяє знаходити кожне зусилля незалежно від інших.

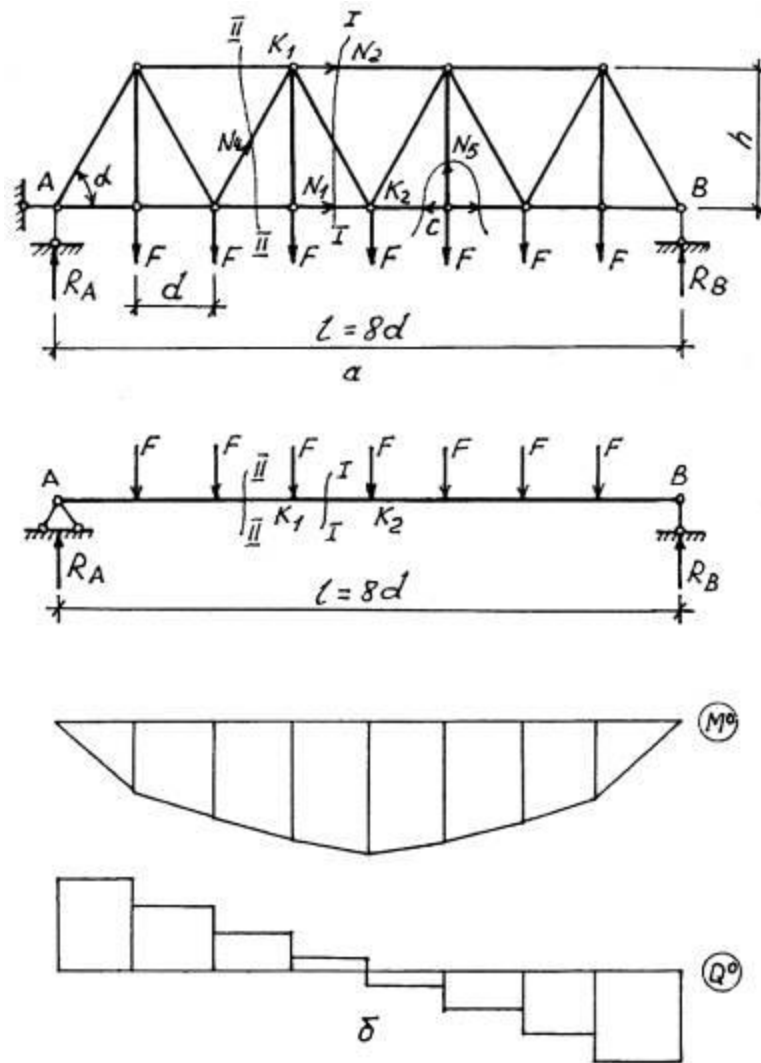


Рис. 5.7 Схеми розрахунку:  
а – ферма; б - балка

Розглянемо приклад балочної ферми з трикутною решіткою (рис. 5.7,а). Опорні реакції знаходимо з умов симетрії:

$$R_A = R_B = \sum \frac{F}{2} = 3,5F.$$

Нехай потрібно визначити зусилля в стержнях четвертої панелі, рахуючи зліва. Для обчислення цих зусиль проведемо переріз I-I, розрізаючи три стержні, і в думці відкинемо праву частину ферми.

При пошуку зусилля  $N_1$  звернемо увагу на те, що решта розрізаних стержнів перетинаються в точці  $K_1$ . Застосуємо спосіб моментної точки:

$$\sum M_{K_1} = 0, R_A \cdot 3d - F(3d + d) - N_1 h = 0. \quad (5.1)$$

Розв'язок рівняння (5.1) дає величину шуканого зусилля  $N_1 = 7,5 \frac{Fd}{h}$ .

Виконаємо аналіз рівняння (5.1). Якщо розглянути балку (рис. 5.7,б) того ж прольоту, завантажену тим же навантаженням, що і ферма, то згинальний момент в перерізі  $K_1$

$$M_{K_1}^0 = R_A \cdot 3d - F(2d + d). \quad (5.2)$$

Міняючи перші два доданки рівняння на співвідношення (5.2), отримуємо  $M_{K_1}^0 - N_1 h = 0$ , звідки

$$N_1 = \frac{M_{K_1}^0}{h}. \quad (5.3)$$

На основі (5.3) можна зробити висновки, що, по-перше, нижній пояс ферми розтягнутий, по-друге, зусилля в елементах нижнього пояса ростуть по мірі віддалення від опор до середини прольоту ферми (відповідно закону зміни балочних моментів  $M^0$ ).

Аналогічно застосовуємо спосіб моментної точки для визначення зусилля  $N_2$ :

$$\sum M_{K_2} = 0; R_A \cdot 4d - F(3d + 2d + d) + N_2 h = 0 \quad (5.4)$$

В останньому рівнянні перші два доданки являють собою балочний момент в перерізі  $K_2$ ; тоді вираз (1.30) приймає вигляд

$$M_{K_2}^0 + N_2 h = 0,$$

звідки

$$N_2 = -\frac{M_{K_2}^0}{h}. \quad (5.5)$$

Таким чином верхній пояс стиснутий, а зусилля в ньому так само, як і в нижньому поясі, міняються по закону балочних згинальних моментів.

Для визначення зусилля  $N_3$  скористаємось способом проекцій, так як решта розрізаних стержнів паралельні між собою:

$$\sum Y = 0; R_A - 3F - N_3 \sin \alpha = 0 \quad (5.6)$$

звідки знаходимо 
$$N_3 = \frac{F}{2 \sin \alpha}.$$

Зовнішні сили в рівнянні (5.6) можна виразити через балочні поперечні сили. Дійсно, по рис. 5.7,б  $Q_1^0 = R_A - 3F$ , і рівняння (5.6) приймає вигляд  $Q_1^0 - N_3 \sin \alpha = 0$ , звідки

$$N_3 = \frac{Q_1^0}{\sin \alpha}. \quad (5.7)$$

Якщо пройти таким же шляхом для визначення зусилля  $N_4$  (переріз II-II), прийдемо до аналогічного виразу

$$N_4 = -\frac{Q_2^0}{\sin \alpha} \quad (5.8)$$

На основі виразів (5.7), (5.8) приходимо до висновку, що зусилля в розкосах відповідають закону зміни балочних поперечних сил (зменшуються по абсолютній величині від опор до середини ферми). При цьому висхідні розкоси (див.  $N_4$ ) стиснуті, а низхідні ( $N_3$ )- розтягнуті.

На завершення аналізу розподілу зусиль в розглядуваній фермі, визначимо зусилля у підвісці  $N_5$ . Не важко побачити, що вузол  $C$ , в який входить підвіска, відповідає випадку рис. 5.6,д:  $N_5 = F$ .

Очевидно, що підвіски працюють в однакових умовах - всі вони розтягнуті силою, прикладеною у відповідному вузлі нижнього пояса.

Прикладом використання балочної аналогії може служити застосування ферм з полігональною формою поясів (рис. 5.8). В цьому випадку збільшення висоти ферми до середини прольоту дозволяє зробити розподіл зусиль в елементах поясів більш рівномірним

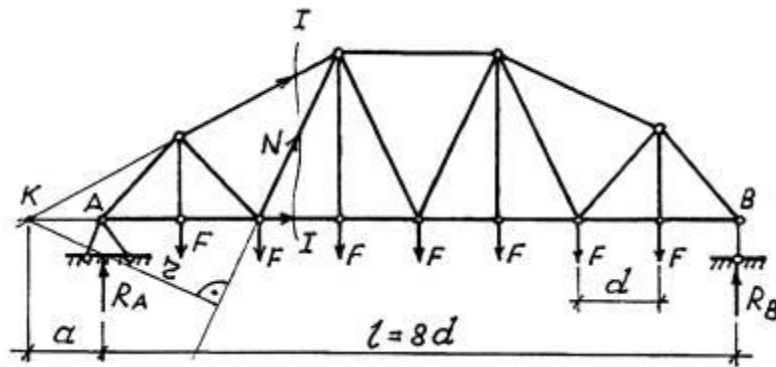


Рис. 5.8 Ферма з полігональною формою поясів

Зауважимо, що для обчислення зусиль в розкосах такої ферми способом проєкцій, як правило, скористатись не можна. Наприклад, для визначення зусилля  $N$  в розкосі третьої панелі (рис. 5.8) проведемо переріз 1-1. Перерізані при цьому стержні поясів не паралельні і при продовженні перетинаються в т.  $K$ . Тоді застосуємо спосіб моментної точки:

$$\sum M_K = 0; R_A a - F(a + d) - F(a + 2d) + Nr = 0,$$

звідки

$$N = \frac{R_A a - F(2a + 3d)}{r} = -\frac{F(1,5a - 3d)}{r}.$$

### 5.5. Визначення зусиль в елементах складних ферм.

Не завжди розрахунок ферм застосуванням розглянутих вище способів (вирізанням вузлів в класичній формі, моментної точки, проєкцій) може виявитись можливим. В деяких випадках розв'язок вдається отримати проведенням перерізу складної конфігурації, наприклад 1-1, для визначення зусиль в поясах на піврозкісній фермі (рис. 5.9). Щоб визначити зусилля  $N_1$  потрібно записати умову рівноваги для лівої від перерізу частини  $\sum m_{K_1} = 0$ , а для визначення  $N_2$  – рівняння  $\sum m_{K_2} = 0$ .

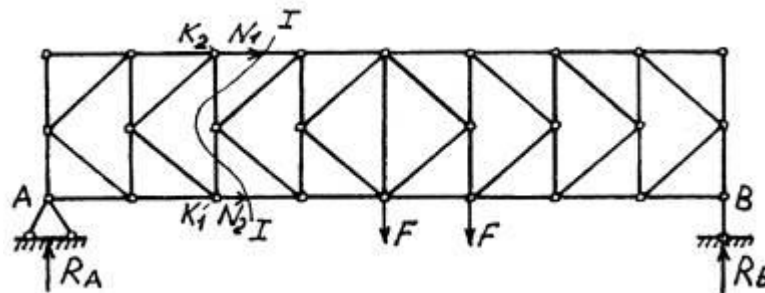


Рис. 5.9 Складна ферма

Якщо в фермі (рис. 5.10,а) можна виділити деякий диск (1-2-3), з'єднаний з рештою ферми трьома стержнями (1-4; 2-5 і 3-6), то застосовують спосіб замкнутого перерізу. Вирізуючи цей диск замкнутим перерізом, розглядаємо його рівновагу (рис. 5.10,б). Застосовуючи спосіб моментної точки, записуємо

$$\sum M_K = 0; F r_F - N_{2-5} r = 0$$

звідки

$$N_{2-5} = F \frac{r_F}{r}.$$

Далі розрахунок може бути виконаний, наприклад, способом вирізання вузлів.

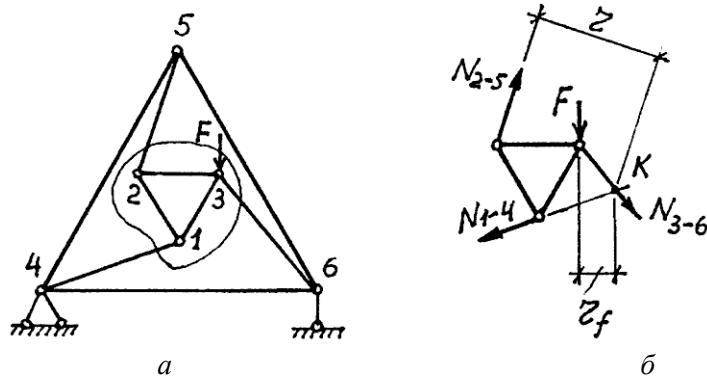


Рис. 5.10 Складна ферма:  
а – ферма; б - замкнутий переріз

Замкнутий переріз може розрізати і більше трьох стержнів, якщо інші стержні перерізаються два рази (в загальному випадку парне число разів). Так, в фермі, показаній на рис. 5.11,а, замкнутий переріз, вирізуючи диск 1-4-5, крім стержнів 1-2, 3-4, 5-6, перерізає стержні 3-6 і 2-6. Однак у вирізаній частині (рис. 5.11,б) зусилля  $N_{3-6}$  і  $N_{2-6}$  в стержнях, розрізаних два рази, утворюють самоврівноважені системи, котрі не входять в рівняння рівноваги.

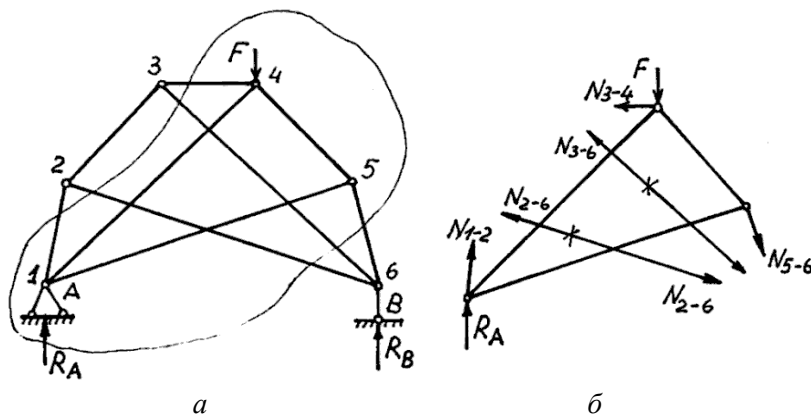


Рис. 5.11 Складна ферма:  
а – ферма; б - замкнутий переріз

## 5.6. Графічний метод визначення зусиль в стержнях ферм. Побудова діаграми зусиль.

Якщо виріжмо вузол ферми, то отримаємо групу сил, що перетинаються в одній точці (у вузлі ферми). Для такої системи сил графічна умова рівноваги полягає в тому, що багатокутник сил повинен бути замкнутим.

У випадку, коли у вузлі не більше двох невідомих зусиль, знайти їх можна розкладанням рівнодіючої відомих сил на два відомих напрямки.

Послідовно вирізуючи кожен вузол ферми, можна побудувати для кожного з них свій багатокутник сил і таким чином знайти графічне зусилля у всіх стержнях. Зауважимо, що в ході такої побудови зусилля в кожному з стержнів буде зустрічатись в двох багатокутниках (кожен стержень з'єднує два вузли) - спочатку як невідоме, а потім як зусилля, котре вже було визначене раніше. Це не дуже зручно і, крім того, збільшує можливу неточність графічної побудови.

Дж. Максвелл запропонував всі розрізнені силові багатокутники об'єднати в єдину фігуру, в котрій кожна зовнішня сила і зусилля в стержнях фігурують один раз. Детально цей підхід був розроблений Кремоною; побудований таким чином багатокутник сил отримав назву діаграми зусиль (діаграми Максвелла-Кремони).

Покажемо побудову діаграми на прикладі ферми, зображеної на рис. 5.12.

Спочатку повинні бути визначені опорні реакції. Будемо рахувати в нашому випадку навантаження симетричним ( $F_1 = F_3$ ), тоді  $R_A = R_B$ .

Стержні ферми і лінії дії зовнішнього навантаження ділять площину рисунка на окремі ділянки (поля).

Присвоївши кожному полю номер зовнішні сили і стержні ферми будемо позначати назвою відповідних полів, для яких сила і стержень є межею (рис. 5.12,а).

Побудуємо силовий багатокутник зовнішніх сил (рис. 5.12,б); застосовуємо графічну умову рівноваги спочатку до вузла з двома невідомими зусиллями, наприклад, до вузла *A* або *B*. Почнемо з вузла *A*, в якому сходиться відома реакція  $R_A$  і два стержні 1-6 і 5-6 з невідомими зусиллями.

Розкладемо реакцію  $R_A$  (сила 5-1) на відомі напрямки 1-6 і 5-6; для цього з точки 5 проведемо лінію паралельно стержню 5-6, а з точки 1 лінію паралельно стержню 1-6 до їх перетину. Оскільки вузол *A* в рівновазі, силовий багатокутник сил, які сходяться у вузлі *A*, повинен бути замкнутим.

Позначивши точку перетину напрямків 5-6 і 1-6, як точку *B*, отримаємо замкнутий силовий трикутник 5-1-6, який і визначить невідомі зусилля в стержнях 5-6 і 1-6 як по величині (в масштабі силового багатокутника зовнішніх сил), так і по знаку; знак встановлюється послідовним замиканням силового трикутника, початок якого визначається напрямком заданої зовнішньої сили, або опорної реакції. В даному випадку - це сила  $R_A$ , тобто 5-1, далі 1-6, потім 6-5; звідси випливає, що стержень 1-6 стиснутий, а 6-5 розтягнутий.

Розглянувши опорний вузол, ми повинні, перейти до слідуючого вузла. Однак перехід обмежений умовою - до вузла повинно сходиться не більше двох стержнів з невідомими зусиллями. В нашому випадку - це вузол, де прикладена сила  $F_1$ : вже відоме зусилля в стержні 1-6. З точки 2 на силовому багатокутнику проводимо лінію паралельно стержню 2-7, а із точки 6 лінію паралельно стержню 6-7 до їх взаємного перетину. Вийшов силовий замкнутий багатокутник 6-1-2-7-6; в процесі його побудови визначились величини зусиль в стержнях 2-7 і 7-6.

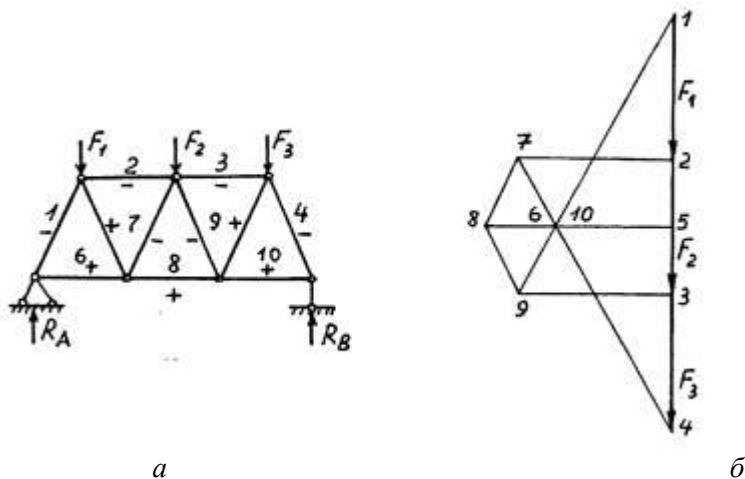


Рис. 5.12 Графічний метод визначення зусиль:  
а – ферма; б - діаграма зусиль

На рис.5.12,а знаками «+» і «-» позначені відповідно розтягнуті і стиснуті стержні.

Йдучи від вузла до вузла і будуючи кожен раз силовий багатокутник, на одному рисунку отримаємо діаграму Максвелла-Кремони (рис. 5.12,б).

Порівнюючи схему ферми і діаграму зусиль в її стержнях можна помітити зв'язок між ними:

- кожній ділянці поля ферми відповідає точка на діаграмі;
- кожному вузлу ферми відповідає багатокутник діаграми, сторони якого паралельні напрямкам стержнів ферми і зовнішніх сил, що сходяться в цьому вузлі;
- при симетричних геометрії ферми і її навантаженні діаграма зусиль симетрична.

## 5.7. Приклади рішення задач

**Приклад 1.** В фермі, зображеній на рис. 5.13, визначити нульові елементи.

Нульові елементи визначаються на основі розглянутих вище випадків рівноваги вузлів; на рис. 5.13 вони позначені нулями.

Геометричні і фізичні умови, на основі яких нульові стержні можна визначити візуально, називаються ознаками нульових стержнів. Зверніть увагу на те, що у прикладі 5.1 мають місце всі три ознаки (рис. 5.6,а,б,в), але для застосування третьої ознаки потрібно в думці відкинути перші чотири стержні, рахуючи справа, як такі що є нульовими.

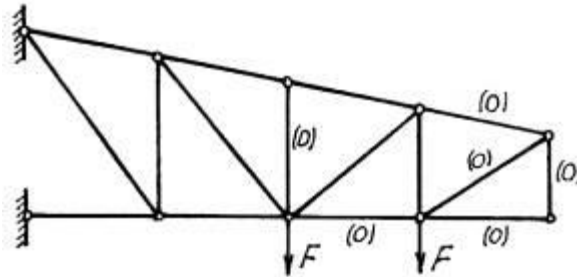


Рис. 5.13 Ферма до прикладу 1

**Приклад 2.** Визначити поздовжні сили в стержнях 5-8, 5-7, 6-7, 8-7, 13-11, 3-5 ферми, зображеної на рис. 5.14, при  $d = 3$  м,  $h = 2$  м,  $F_1 = 6$  кН,  $F_2 = 12$  кН.

Опорні реакції ферми визначимо з умов рівноваги  $\sum m_B = 0$  і  $\sum m_A = 0$ , звідки  $R_A = 10$  кН,  $R_B = 8$  кН.

Для визначення зусиль в елементах 5-8, 5-7 і 6-7 проведемо переріз I-I. З рівнянь рівноваги, записаних для лівої від перерізу частини ферми:

$$\begin{aligned} \sum m_7 &= N_{5-8} \cdot 2h + R_A \cdot 3d - F_1 \cdot d = 0; \\ \sum m_5 &= -N_{6-7} \cdot 2h + R_A \cdot 2d = 0; \\ \sum Y &= -N_{5-7} \cos \alpha + R_A - F_1 = 0. \end{aligned}$$

знаходимо відповідно  $N_{5-8} = -18$  кН;  $N_{6-7} = 15$  кН;  $N_{5-7} = 5$  кН.

Зусилля  $N_{8-7}$  визначається з рівняння рівноваги  $\sum Y = 0$ , складеного для правої від перерізу II-II частини ферми:  $-N_{8-7} + R_B = 0$ . Звідки  $N_{8-7} = R_B = 8$  кН.

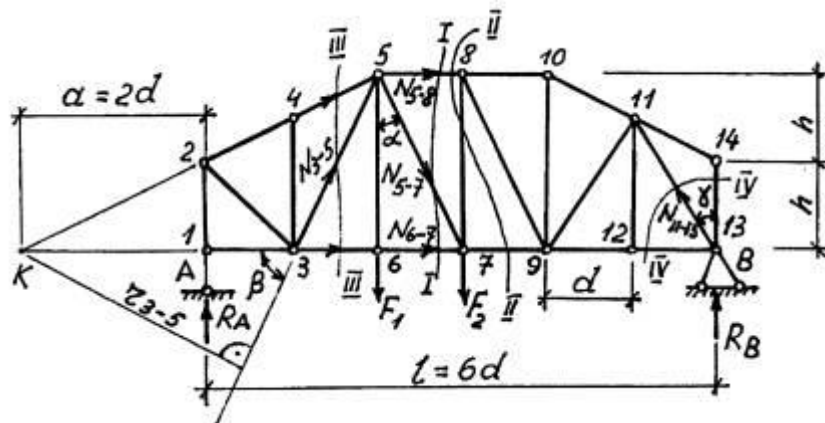


Рис. 5.14 Ферма до прикладу 2

Для знаходження зусилля в стержні 3-5 проведемо переріз 3-3. Записуючи рівняння рівноваги  $\sum m_K = 0$  для лівої від перерізу частини ферми отримаємо  $N_{3-5} \cdot r_{3-5} - R_A a = 0$ . Звідки  $N_{3-5} = -R_A \frac{2d}{r_{3-5}}$ , де  $r_{3-5} = 2d \sin \beta = 9 \cdot 0,8 = 7,2$  м. Підставляючи відповідні величини у вираз для шуканого зусилля, отримаємо  $N_{3-5} = -8,33$  кН.

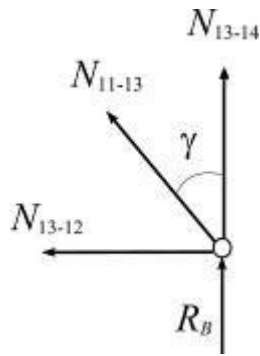


Рис. 5.15 Вузол В

Зусилля  $N_{11-13}$  визначимо способом вирізання вузлів для чого проведемо переріз 4-4. З умови рівноваги  $\sum Y = 0$ , записаної для вузла 13 рис. 5.15 отримаємо рівняння  $N_{11-13} \cos \gamma + N_{13-14} + R_B = 0$ . Так як стержень 13-14 нульовий, то

$$N_{11-13} = \frac{-R_B}{\cos 45^\circ} = -\frac{16}{\sqrt{2}} \text{ кН.}$$

**Приклад 3.** Побудувати діаграму Максвела-Кремони для ферми, зображеної на рис. 5.16 при  $d = 3 \text{ м}$ ,  $h = 4 \text{ м}$ ,  $F_1 = F_2 = 6 \text{ кН}$ .

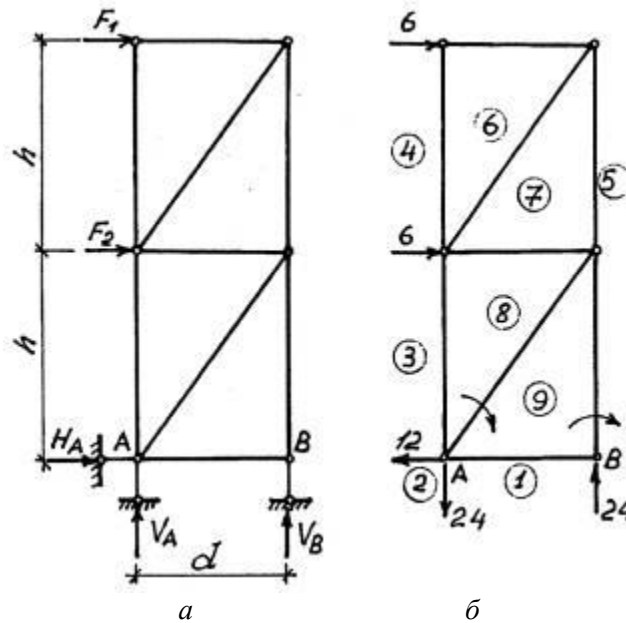


Рис. 5.16 До прикладу 3

а – ферма; б - ферма з врахуванням істинного напрямку опорних реакцій

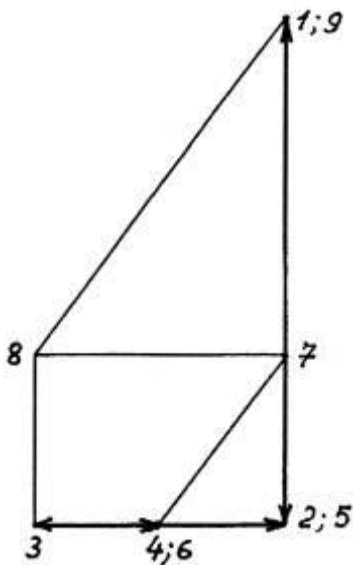
З рівнянь рівноваги  $\sum X = 0$ ,  $\sum m_A = 0$  і  $\sum m_B = 0$  (рис. 5.16,а) знаходимо відповідно  $H_A = -12 \text{ кН}$ ;  $V_A = -24 \text{ кН}$ ;  $V_B = -24 \text{ кН}$ .

На рис. 5.16,б показана ферма з врахуванням істинного напрямку опорних реакцій і нумерацією полів.

Рухаючись від поля під номером 1 будемо силовий багатокутник зовнішніх сил. При правильній побудові силовий багатокутник зовнішніх сил буде завжди замкнутим (дія прикладеного навантаження зрівноважується опорними реакціями).

Щоб знайти на діаграмі місце розташування точки 6 з точки 4 проводимо лінію паралельну напрямку стержня, який розділяє поля 5 і 6. Точка 6 буде лежати на перетині проведених прямих.

Точка 7 буде лежати на перетині напрямків 6-7 і 7-5, проведених з точок 6 і 5 відповідно. І так далі до завершення побудови діаграми визначенням розташування точки 9.



6

Рис. 5.17 Діаграма зусиль

На прикладі стержня 8-9 покажемо один з практичних способів визначення зусиль на вже побудованій діаграмі. Перетнемо стрілкою стержень, як показано на рис. 5.16,б (стрілка повинна перетинати тільки один стержень і вказувати на напрямок руху годинникової стрілки). По ходу стрілки ми перейшли з 8-го поля у 9-те. Здійснюємо відповідний рух на діаграмі, тобто з 8-ї точки в 9-ту. Очевидно, що рух здійснюється по напрямку від вузла А, відносно якого виконано перетин стрілкою. Це говорить про те, що стержень 8-9 розтягнутий. В масштабі діаграми відрізок 8-9 відповідає зусиллю рівному 20 кН. Таким чином  $N_{8,9} = 20$  кН. Якщо відповідний розглянутому способу рух по діаграмі має напрямок до вузла, то в розглядуваному стержні має місце стиск. Наприклад, для стержня 9-5 отримаємо  $N_{9,5} = -24$  кН. Для решти стержнів знаки і модулі зусиль рекомендується визначати самостійно.

### 5.8. Завдання для самостійної роботи

**Задача 1.** Визначити зусилля в елементах ферми, зображеної на рис.5.18, при  $d = 3$  м,  $h = 4$  м,  $F = 8$ кН.

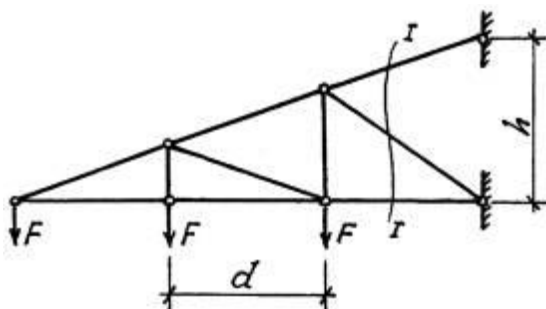


Рис. 5.18 Консольна ферма

Поздовжні зусилля в стержнях заданої ферми можна визначити без попереднього обчислення величин опорних реакцій. Наприклад, для визначення зусиль в елементах третьої панелі проведемо переріз I-I. Очевидно, що в рівняння рівноваги для лівої від перерізу частини ферми, величини опорних реакцій вводити не будуть.

## 5.9. Питання до самоконтролю знань

1. Що називається фермою?
2. Які зусилля виникають в елементах ферм і чому?
3. Які елементи розрізняють в фермах?
4. За якими ознаками класифікуються ферми?
5. Які методи застосовуються для визначення зусиль в стержнях статично визначних ферм?
6. Спосіб вирізання вузлів при розрахунках ферм. В чому переваги і недоліки цього способу?
7. В якому випадку раціонально визначать зусилля в фермах способом моментної точки?
8. Коли зручно застосовувати спосіб проекцій при визначенні зусиль в елементах ферм?
9. Які способи використовуються при розрахунках складних статично визначних ферм?
10. Як використовуються для розрахунку ферм балочні зусилля?
11. На чому базується графічний метод визначення зусиль в стержнях ферми?
12. Побудова діаграми зусиль в фермах. В чому переваги і недоліки графічного методу визначення зусиль в фермах?

## 6. СТАТИЧНО ВИЗНАЧНІ РАМИ.

Рами відносяться до несучих систем в елементах яких під дією прикладеного навантаження виникають три види внутрішніх зусиль ( $M$ ,  $Q$ ,  $N$ ), що спричинене наявністю жорсткого з'єднання елементів у вузлах.

В основу класифікації статично визначних рамних систем покладено характер з'єднання окремих елементів в їх конструкціях, а також способи приєднання рам до основи. З цієї точки зору розрахункові схеми рам класифікуються трьома типами:

- консольні рами або ламані стержні;
- балочні рами;
- тришарні рами і такі, що приводяться до них.

Перед побудовою епюр внутрішніх зусиль в рамах необхідно знаходити опорні реакції (крім рам першого типу). Ординати епюри  $M$  відкладаються на стороні розтягнутого волокна і знаки їм не присвоюються. На епюрах  $Q$  і  $N$  знаки ординат ставити обов'язково. Побудова епюри згинальних моментів на стороні розтягнутого волокна обумовлена здатністю основних будівельних матеріалів добре опиратись стиску і погано розтягу.

Кожна розрахункова схема має певні особливості визначення опорних реакцій. Поряд з цим різні типи рам можуть об'єднуватись в одній споруді, утворюючи складну раму. Розрахунок складних рам потребує попереднього вивчення кожного типу простих рам, зокрема і правильної уяви про їх взаємодію в загальній системі.

### 6.1. Розрахунок консольних і балочних рам.

Консольні рами характеризуються наявністю тільки одного опорного пристрою - жорсткого защемлення. Враховуючи, що для будь-якого перерізу консольної рами величини згинального моменту, поперечної і поздовжньої сил можуть бути визначеними з умов рівноваги відрізаної від заданої рами частини, яка являє собою вільну від опорного закріплення консоль, попереднє визначення опорних реакцій не обов'язкове.

Розглянемо Г-подібну консольну раму під дією рівномірно розподіленого і зосередженого навантажень (рис. 6.1.а)

Для визначеності (в розумінні величин  $M$ ,  $Q$ ,  $N$ ), задамо конкретні значення геометричним параметрам рами і параметрам її навантаження:  $l = 3$  м,  $h = 6$  м,  $q = 2$  кН/м,  $F = 8$  кН.

Допустимо, що величини складових  $R_A$ ,  $H_A$ ,  $M_A$  реакції опори  $A$  (рис. 6.1.б) невідомі. Щоб визначити величини згинального моменту поперечної і поздовжньої сили в деякому перерізі,

наприклад другому, розглянемо одну з умов рівноваги ділянки рами  $C2$  під дією зовнішніх і внутрішніх сил (рис. 6.2.а):

$$\sum m_2 = M_2 + \frac{q \cdot l \cdot l}{2} = 0, \text{ звідки } M_2 = -\frac{q \cdot l^2}{2} = \frac{-2 \cdot 3^2}{2} = -9 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Ми отримали від'ємне значення згинального моменту  $M_2$ , це говорить про те, що істинний його напрямок проти годинникової стрілки. Момент  $M_2$  викликає розтяг зовнішніх волокон.

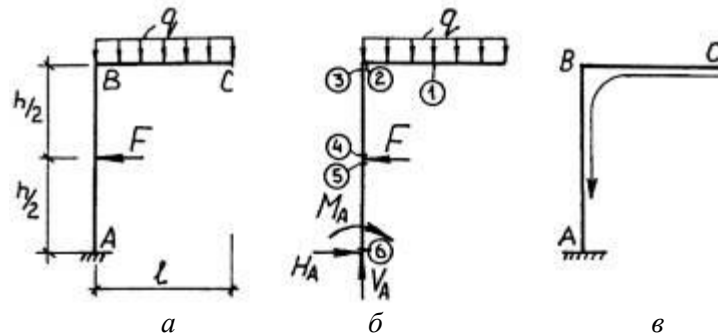


Рис. 6.1 Розрахунок консольної рами:

а – рама; б – опорні реакції і перерізи рами; в – напрямок побудови епюр

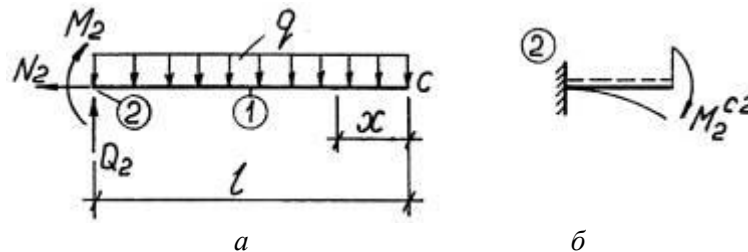


Рис. 6.2 Ділянка рами  $C2$ :

а – схема консолі; б - вигляд zdeформованої консолі

Проектуючи на вісь  $OY$  прикладені до елемента  $C2$  сили, отримуємо  $\sum Y = Q_2 - q \cdot l = 0$  звідки  $Q_2 = q \cdot l = 2 \cdot 3 = 6$  кН. Сума проєкцій сил, прикладених до розглядуваної ділянки на горизонтальну вісь  $\sum X = -N_2 = 0$ , звідки  $N_2 = 0$ .

Як бачимо, при визначенні внутрішніх зусиль в перерізі 2 в рівняння рівноваги не входили величини складових реакції опори  $A$ . Аналогічно можна визначити величини внутрішніх зусиль для будь-якого перерізу розглядуваної рами. Враховуючи, що рівняння рівноваги складені при попередньо заданому позитивному напрямку зусиль  $Q_2$  і  $N_2$  отримані їх величини відповідають істинним, як по величині, так і за знаком. Для побудови епюри згинальних моментів необхідно визначити її ординати в характерних перерізах рами. Якщо на певній ділянці рами діє розподілене навантаження, то визначають три ординати (епюра криволінійна). До характерних відносяться і перерізи, в яких діють зосереджені навантаження. При відсутності розподілених навантажень епюра моментів на ділянках дії зосереджених навантажень прямолінійна.

Побудова епюри  $M$ ,  $Q$ , для балочних систем, вивчається в курсі «Опір матеріалів». Напружено - деформований стан рамних систем в загальному випадку більш складний в порівнянні з балочними. В рамних системах під дією навантаження виникає і третій вид внутрішніх зусиль - поздовжні сили ( $N$ ). Якщо опорні реакції визначені, то кожна з епюр для статично визначної системи може бути побудованою незалежно від іншої. Вище вказувалось на деякі моменти стосовно побудови епюри  $M$ . При побудові епюр в рамах бажано починати саме з цієї епюри. Враховуючи диференційну залежність між згинальними моментами і поперечними силами, епюра  $Q$  може бути побудована на основі епюри  $M$ . Розгляд вузлів під дією поперечних і поздовжніх сил дозволяє з рівнянь рівноваги визначити ординати епюри  $N$  на основі епюри  $Q$ . Перед побудовою епюри  $M$ ,  $Q$ , на розрахунковій схемі рами показуються характерні перерізи див. (рис. 6.1,б).

З курсу “Опір матеріалів” відомо, що для визначення величини згинального моменту в заданому перерізі потрібно скласти алгебраїчну суму моментів всіх сил діючих по одну сторону від цього перерізу. Враховуючи, що сума алгебраїчна, попередньо домовляються в якому випадку (“за” годинниковою стрілкою, чи “проти”) присвоюється моменту знак «+». В наших міркуваннях ми будемо присвоювати складовій в алгебраїчній сумі знак «+», якщо її момент обертає переріз за годинниковою стрілкою. Щоб встановити, яке волокно розтягнуте зображуємо переріз у вигляді жорсткого защемлення з елементарною частиною стержня у вигляді консолі, вісь якої перпендикулярна заданому перерізу і направлена в сторону, для якої складена алгебраїчна сума. До кінця консолі прикладаємо момент, абсолютна величина якого дорівнює абсолютній величині алгебраїчної суми. Якщо знак алгебраїчної суми «+», то момент прикладається так, щоб він обертав консоль відносно перерізу за рухом годинникової стрілки, «-» - проти руху годинникової стрілки. Деформація консолі під дією прикладеного момента покаже, які волокна стержня будуть розтягнутими.

Повернемось до розглядуваного прикладу Г-подібної консольної рами. На рис. 6.1.в стрілкою показано напрямок руху від кінця консолі *C* до характерних перерізів рами при побудові епюр. Для другого перерізу згинальний момент  $M_2^{C2} = \frac{q \cdot l^2}{2} = \frac{2 \cdot 3^2}{2} \cdot 9 \text{ кН}\cdot\text{м}$ . Тут “C2” символізує ділянку для якої записана алгебраїчна сума. Знак «+» отриманого результату обчислень говорить про те, що момент  $M_2^{C2}$  потрібно прикласти до консолі так, як показано на рис. 6.2.б. На рис. 6.2.б тонкою лінією показано вигляд zdeформованої консолі, а штриховою - сторону розтягнутих волокон.

Для довільного перерізу ділянки стержня *CB*, взятого на віддалі *x* від *C* згинальний момент  $M_x = q \cdot x \cdot \frac{x}{2} = \frac{q \cdot x^2}{2}$ . При  $x = 1,5 \text{ м}$ ,  $M_{x=1,5} = 2,25 \text{ кН}\cdot\text{м}$ . Очевидно епюра згинальних моментів на ділянці *C2* буде зображуватись параболою (рис. 6.3.а).

Для визначення згинального моменту в третьому перерізі розглянемо рівновагу вузла *B* під дією згинальних моментів в другому і третьому перерізах (рис. 6.3.г). Очевидно, рівновага вузла *B* можлива тільки при напрямку  $M_3$  проти руху годинникової стрілки і при його величині рівній величині  $M_2$ .

При цьому і у вертикальному стержні будуть розтягнуті зовнішні волокна. Цю властивість, а більш точно характеристику напружено-деформованого стану Г-подібних жорстких вузлів слід пам'ятати і використовувати при побудові епюр згинальних моментів.

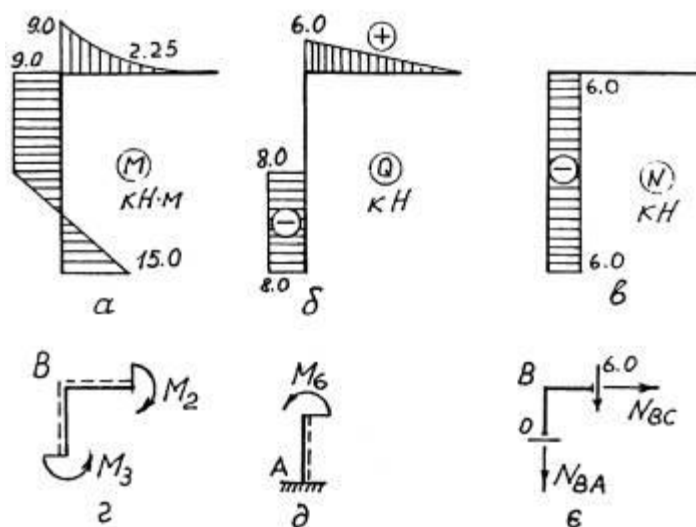


Рис. 6.3 Розрахунок рами:  
а,б,в – епюри; г,д,е – рівновага вузлів

Якщо уявно провести лінію дії рівнодіючої розподіленого на ригелі рами навантаження, то плече рівнодіючої буде однаковим при визначенні згинального моменту в будь-якому перерізі на шляху від третього до четвертого перерізу, а значить  $M_4 = M_3$ .

Згинальні моменти в четвертому і п'ятому перерізах також рівні за величиною і знаком, так як переріз «5» розташований нескінченно близько до лінії дії зосередженої сили  $F$ , тобто її плече відносно п'ятого перерізу дорівнює нулю ( $M_5 = M_4 + F \cdot 0 = M_4$ ).

На завершення міркувань стосовно побудови епюри  $M$  визначимо її ординату для опорного перерізу рами.  $M_6^{C6} = \frac{q \cdot l \cdot l}{2-F} \cdot \frac{h}{2} = 2 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} - 8 \cdot 3 = -15$  кН·м. Знак мінус вказує, що  $M_6$  потрібно прикласти до консолі (рис. 6.3.д) проти напрямку руху годинникової стрілки. Очевидно, що в даному випадку в стійці рами розтягнуті праві волокна.

На (рис. 6.3,б) зображена епюра  $Q$ ; значення поперечної сили в межах кожної ділянки з прямолінійною частиною епюри знаходимо як тангенс кута нахилу цієї прямої до стержня рами. Знак поперечної сили визначається по наступному правилу: якщо стержень до суміщення його з прямолінійною частиною епюри необхідно повертати за годинниковою стрілкою, знак  $Q$  додатній, в протилежному випадку - від'ємний. Наприклад,  $Q_{A5} = \frac{-24}{3} = -8$ кН;  $Q_{B4} = 0$ . Для побудови епюри  $Q$ , в межах кожної ділянки з криволінійною частиною епюри розглядаємо умови рівноваги стержня під дією зовнішнього навантаження і внутрішніх зусиль, прикладених в перерізах визначення поперечної сили (крайні перерізи розглядуваної ділянки). При цьому величини згинальних моментів для конкретних перерізів приймаються по ординатах побудованої епюри  $M$ . Наприклад,  $Q_2$  знайдемо з умови, що сума моментів всіх сил прикладених до ділянки  $C2$  відносно  $C$  дорівнює нулю (рис. 6.4):

$$\sum m_C = Q_2 \cdot l - \frac{q \cdot l \cdot l}{2} + M_C - M_2 = 0,$$

звідки

$$Q_2 = \frac{q \cdot l}{2} + \frac{M_2 - M_C}{l} = \frac{2 \cdot 3}{2} + \frac{9 - 0}{3} = 6 \text{ кН.}$$

Аналогічно визначимо  $Q_C$ :

$$\sum m_2 = Q_C \cdot l + q \cdot l \cdot \frac{l}{2} - M_2 + M_C = 0$$

звідки

$$Q_C = \frac{-q \cdot l}{2} + \frac{M_2 - M_C}{l} = \frac{-2 \cdot 3}{2} + \frac{9 - 0}{3} = 0.$$

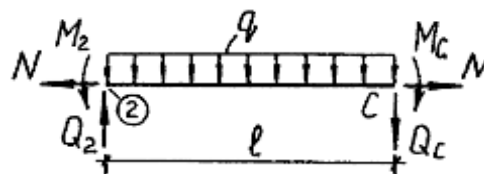


Рис. 6.4 Рівновага ділянки  $C2$

Зауважимо, що остання методика визначення поперечних сил універсальна і може бути застосованою і для ділянок з прямолінійною частиною епюри  $M$ . Враховуючи, що в перерізах попередньо задається позитивний напрямок поперечних сил, отриманий знак поперечної сили завжди відповідає істинному.

На (рис. 6.3.в) показана епюра  $N$ , яка будується на основі епюри  $Q$ , шляхом вирізання окремих вузлів рами. Розглянемо вузол  $B$ , зображений на (рис. 6.3.е). В перерізах стержнів, які сходяться в даному вузлі, показуємо позитивні напрямки шуканих поздовжніх сил ( $N_{BA}$ ,  $N_{BC}$ ) і прикладаємо поперечні сили з врахуванням їх знаків. Якщо поперечна сила додатня, то її прикладають так, щоб

вона обертала вузол за годинниковою стрілкою, в протилежному випадку - проти годинникової стрілки. Вузол рами під дією всіх прикладених сил повинен бути в рівновазі. З рівнянь  $\sum X=0$ ,  $\sum Y=0$  знаходимо відповідно  $N_{BA} = 0$ ;  $N_{BC} = 6$  кН.

## 6.2. Особливості розрахунку тришарнірних рам.

При однаковій методиці побудови епюр внутрішніх зусиль для всіх типів рам кожен тип має певні особливості визначення реакцій у в'язях. На (рис. 6.5,а) зображена тришарнірна рама.

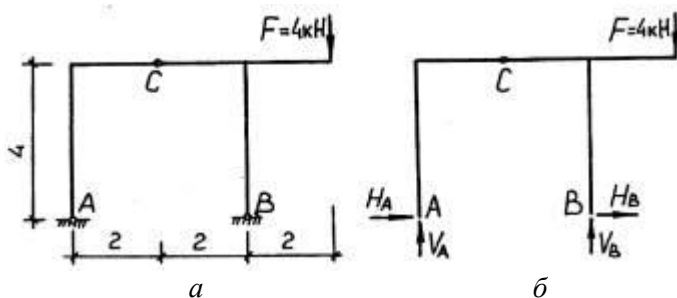


Рис. 6.5 Розрахунок тришарнірних рам:  
а - тришарнірна рама; б - визначення величин опорних реакцій

Вертикальні реакції  $V_A$  і  $V_B$  визначимо з рівнянь рівноваги:  $\sum m_A = 0$ ;  $\sum m_B = 0$ . Відповідно отримаємо  $V_A = -2$  і  $V_B = 6$  кН. Для визначення горизонтальних реакцій  $H_A$  і  $H_B$  потрібно виходити з умови рівності нулю згинального моменту в з'єднувальному шарнірі C. Реакція  $H_A$  визначається з рівняння  $\sum m_C^{AC} = -H_A \cdot 4 + V_A \cdot 2 = 0$ , де  $\sum m_C^{AC}$  - алгебраїчна сума моментів лівих від шарніра сил відносно шарніра. Прирівнюючи до нуля алгебраїчну суму моментів правих від шарніра сил відносно шарніра  $\sum m_C^{BC} = -H_B \cdot 4 - V_B \cdot 2 + F \cdot 4 = 0$ , отримаємо рівняння для визначення опорної реакції  $H_B$ . Звідки  $H_A = -1$ ;  $H_B = 1$  кН.

Після визначення величин опорних реакцій в кожному випадку бажано виконувати перевірку. Для цього використовуються рівняння рівноваги. Для розглянутого прикладу:

$$\begin{aligned} \sum X &= H_A + H_B = -1 + 1 = 0; \\ \sum Y &= V_A + V_B - F = -2 + 6 - 4 = 0. \end{aligned}$$

Зауважимо, що умови  $\sum X = 0$  і  $\sum Y = 0$  не використовувались для визначення опорних реакцій, в протилежному випадку перевірка цих умов не мала б сенсу.

Побудову епюр внутрішніх зусиль рекомендується виконати самостійно.

## 6.3. Статично визначні рами із замкнутими контурами.

До статично визначних рам із замкнутими контурами відносяться рами з ненавантаженими і навантаженими затяжками. Характерною особливістю розрахунку таких рам є необхідність визначення зусиль в затяжках перед побудовою епюр  $M$ ,  $Q$ ,  $N$ .

Розглянемо приклад рами з ненавантаженою затяжкою (рис. 6.6,а). Функцію затяжки виконує стержень DE. Розглядаючи задану геометрію рами, приходимо до висновку, що в перерізах рами, які розташовані вище затяжки, визначити внутрішні зусилля неможливо. Дійсно, розтином I-I перетинаються обидва вертикальні стержні, а це говорить про те, що число невідомих зусиль в перерізах буде в два рази більше, ніж рівнянь рівноваги.

Якщо затяжку перерізати, а дію в заданій системі замінити зусиллям S (рис. 6.6,б), то при відомих величині S і величинах опорних реакцій метод перерізів може бути застосованим.

Реакції  $H_A$ ,  $V_A$ ,  $V_B$  визначаються з рівняння рівноваги:

$$\sum X = 0; \sum m_A = 0; \sum m_B = 0.$$

Для визначення зусилля  $S$  використаємо умову

$$\sum m_C^{AC} = -S \cdot 1 + V_A \cdot 2 - H_A \cdot 2 = 0,$$

звідки  $S = 2$  кН. Ця ж величина може бути визначеною із умови  $\sum m_C^{BC} = 0$ , що читачу рекомендується виконати самостійно.

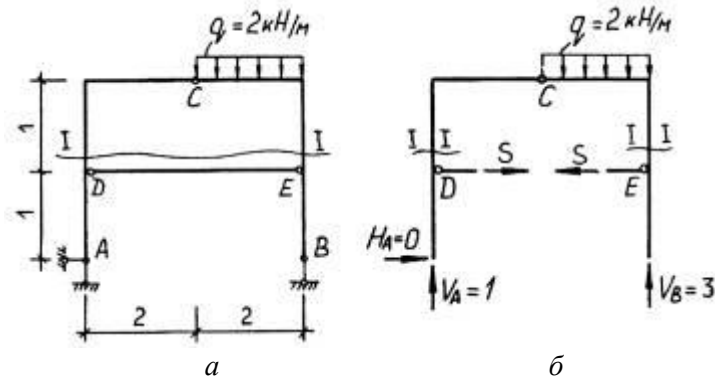


Рис. 6.6 Рами із замкнутими контурами:  
а - рама з ненавантаженою затяжкою; б – розрахункова схема

У випадку навантаженої затяжки (рис. 6.7,а) зосереджену силу  $F$  розподіляють як показано на рис. 6.7,в. Зрозуміти останнє допоможе рис. 6.7,б (пригадайте схему передачі навантажень в шарнірно-консольній балці).

Методика визначення повздовжнього зусилля в затяжці  $DE$  аналогічно попередньому прикладу.

Розглянемо приклад рами з не навантаженою затяжкою (рис. 6.6,а). Функцію затяжки виконує стержень  $DE$ . Розглядаючи задану геометрію рами, приходимо до висновку, що в перерізах рами, які розташовані вище затяжки, визначити внутрішні зусилля неможливо. Дійсно, розтином  $I-I$  перетинаються обидва вертикальні стержні, а це говорить про те, що число невідомих зусиль в перерізах буде в два рази більше, ніж рівнянь рівноваги.

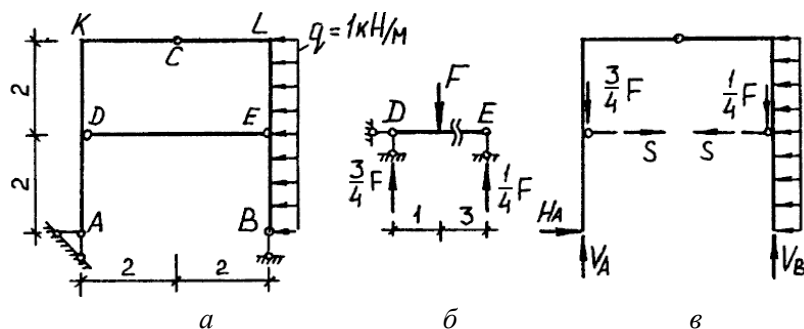


Рис. 6.7 Рами із замкнутими контурами:  
а - рама з затяжкою; б - навантажена затяжка; в – розрахункова схема

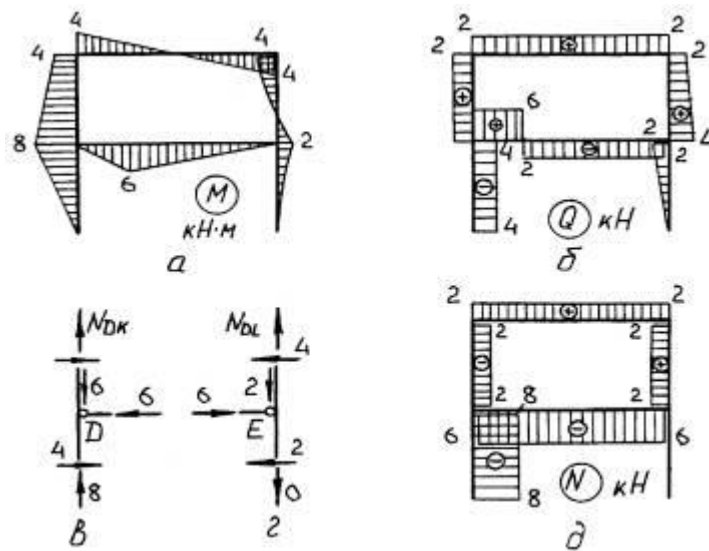


Рис. 6.8 Розрахунок рами:  
а, б, д – епюри; в, г – рівновага вузлів

Якщо затяжку перерізати, а її дію в заданій системі замінити зусиллям  $S$  (рис. 6.6.б), то при відомих величині  $S$  і величинах опорних реакцій метод перерізів може бути застосованим.

Епюри внутрішніх зусиль  $M$  і  $Q$ , для розглядуваної рами показані на рис. 6.8, а, б.

На рис. 6.8, в, г зображені вузли  $D$  і  $E$  під дією поперечних і поздовжніх сил, а також прикладеного навантаження. З рівнянь рівноваги ( $\sum Y = 0$ ), складених для кожного з вузлів:  $N_{DK} - 6 + 8 = 0$  і  $N_{DL} - 2 + 0 = 0$  знаходимо відповідно  $N_{DK} = -2$ ;  $N_{DL} = 2$  кН. Епюра  $N$  показана на рис. 1.22, д.

При розгляді тієї чи іншої розрахункової схеми автор звертає увагу читача на характерні особливості їх розрахунку, не вдаючись до надмірних повторень. В той же час для відпрацювання стійких знань бажано самостійно і послідовно виконувати всі обчислювальні процедури, включаючи перевірки. Так для побудови епюри  $N$  в останньому прикладі потрібно розглянути і умови рівноваги жорстких вузлів  $K$  і  $L$  під дією поздовжніх і поперечних сил, а дослідження вузлів  $D$  і  $E$  повинно містити перевірку  $\sum X = 0$ .

#### 6.4. Особливості розрахунку складених рамних систем.

Несучою системою споруди можуть об'єднуватись статично визначні рами різних типів, утворюючи конструкцію спільної розрахункової схеми. Прикладом такої розрахункової схеми може бути рама показана на (рис. 6.9.а).

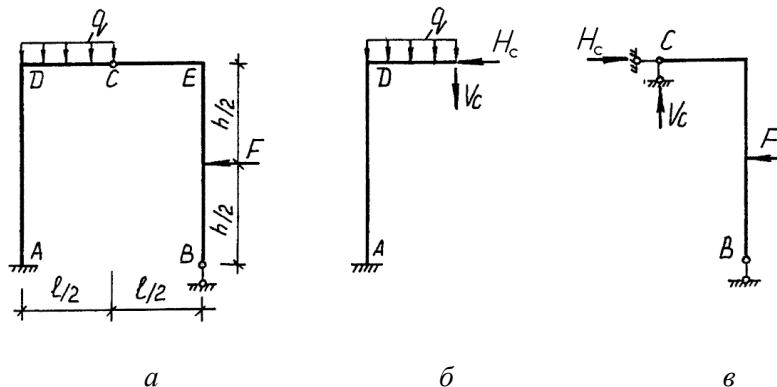


Рис. 6.9 Розрахунки складених рамних систем  
а – рама; б – основна частина; в – другорядна частина

Дану раму можна розглядати як складену систему, ліва частина якої (*ADC*) є основною, а права частина (*CEB*) - підвісною (другорядною). На основну раму (рис. 6.9.б) поряд з розподіленим навантаженням будуть діяти зосереджені сили  $H_C$  і  $V_C$ , прикладені в перерізі *C*. Ці сили є горизонтальною і вертикальною реакціями підвісної частини (рис. 6.9.в).

По аналогії з шарнірно-консольними балками розрахунок складених рам повинен починатись з другорядної рами.

### 6.5. Приклади рішення задач

**Приклад 1.** Визначити опорні реакції і побудувати епюри  $M$ ,  $Q$ ,  $N$  для рами, зображеної на (рис. 6.10).

Задана рама відноситься до рами балочного типу. Характерною її ознакою є наявність двох опорних пристроїв (аналогічно простій балці) - шарнірно-нерухомої і шарнірно-рухомої опор. Опорні реакції знайдемо з умов рівноваги (рис. 6.11.а). Реакція  $V_A$  визначається з рівняння рівноваги:

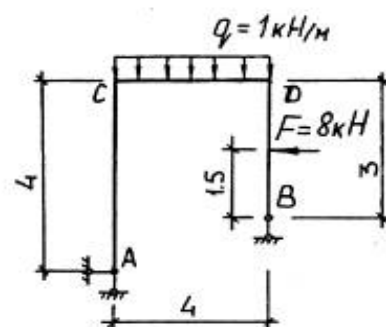


Рис. 6.10 До прикладу 1

$$\sum m_K = V_A \cdot 4 - q \cdot 4 \cdot 2 - F \cdot 2,5 = 0, \text{ звідки } V_A = 7 \text{ кН.}$$

Реакція  $V_B$  з рівняння рівноваги:

$$\sum m_A = -V_B \cdot 4 + q \cdot 4 \cdot 2 - F \cdot 2,5 = 0, \text{ звідки } V_B = -3 \text{ кН.}$$

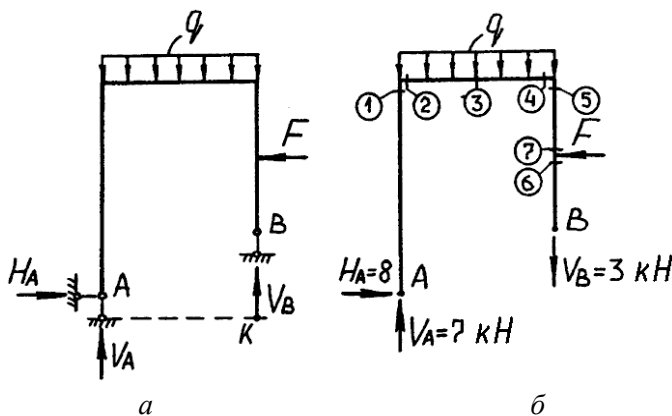


Рис. 6.11 Рама

а – моментна точка; б – розрахункова схема

Для визначення реакції  $H_A$  запишемо умову рівноваги:  $\sum X = H_A - F = 0$ , звідки  $H_A = 8$  кН.

На допоміжному (рис. 6.11.б) показана розрахункова схема рами при істинному напрямку знайдених реакцій, прикладених в опорних перерізах. При цьому опорні стержні не зображені, а на ригелі і стійках показані характерні перерізи. Допоміжний малюнок спрощує обчислювальну процедуру за рахунок відсутності в останній від'ємних величин опорних реакцій.

Ординати епюри  $M$  для характерних перерізів визначаються:

$$M_1^{A1} = -H_A \cdot 4 = -32; M_1 = M_2; M_3^{A3} = -H_A \cdot 4 + V_A \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 = -20;$$

$$M_4^{B4} = -F \cdot 1,5 = 12; M_5 = M_4; M_6 = -M_7 = 0 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

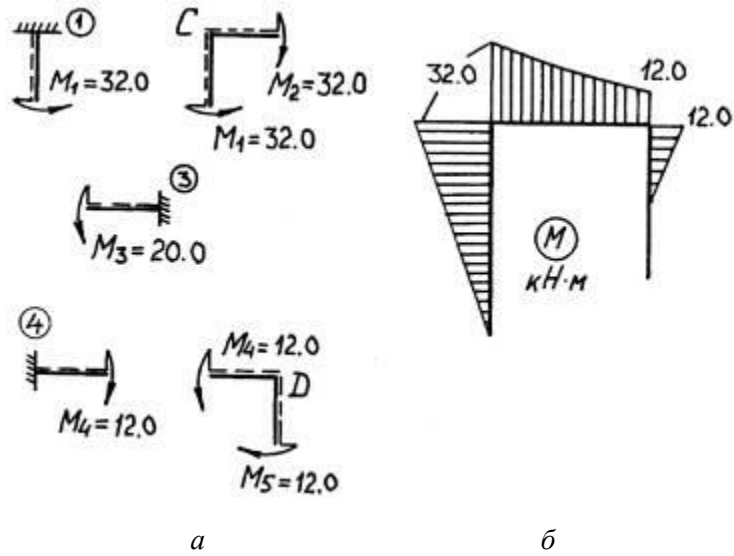


Рис. 6.12 Розрахунок рами:

а - дія згинальних моментів в кожному з перерізів; б - епюра

На (рис. 6.12) показана дія згинальних моментів в кожному з позначених перерізів і епюра  $M$  відповідно.

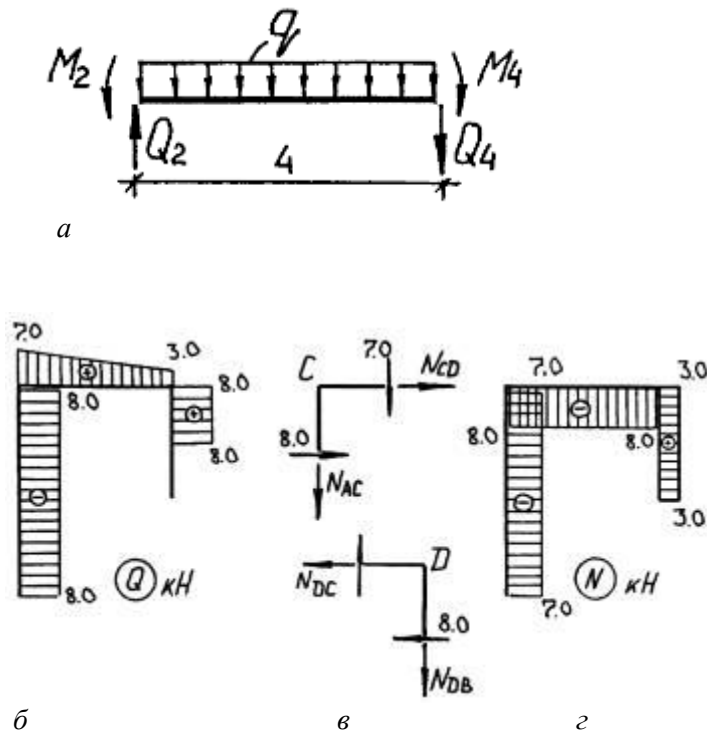


Рис. 6.13 Розрахунок  $M$  і  $Q$ :

а - ділянка в межах другого і четвертого перерізів; б, г - епюри; в - умови рівноваги жорстких вузлів

Для ділянок рами з прямолінійною епюрою  $M$  поперечні сили визначаються:  $Q_{AC} = -\frac{32}{4} = -8$ ;  $Q_{5-7} = \frac{12}{1,5} = 8$  кН. Окремо розглянемо ділянку в межах другого і четвертого перерізів (рис. 6.13.а). Зауважимо, що на малюнку в перерізах поздовжні сили не показані, як такі, що не входять у рівняння рівноваги. Поперечні сили  $Q_2$  і  $Q_4$  визначаються з рівнянь:

$$\begin{aligned}\sum m_4 &= Q_2 \cdot 4 - q \cdot 4 \cdot 2 - M_2 + M_4 = 0; \\ \sum m_2 &= Q_4 \cdot 4 - q \cdot 2 - M_2 + M_4 = 0.\end{aligned}$$

Після підстановки відповідних величин отримаємо:  $Q_2 = 7$ ;  $Q_4 = 3$  кН. Епюра  $Q$  показана на рис. 6.13,б.

Розглядаючи умови рівноваги жорстких вузлів  $C$  і  $D$ :  $\sum X = 0$ ;  $\sum Y = 0$  знаходимо величини поздовжніх сил  $N_{AC} = -7$ ;  $N_{CD} = -8$ ;  $N_{DC} = -8$ ;  $N_{DB} = 3$  кН (рис. 6.13,в). Епюра поздовжніх сил зображена на рис. 6.13,г.

### 6.6. Завдання для самостійної роботи

**Задача 1.** Побудувати епюри  $M$ ,  $Q$ ,  $N$ , для рам (рис. 6.14, рис. 6.15). Тут і надалі геометричні розміри, що приводяться на малюнках приймаються в метрах.

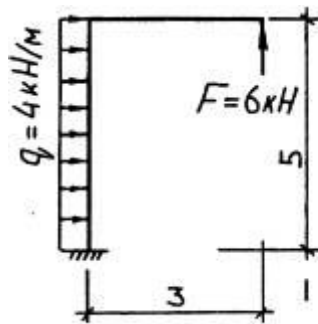


Рис. 6.14 Консольна рама

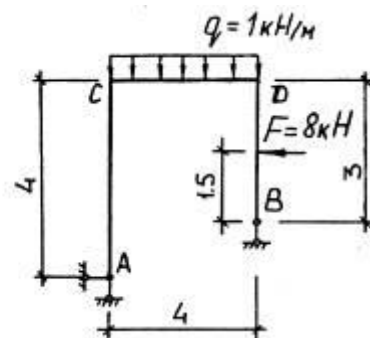


Рис. 6.15 Рами із замкнутим контуром

**Задача 2.** Визначити опорні реакції і побудувати епюри  $M$ ,  $Q$ ,  $N$  для рами, показаної на (рис. 6.16). Зауважимо, що кожна з трьох опор має одну реакцію. Для визначення реакції  $H_A$  потрібно скласти рівняння  $\sum X = 0$ . Щоб знайти одну з вертикальних реакцій  $V_B$  і  $V_C$  потрібно попередньо знайти точку перетину решти двох реакцій відповідно.

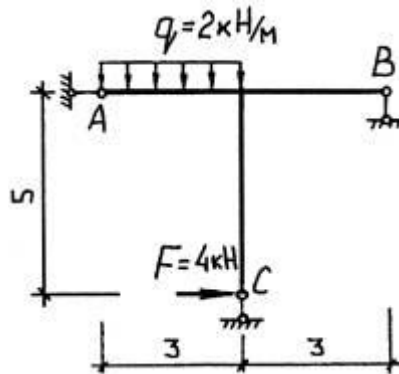


Рис. 6.16 До задачі 2

### 6.7. Питання до самоконтролю знань

1. Класифікація статично визначних рам. Які зусилля визначаються при розрахунку рам ?

2. Консольні рами. В чому полягає особливість розрахунку консольних рам ?
3. Балочні рами. Які умови рівноваги розглядаються при визначенні складових реакцій в опорах балочних рам ?
4. В чому полягає особливість розрахунку тришарнірних рам ?
5. Яка аналогія спостерігається при розрахунку багатопрольотних статично визначних балок і складених рамних систем ?

## ЛИТЕРАТУРА

1. Строительная механика. Под ред. Бутенко Ю.И.-К. - Вища школа, 1989.
2. Смирнов А.Ф., Александров А.В., Лашенников Б.Я., Шапошников Н.Н. Строительная механика. Стержневые системы. - М.: Стройиздат, 1981.
3. Смирнов А.Ф., Александров А.В., Лашенников Б.Я., Шапошников Н.Н. Строительная механика. - М.: Стройиздат, 1984.
4. Дарков А.В., Шапошников Н.Н. Строительная механика. - М.: Высш. шк., 1986.-608 с.
5. Строительная механика. Руководство к практическим занятиям. Под ред. Ю.И. Бутенко. - К.: Вища школа, 1984.
1. Бутенко Ю.И. Строительная механика. К., Вища школа, 1989.
2. Клейн Г.Г. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики. М.: Высшая школа, 1980.
3. Дорошук Г.П., Трач В.М. Будівельна механіка / Навчальний посібник. -К.: ІЗМН, 1996, - 520с.

Навчальне видання

**КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ**  
**з дисципліни**  
**"Будівельна механіка" ч.2**

*(для здобувачів вищої освіти спеціальності 192  
«Будівництво та цивільна інженерія»)  
(Електронне видання)*

Укладач:

Медвідь Іван Іванович

Оригінал - макет

І.І.Медвідь

Підписано до друку \_\_\_\_\_

Формат 60×84  $\frac{1}{16}$ . Папір типограф. Гарнітура *Times*.

Друк офсетний. Умов. друк. арк. \_\_\_\_\_. Обл.-вид.арк. \_\_\_\_\_.

Тираж \_\_\_\_ прим. Вид. № \_\_\_\_\_. Замовл. № \_\_\_\_\_. Ціна договірна.

**Видавництво Східноукраїнського національного університету  
імені Володимира Даля**

Свідоцтво про реєстрацію: серія ДК № 1620 від 18.12.03 р.

Адреса університета: вул. Іоанна Павла 2, 17

м. Київ, 01042, Україна

e-mail: vidavnictvoSNU.ua@gmail.com.