МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
СХІДНОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені ВОЛОДИМИРА ДАЛЯ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ (частина 1)
з дисципліни

«Теоретична механіка»

(для здобувачів вищої освіти спеціальностей 184 Гірництво, 141 Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка, 133 Галузеве машинобудування, 131 Прикладна механіка

(Електронне видання)

З А Т В Е Р Д Ж Е Н О
на засіданні кафедри
машинобудування та
прикладної механіки
Протокол № 5 від 06.12.2023 р.

Київ 2024

УДК 514.18:681.3.067(075.8)

Конспект лекцій з дисципліни "Теоретична механіка" частина 1 (для здобувачів вищої освіти спеціальностей 184 Гірництво, 141 Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка, 133 Галузеве машинобудування, 131 Прикладна механіка, (Електронне видання) / Уклад.: Г.Л. Мелконов, О.В. Шевченко, О.М. Логунов – Київ: вид-во СНУ ім. В. Даля, 2024. – 120 с.

Конспект лекцій складається з двох розділів, в яких викладено основні поняття і теореми статики і кінематики.

В кінці кожної теми наведено питання для самоконтролю, що допомагають читачу оцінити рівень засвоєння матеріалу.

При складанні конспекту основна увага була спрямована на ті питання, які у подальшому знаходять безпосереднє теоретичне і практичне застосування у загальнотехнічних і спеціальних дисциплінах, що вивчаються на факультеті інженерії.

Укладачі: Г.Л. Мелконов, к.т.н., доц.
О.В. Шевченко, к.т.н., доц.
О.М. Логунов, к.т.н., доц.

Рецензент В.Ю. Тарасов, д.т.н., проф.

ЗМІСТ

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА, ЇЇ ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ І ЗАКОНИ 6
Предмет теоретичної механіки 6
Об'єкти дослідження теоретичної механіки 7
Сила і системи сил 7
Момент сили 12
Пара сил і її властивості 18
Швидкість, прискорення, імпульс 20
Закони механіки Галілея-Ньютона 21
1. СТАТИКА ТВЕРДОГО ТІЛА 23
1.1. Аксіоми статики вільного твердого тіла 23
1.2. Дві найпростіші теореми статики 25
1.2.1. Теорема 1 25
1.2.2. Теорема 2 26
1.3. Вільні і невільні тіла. В'язі і їх реакції 26
1.4. Аксіоми про в'язі 31
1.5. Класифікація сил. Метод перерізів 32
1.6. Системи збіжних сил і умови їх рівноваги 34
1.6.1. Зведення до рівнодіючої і геометричні умови рівноваги збіжних сил 34
1.6.2. Аналітичні умови рівноваги систем збіжних сил 35
1.7. Теорема Варіньона (терема про момент рівнодіючої збіжної системи сил) 36
1.8. Довільна просторова система сил і умови її рівноваги 41
1.8.1. Теорема про паралельний перенос сили 41
1.8.2. Основна теорема статики (теорема Пуансо) 42
1.8.3. Залежність головного вектора і головного момента від вибору центра зведення 44
1.8.4. Умови рівноваги довільної просторової системи сил 45
1.9. Окремі випадки рівноваги систем сил 46
1.9.1. Умови рівноваги просторової системи паралельних сил 46
1.9.2. Умови рівноваги плоскої системи сил 47
1.9.3. Умови рівноваги плоскої системи паралельних сил 48
1.10. Тертя 51
1.10.1. Зчеплення і тертя ковзання 51
1.10.2. Рівновага гнучкої нитки на негладкій циліндричній поверхні 54
1.10.3. Тертя кочення 56
1.11. Центр паралельних сил. Центр ваги тіла 60
1.11.1. Рівнодіюча систем двох паралельних сил, які не утворюють пару 60
1.11.2. Центр паралельних сил 61
1.11.3. Центр ваги твердого тіла 62
2. КІНЕМАТИКА ТОЧКИ І ТВЕРДОГО ТІЛА 67
2.1. Способи задання руху точки 68
2.1.1. Векторний спосіб 68
2.1.2. Координатний спосіб 69
2.1.3. Природний спосіб 69
2.2. Швидкість і прискорення точки 70
2.2.1. Векторний спосіб визначення швидкості і прискорення точки 71
2.2.2. Визначення швидкості і прискорення точки в декартовій системі координат 72
2.2.3. Визначення швидкості і прискорення при природному способі задання руху точки 74
2.3. Кінематика твердого тіла 80

2.3.1. Поступальний рух твердого тіла 82
2.3.2. Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі 83
2.3.3. Перетворення найпростіших рухів твердого тіла 88
2.3.4. Плоскопаралельний рух твердого тіла 91
2.3.4.1. Рівняння і характеристики плоского руху 91
2.3.4.2. Визначення швидкостей точок тіла при плоскопаралельному русі 93
2.3.4.3. Миттєвий центр швидкостей 94
2.3.4.4. Прискорення точок при плоскопаралельному русі твердого тіла 97
2.3.4.5. Миттєвий центр прискорень 98
2.4. Складання рухів точки і твердого тіла 105
2.4.1. Складний рух точки 105
2.4.1.1. Складання швидкостей 107
2.4.1.2. Додавання прискорень в складному русі 110
2.4.2. Додавання рухів твердого тіла 115
2.4.2.1. Додавання двох поступальних рухів 115
2.4.2.2. Додавання обертального руху, який відбувається перпендикулярно до осі обертання, з поступальним 116
2.4.2.3. Додавання обертань навколо осей, що перетинаються 116
2.4.2.4. Додавання двох обертальних рухів навколо паралельних осей 117
ЛІТЕРАТУРА 120

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА, ЇЇ ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ І ЗАКОНИ

Предмет теоретичної механіки

Давньогрецький філософ Гераклід своєю славнозвісною фразою «Все тече, ніщо не перебуває незмінним» висловив основну думку вчення про текучість і мінливість матеріального світу, що оточує нас. Зміни матерії, тобто її рух, охоплюють всі явища, які спостерігаються в природі.

Серед різноманітних видів рухів можна виділити деякі найпростіші форми руху матерії, що зводяться до зміни в часі взаємних положень матеріальних об'єктів або їх частин. Такі форми рухів називають *механічними рухами.*

Цілий комплекс дисциплін, що вивчають механічний рух і механічну взаємодію матеріальних тіл, об'єднують під загальною назвою *механіка*.[1] До таких дисциплін відносяться, наприклад, теорія механізмів і машин, гідро- і аеромеханіка, небесна механіка, механіка матеріалів і конструкцій, будівельна механіка, деталі машин, а також чимала кількість наук, які займаються вивченням машин окремих галузей промисловості і сільського господарства.

Серед різних напрямів загальної механіки особливе місце посідає теоретична механіка, на основних положеннях і висновках якої базуються інші дисципліни механічного комплексу.

Теоретична механіка – це наука про найбільш загальні закони механічного руху будь-яких матеріальних тіл, що взаємодіють між собою у просторі і в часі.

В даному курсі викладаються елементи класичної механіки, в основу якої покладено певні постулати (закони), сформульовані Галілеєм і Ньютоном (1687 р.).

За вельми невеликими виключеннями класична механіка з високим ступенем точності описує рух реальних тіл в природі і техніці. Виключення

[1] Термін «механіка» вперше ввів Аристотель (384-322 р. до н.е.). В буквальному перекладі з грецької він означає «хитрість», «хитрування».

відносяться до руху тіл, швидкості яких можуть бути порівнюваними зі швидкістю світла.

Теоретична механіка в залежності від того, з якої точки зору розглядаються в ній питання рівноваги і руху фізичних тіл, поділяється на три частини: *статику, кінематику і динаміку.*

Об'єкти дослідження теоретичної механіки

В якості об'єктів дослідження теоретична механіка розглядає матеріальну точку, абсолютно тверде тіло і механічну систему матеріальних точок або тіл.

Матеріальною точкою називають найпростішу модель матеріального тіла будь-якої форми, розмірами якого при певних умовах можна знехтувати і яке можна прийняти за геометричну точку, що має масу.

Незмінна система матеріальних точок, що неперервно заповнює якусь частину простору, називається *абсолютно твердим тілом.*

Механічною системою матеріальних точок або тіл називається така їх сукупність, в якій положення і рух кожної точки (тіла) залежить від положення і руху всіх інших.

Під *матеріальним об'єктом* будемо розуміти матеріальну точку, тверде тіло чи систему матеріальних точок або абсолютно твердих тіл, які досліджуються в даному механічному процесі.

Слід розуміти, що матеріальна точка, абсолютно тверде тіло і механічна система є поняттями абстрактними і лише наближено відображають реальний світ. Але використання цих абстракцій значно спрощує дослідження рівноваги та руху дійсних матеріальних об'єктів.

Сила і системи сил

Досвід людства показує, що стан рівноваги чи руху матеріального тіла залежить від його взаємодії із зовнішнім середовищем. В теоретичній механіці розглядається тільки механічна взаємодія, яка спричиняє зміну характеру руху матеріальних тіл, або їх деформацію.

Величина, яка є мірою механічної дії (тиск, притягання, відштовхування) одного матеріального тіла на друге, називається *силою*.

Поняття сили в механіці – основне, первинне поняття. За своєю природою сила – величина векторна і тому як усякий вектор визначається *модулем (величиною), точкою прикладання* і *напрямом у просторі*. Пряма, уздовж якої напрямлений цей вектор, називається *лінією дії сили* (рис.1).

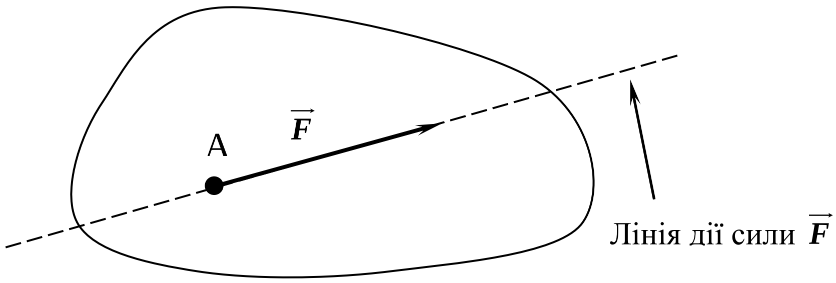


Рис.1

Надалі позначатимемо сили літерами латинського алфавіту зі знаком вектора: $\vec{F}, \vec{P}, \vec{G}, \dots$, а їх величини (модулі) тими ж літерами без позначки вектора, або з використанням знаку модуля: $F, P, G, \dots$ чи $|\vec{F}|, |\vec{P}|, |\vec{G}|$.

За одиницю сили в системі СІ прийнято 1 Ньютон; $1H = 1\frac{кг \cdot м}{c^2}$. Часто використовують кратні одиниці сили: $1\,кH = 10^3\ H$ і $1\,MH = 10^6\ H$.

Системою сил називають сукупність сил, які діють на даний матеріальний об'єкт. Системи сил можуть бути просторовими (окремі сили системи довільно розташовані у просторі) і плоскими (всі сили системи діють в одній певній площині).

Просторові чи плоскі системи сил, лінії дії яких перетинаються в одній точці (точка сходу), називають *збіжними*.

Систему, що складається з n сил, позначають так: $\{\vec{F_1}, \vec{F_2}, \dots, \vec{F_n}\}$ або скорочено $\{\vec{F_k}\}$, $k = \overline{1,n}$.

Дві системи сил називають *еквівалентними*, якщо при заміні однієї системи сил, що діє на матеріальний об'єкт, іншою системою стан спокою або характер руху даного об'єкта не порушується. Еквівалентність систем сил позначають таким чином: $\{\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \dots, \overrightarrow{F_n}\} \sim \{\overrightarrow{P_1}, \overrightarrow{P_2}, \dots, \overrightarrow{P_m}\}$ або $\{\overrightarrow{F_k}\} \sim \{\overrightarrow{P_j}\} \quad \left| k = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m} \right|.$

Зрівноваженою (еквівалентною нулю) системою сил називають таку систему, під дією якої матеріальний об’єкт не змінює свого стану спокою чи руху за інерцією. Позначення: $\{\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \dots, \overrightarrow{F_n}\} \sim 0$.

У випадках, коли система сил еквівалентна одній силі, то ця сила називається *рівнодіючою* даної системи сил. Математично це записується так: $\{\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \dots, \overrightarrow{F_n}\} \sim \overrightarrow{R^*}$.

Проекція сили на вісь

Проекцією вектора сили на будь-яку координатну вісь називають напрямлений відрізок, величина якого дорівнює добутку модуля вектора сили на косинус кута, утвореного напрямом вектора сили з додатним напрямом осі.

Так, наприклад, проекція сили $\vec{F}$ на вісь n (рис.2) визначається з рівняння:

$$np_n(\vec{F}) = F_n = F \cdot cos(\widehat{\vec{F}, \vec{n}}) . \qquad (1)$$

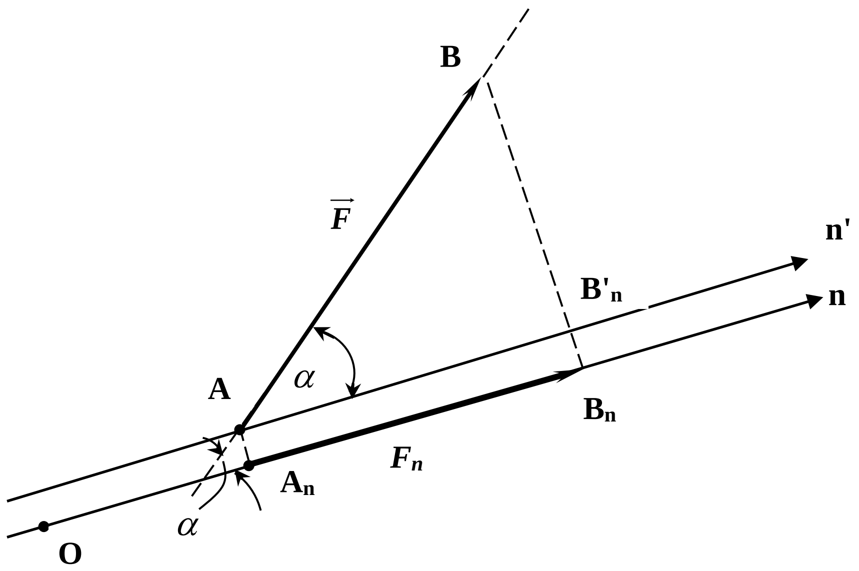


Рис.2.

Як можна бачити з цього ж рисунка, проекції вектора на паралельні і однаково напрямлені осі рівні між собою, тобто: $A_nB_n = AB'_n$.

Тому часто зручніше проектувати вектор на вісь, паралельну даній, яка проходить через початок вектора.

З рівняння (1) виходить, що у випадках, коли кут між вектором сили і додатним напрямом осі гострий, проекція сили додатна, якщо тупий – від’ємна, а коли сила перпендикулярна до осі, то її проекція дорівнює нулю.

Розв’язання задач теоретичної механіки з використанням прямокутної системи координатних осей досить часто вимагає визначення проекцій векторів (сил, швидкостей) на обрані осі. Тому доцільно звернути увагу на зв’язок між собою величин проекцій.

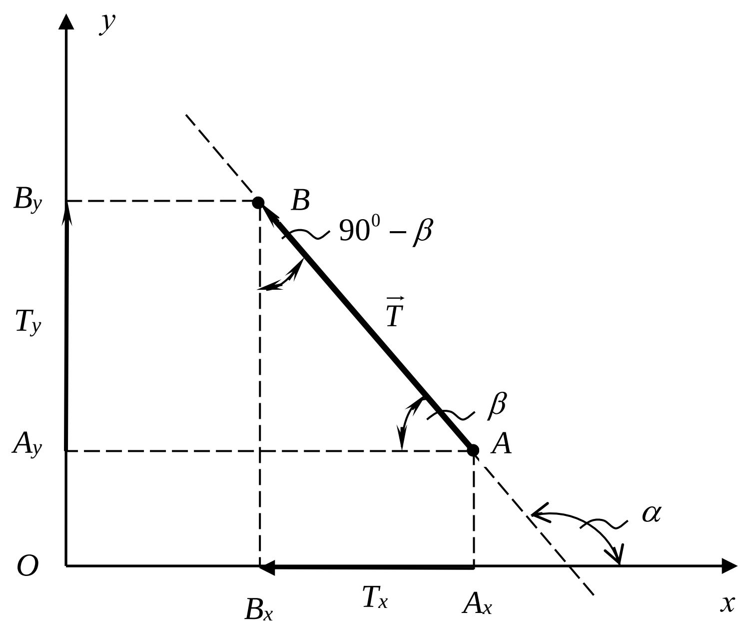


Рис. 3

Припустимо, що сила $\vec{T}$ розташована в площині xOy (рис.3) і утворює з віссю Ox тупий кут α, або гострий кут β ($\beta = 180^0 - \alpha$).

Згідно з визначенням проекції сили будемо мати:

$T_x = T \cdot \cos\alpha$ або

$T_x = -T \cdot \cos\beta$;

$T_y = T \cdot \cos(\alpha - 90^0) =$
$= T \cdot \cos(90^0 - \alpha) = T \cdot \sin\alpha$;

або

$T_y = T \cdot \cos(90^0 - \beta) = T \cdot \sin\beta$.

Таким чином, якщо при визначенні величини проекції сили на одну з осей при модулі сили множником є косинус кута, то величина проекції на іншу вісь дорівнюватиме добутку модуля сили на синус того ж кута.

При визначенні проекції довільної системи сил на певну координатну вісь користуються теоремою векторної алгебри: *проекція векторної суми на координатну вісь дорівнює алгебраїчній сумі проекцій складових на цю вісь.* Так, наприклад, проекція системи сил $\left\{\vec{F_k}\right\}$, $k = \overline{1,n}$ на вісь x :

$$\left\{\vec{F_k}\right\}_x = F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{nx} = \sum_1^n F_{kx} \ . \qquad (2)$$

В частинному випадку, коли система сил має рівнодіючу $\overrightarrow{R^*}$, її проекції на осі декартової системи координат $Oxyz$ будуть виражатися рівняннями:

$$R_x^* = \sum_1^n F_{kx}\ ;\ R_y^* = \sum_1^n F_{ky}\ ;\ R_z^* = \sum_1^n F_{kz}\ . \qquad (3)$$

Силу, як і будь-який інший вектор, можна виразити через її проекції на осі координатної системи $Oxyz$:

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}\ ,$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - одиничні вектори (орти) осей x,y і z відповідно.

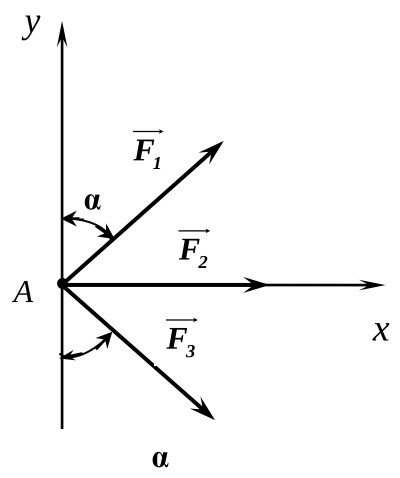
Тоді модуль сили $\vec{F}$ буде дорівнювати:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}\ . \qquad (4)$$

Косинуси кутів, які утворює вектор сили $\vec{F}$ з координатними осями, визначаються співвідношеннями:

$$\cos(\vec{F}\,\hat{,}\,\vec{i}) = \frac{F_x}{F};\cos(\vec{F}\,\hat{,}\,\vec{j}) = \frac{F_y}{F};\cos(\vec{F}\,\hat{,}\,\vec{k}) = \frac{F_z}{F}\ . \qquad (5)$$

Приклад 1. До твердого тіла в точці А прикладена система збіжних сил $F_1 = F_2 = F_3 = 100\ H$, розташованих в площині *xAy*. Визначити величину і напрям рівнодіючої цієї системи, якщо кут $\alpha = 60^0$.



Розв'язок: рівнодіюча системи збіжних сил $\overrightarrow{R^*} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3}$, а її проекції на координатні осі Ax і Ay відповідно будуть дорівнювати:

$$R_x^* = \sum_1^n F_{kx} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x}\ ;$$

$$R_y^* = \sum_1^n F_{ky} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y}.$$

Визначаємо величини проекцій заданої системи сил на обрані осі:

$F_{1x} = F_1 \cdot cos(90^0 - \alpha) = F_1 \cdot sin\alpha$; $F_{2x} = F_2 \cdot cos\alpha = F_2$; $F_{3x} = F_3 \cdot cos(90^0 - \alpha) = F_3 \cdot sin\alpha$;

$F_{1y} = F_1 \cdot cos\alpha$; $F_{2y} = F_2 \cdot cos 90^0 = 0$; $F_{3y} = -F_3 \cdot cos\alpha$.

Відповідно проекції рівнодіючої:

$$R_x^* = F_1 \cdot sin\alpha + F_2 + F_3\, sin\alpha = 100 \cdot sin 60^0 + 100 + 100 \cdot sin 60^0 = 273,4\ H;$$

$$R_y^* = F_1 \cdot cos\alpha - F_3\, cos\alpha = 0.$$

З отриманих результатів виходить, що величина рівнодіючої $R^* = R_x^* = 273,4\ H$; вектор рівнодіючої напрямлений по осі *Ax*.

<u>*Приклад 2.*</u> Відомі проекції на осі координат $R_x^* = 18\ H$ і $R_y^* = 24\ H$ рівнодіючої плоскої системи збіжних сил $\vec{F_1}, \vec{F_2}$ і $\vec{F_3}$, а також проекції цих сил на ті ж осі: $F_{2x} = -9\ H$, $F_{2y} = -7\ H$, $F_{3x} = 12\ H$, $F_{3y} = 0$. Визначити модуль сили F_1.

Розв'язок. Так як $R_x^* = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x}$, а $R_y^* = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y}$, то проекції шуканої сили будуть:

$$F_{1x} = R_x^* - F_{2x} - F_{3x} = 18 - (-9) - 12 = 15\ H,$$

$$F_{1y} = R_y^* - F_{2y} - F_{3y} = 24 - (-7) = 31\ H.$$

Тоді модуль сили $\vec{F_1}$:

$$F_1 = \sqrt{F_{1x}^2 + F_{1y}^2} = \sqrt{15^2 + 31^2} = 34,4\ H.$$

Момент сили

Одним з основних понять теоретичної механіки є поняття момента сили. З досвіду своєї багатовікової практичної діяльності людина виявила, що під дією сили фізичне тіло може здійснювати не тільки поступальний, але і обертальний рухи.

Міру механічної дії сили на тіло, яка викликає обертальний ефект, оцінюють *моментом сили*.

Вперше поняття момента сили ввів у механіку Леонардо да Вінчі. Проте, ще задовго до нього Архімед при розв'язанні задачі про рівновагу важеля інтуїтивно користувався цим поняттям.

Векторний момент сили відносно просторового центра

Вектор-моментом сили відносно довільного просторового центра називається вектор, прикладений в цьому центрі, рівний векторному добутку радіуса-вектора точки прикладання сили на вектор сили.

Згідно з наведеним визначенням векторний момент сили $\vec{F}$, яка прикладена в точці А відносно центра O (рис.4), визначається рівнянням :

$$\overrightarrow{M_0}(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}\,. \qquad (6)$$

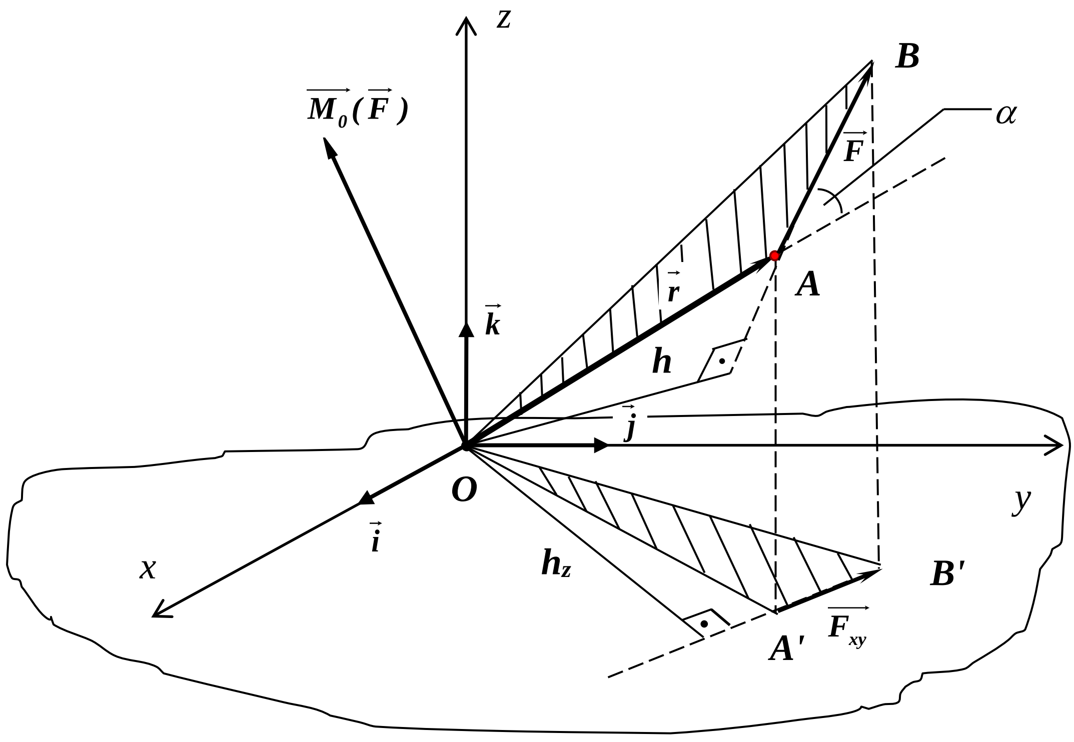


Рис. 4

Модуль вектор-момента, як модуль векторного добутку двох векторів, знаходять за формулою:

$$M_0(\vec{F}) = r \cdot F \cdot \sin(\vec{r} \hat{,} \vec{F}) = r \cdot F \cdot \sin\alpha\,. \qquad (7)$$

Перпендикуляр h, який опущений з центра *O* (рис.4) на лінію дії сили $\vec{F}$, називають *плечем сили* $\vec{F}$ відносно центра *O*. Очевидно, що:

$$h = r \cdot \sin\alpha\,.$$

Тоді:

$$M_0(\vec{F}) = F \cdot h. \qquad (8)$$

Тобто, числове значення вектор-момента дорівнює добутку сили на плече сили відносно обраного центра. Напрямлений векторний момент сили перпендикулярно до площини, яка проходить через лінію дії сили і моментний центр О, таким чином, що з його кінця можна бачити прагнення сили обертати тіло (площину ОАВ) проти руху годинникової стрілки.

Якщо початок прямокутної декартової системи координат сполучити з центром *O* (рис.4), то для визначення вектор-момента сили користуються також такими формулами:

$$\overrightarrow{M_0}(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \qquad (9)$$

і

$$M_0(\vec{F}) = M_{ox} \cdot \vec{i} + M_{oy} \cdot \vec{j} + M_{oz} \cdot \vec{k}, \qquad (10)$$

де: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - орти обраної системи координат;

x, y, z – проекції радіуса-вектора $\vec{r}$ на координатні осі (координати точки А прикладання сили $\vec{F}$);

F_x, F_y, F_z - проекції вектора сили $\vec{F}$ на ті ж осі;

M_{ox}, M_{oy}, M_{oz} - проекції вектор-момента сили $\vec{F}$ на осі координат.

Модуль векторного момента $\overrightarrow{M_0}(\vec{F})$ і його напрям у просторі при відомих проекціях визначають за формулами:

$$M_0(\vec{F}) = \sqrt{M_{ox}(\vec{F})^2 + M_{oy}(\vec{F})^2 + M_{oz}(\vec{F})^2}; \qquad (11)$$

$$\left.\begin{aligned} &\cos(\overrightarrow{M_0}\,\hat{,}\,\vec{i}) = \frac{M_{0x}(\vec{F})}{\overline{\overrightarrow{M_0}(\vec{F})}}; \quad \cos(\overrightarrow{M_0}\,\hat{,}\,\vec{j}) = \frac{M_{0y}}{M_0}; \\ &\cos(\overrightarrow{M_0}\,\hat{,}\,\vec{k}) = \frac{M_{0z}}{M_0}. \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Вектор-момент сили відносно просторового центра має такі властивості:

1) момент сили відносно центра не змінюється при переносі точки прикладання сили вздовж лінії її дії;

2) момент сили відносно центра дорівнює нулю, коли лінія дії сили проходить через цей центр;
3) момент сили відносно центра є зв'язаним вектором.

Момент сили відносно осі

Моментом сили відносно осі називають алгебраїчну величину, яка дорівнює добутку модуля проекції цієї сили на площину, перпендикулярну до осі, на найкоротшу відстань між точкою перетину осі з площиною і лінією дії проекції сили.

Так, момент сили, наприклад, відносно осі *Oz* (рис.4) за визначенням відповідає формулі:

$$M_z(\vec{F}) = M_0(\overrightarrow{F_{xy}}) = h_z \cdot F_{xy}, \tag{13}$$

в якій $\overrightarrow{F_{xy}}$ - проекція сили $\vec{F}$ на площину *Oxy*, величина векторна;

h_z - плече сили $\overrightarrow{F_{xy}}$ відносно точки *O*, тобто перпендикуляр, опущений з точки перетину осі z з площиною Oxy, на лінію дії проекції $\overrightarrow{F_{xy}}$.

Момент сили відносно осі вважається додатним, якщо проекція сили на площину, перпендикулярну осі, прагне обертати тіло зі сторони додатного напряму осі проти руху годинникової стрілки, і від'ємним – коли сила намагається обертати тіло за рухом годинникової стрілки.

З визначення момента можна отримати такі важливі висновки.

1. Момент сили відносно певної осі не змінюється як при переносі точки прикладання сили паралельно обраній осі, так і при переносі центра моментів вздовж цієї осі.
2. Момент сили відносно осі дорівнює нулю, якщо лінія дії сили паралельна осі (в такому випадку дорівнює нулю проекція сили на площину, перпендикулярну осі).
3. Момент сили відносно осі дорівнює нулю, коли лінія дії сили перетинає цю вісь.

Оскільки момент сили відносно осі не залежить від вибору точки на осі, то у подальшому замість позначень $M_{oz}(\vec{F}), M_{oy}(\vec{F}), M_{ox}(\vec{F})$ будемо використовувати позначення $M_z(\vec{F}), M_y(\vec{F}), M_x(\vec{F})$ або M_z, M_y, M_x.

Алгебраїчний момент сили відносно точки площини

Подання момента сили відносно просторового центра у вигляді вектора цілком відповідає фізичній суті цього поняття, коли сили розташовані в різних площинах.

Тільки при розгляданні системи сил, які розташовані в одній площині, можна нехтувати напрямом вектор-момента, а враховувати тільки його алгебраїчне значення.

У випадку плоскої системи сил вектори моментів сил відносно довільної точки площини дії сил *перпендикулярні* до цієї площини і, отже, паралельні між собою. Тому суттєвим є лише величина вектора момента сили, що дозволяє векторне додавання замінити на алгебраїчне (рис.5).

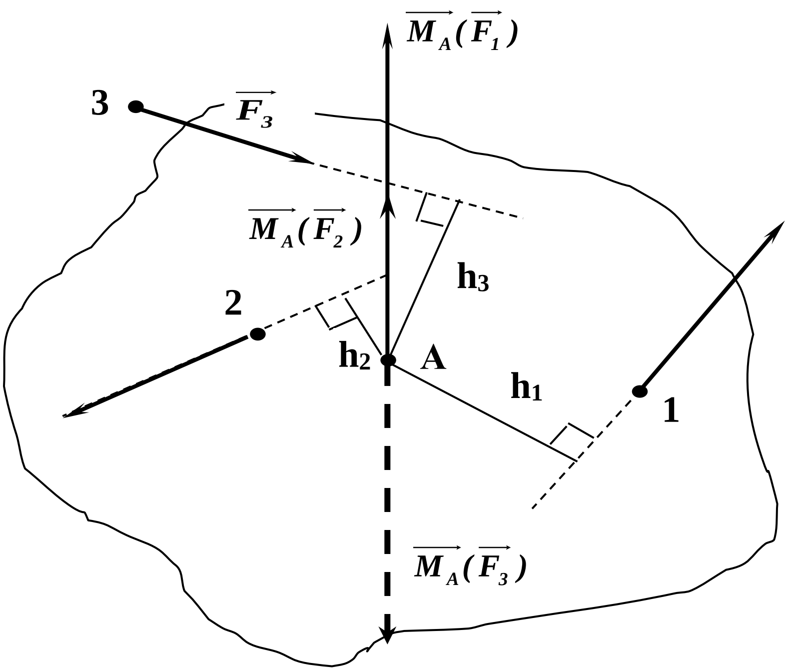


Рис. 5

Алгебраїчним моментом сили відносно точки площини, в якій розташована лінія дії сили, називають добуток величини сили на плече сили, взятий з відповідним знаком.

В теоретичній механіці заведено, що алгебраїчний момент сили є додатним, коли сила прагне обертати тіло навколо моментної точки проти руху годинникової стрілки і від'ємним – коли за рухом годинникової стрілки. Таким чином в загальному випадку момент сили відносно довільної точки А площини:

$$M_A(\vec{F}) = \pm hF \,. \qquad (14)$$

Наприклад, для плоскої системи сил $\{\vec{F_1}, \vec{F_2}, \dots, \vec{F_n}\}$, які лежать в площині *xOy* (рис.6):

$$M_C(\vec{F_1}) = h_1 F_1 \,,\; M_C(\vec{F_2}) = h_2 F_2 \,,\; M_C(\vec{F_K}) = -h_K F_K \,,\; M_C(\vec{F_n}) = -h_n F_n \,.$$

Алгебраїчний момент системи заданих сил в цілому дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових відносно точки С:

$$\sum_1^n M_c(\vec{F_K}) = h_1 F_1 + h_2 F_2 - h_K F_K - h_n F_n \,.$$

З формули (14) визначення момента сили виходить, що алгебраїчний момент сили відносно точки площини дорівнює нулю тільки тоді, коли лінія дії сили проходить через цю точку (плече h сили дорівнює нулю).

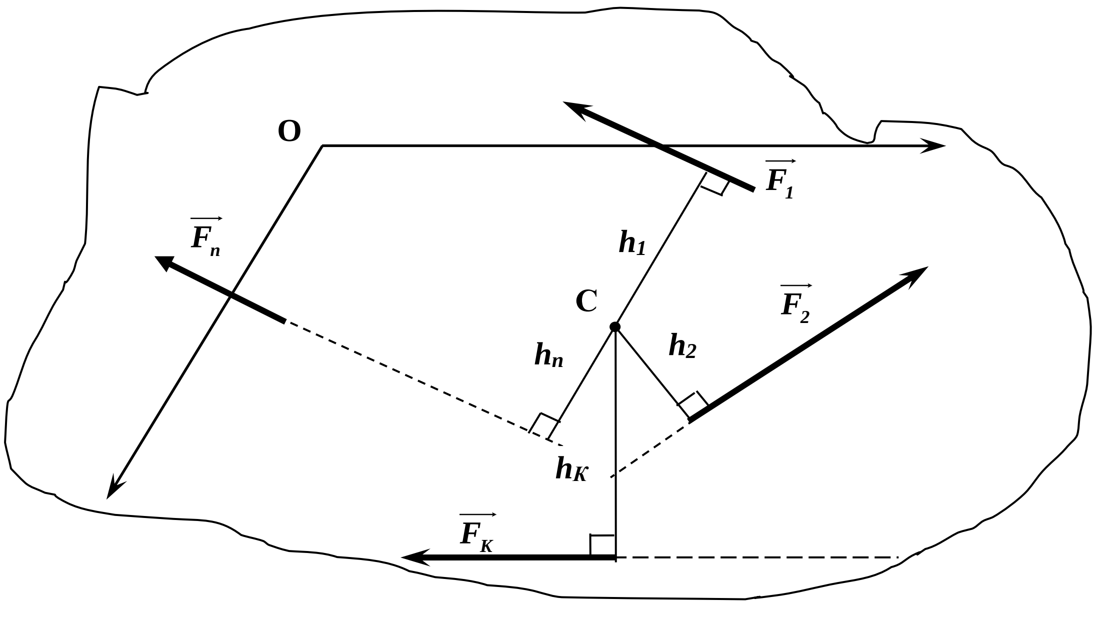


Рис. 6

Пара сил і її властивості

Парою сил називають систему двох рівних за модулем паралельних сил, напрямлених в протилежні сторони по незбіжних лініях дії (рис.7).

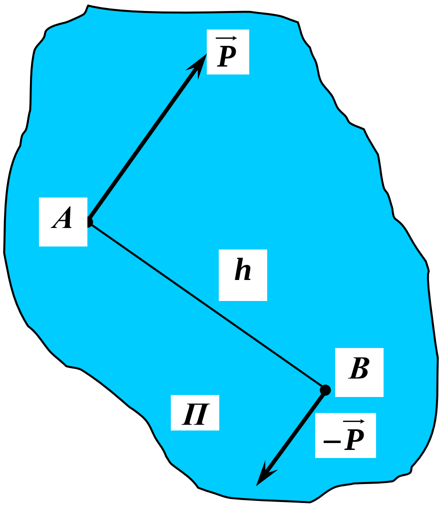


Рис.7

Пару сил позначають так: $(\vec{P},-\vec{P})$. Площину, в якій розташовані паралельні сили, називають площиною дії пари сил, чи, просто, площиною пари.

Вперше поняття пари сил – нової абстракції в механіці – було введено Луї Пуансо (1777-1859) академіком Паризької академії наук у 1803 р. в трактаті "Початки статики".

Пара сил не утворює зрівноважену систему і не має рівнодіючої. Вона не може бути спрощена і тому є особливою мірою механічної дії на дане тіло з боку інших тіл. Досвід показує, що пара сил, прикладених до твердого тіла, прагне надати йому певне обертання. Цей обертальний ефект пари сил оцінюється моментом пари сил.

Момент пари сил

Нехай дано пару сил $(\vec{P},-\vec{P})$, що діє в площині N, розташованій як завгодно у просторі. Обчислимо суму моментів сил $\vec{P}$ і $-\vec{P}$, що складають пару, відносно довільного центра O. З'єднаємо початки сил з цим центром радіусами-векторами $\vec{r_1}$ і $\vec{r_2}$. Згідно з визначенням вектор-момента сили (формула 6), будемо мати:

$$\overrightarrow{M_0}(\vec{P})+\overrightarrow{M_0}(-\vec{P})=\vec{r_1}\times\vec{P}+\vec{r_2}\times(-\vec{P})=(\vec{r_1}-\vec{r_2})\times\vec{P}=\vec{\rho}\times\vec{P}$$

Отриманий результат не залежить від положення центра *O*, відносно якого визначено момент пари сил, тобто вектор-момент сил пари є *вільним вектором*. У подальшому позначатимемо його через $\vec{M}(\vec{P},-\vec{P})$, або скорочено $\vec{M}$. Тоді:

$$\vec{M}=\vec{M}(\vec{P},-\vec{P})=\vec{\rho}\times\vec{P}. \qquad (15)$$

Таким чином, *момент пари сил – це вільний вектор , напрямлений перпендикулярно до площини дії пари в той бік, звідкіля обертання тіла під дією пари сил відбувається проти руху годинникової стрілки* (рис.8).

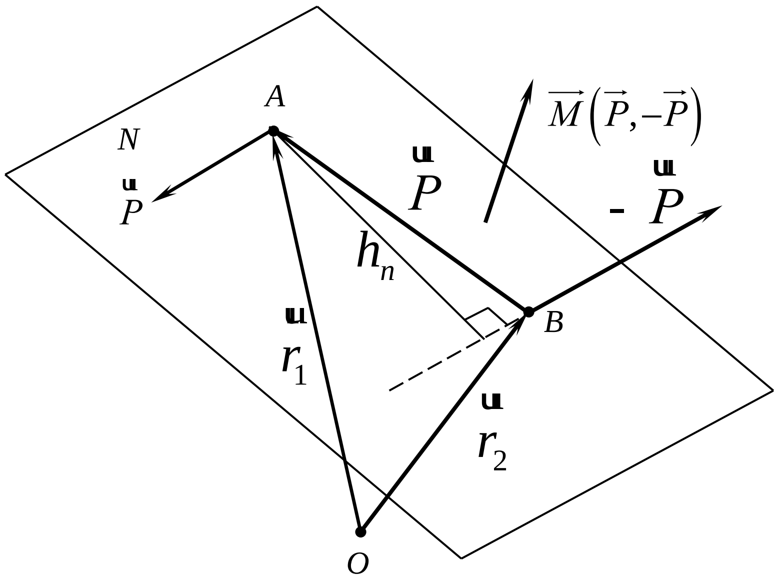


Рис.8

Модуль момента пари сил дорівнює добутку модуля однієї з сил пари на плече пари h_n, тобто на найкоротшу відстань між лініями дії сил, що складають пару:

$$M=h_n\cdot P. \qquad (16)$$

Властивості пари сил

Основні властивості нового елемента теоретичної механіки і основні правила перетворення цього елемента виходять з формул (15) і (16).

1. Дві пари сил еквівалентні одна одній, коли їх вектор-моменти рівні.
2. Момент пари сил не змінюється при:
   2.1. довільному переміщенні пари сил в площині її дії без зміни орієнтації сил, що утворюють пару;
   2.2. зміні числового значення сил пари і її плеча без зміни величини момента пари;
   2.3. переносі пари сил до будь-якої площини, паралельній площині дії пари.
3. Декілька пар сил, довільно розташованих у просторі, можна замінити однією – результуючою – парою за правилом додавання векторів:

$$\overrightarrow{M} = \sum_{1}^{n} \overrightarrow{M_K}, \; k = \overline{1,n}.$$

4. Пара сил, що діє на матеріальний об'єкт, може бути зрівноважена тільки іншою парою сил.
5. Проекція пари сил (момента пари сил) на будь-яку координатну вісь дорівнює нулю.

Швидкість, прискорення, імпульс

До основних кінематичних понять теоретичної механіки, які характеризують рух матеріальної точки, відносяться поняття швидкості і прискорення.

Швидкість точки – це векторна величина, що дає змогу визначити як і в якому напрямі змінюється з часом положення точки у просторі. Позначають швидкість літерою $\vec{\upsilon}$.

Прискоренням точки називають векторну величину, що є мірою зміни у часі як за модулем, так і за напрямом її швидкості. Для позначення прискорення користуються літерами $\vec{a}$ або $\overrightarrow{W}$.

В другому законі механіки Ньютон використав поняття *кількості руху*, під яким розумів міру механічного руху матеріальної точки, що дорівнює добутку маси точки на вектор її швидкості – $\overrightarrow{m\upsilon}$.

В сучасній фізичній літературі термін "кількість руху" замінено терміном "імпульс точки":

$$\vec{q} = \overrightarrow{m\upsilon}.$$

Закони механіки Галілея-Ньютона

Перший закон. Матеріальна точка, ізольована від дії будь-яких інших тіл, зберігає відносно нерухомої системи відліку стан спокою або рівномірного прямолінійного руху.

Другий закон. Перша похідна за часом від вектора імпульсу матеріальної точки за величиною і напрямом дорівнює вектору сили, що діє на цю точку:

$$\frac{d\vec{q}}{dt} = \frac{d(m\vec{\upsilon})}{dt} = \vec{F}.$$

Оригінальне формулювання другого закону Ньютоном таке: зміна кількості руху $\overrightarrow{m\upsilon}$ пропорційна рушійній силі і відбувається за напрямом тієї прямої, по котрій ця сила діє.

Третій закон (аксіома рівності дії і протидії). Сили, з якими діють одне на одне два матеріальних тіла, завжди рівні за величиною і напрямлені по одній прямій в протилежні сторони.

Принцип незалежності дії сил (четвертий закон). Якщо на матеріальну точку діють кілька сил, то вони надають їй прискорення, що дорівнює геометричній (векторній) сумі тих прискорень, які точка отримує при дії кожної з цих сил окремо.

Потрібно пам’ятати, що закони класичної механіки справедливі тільки в інерціальних системах відліку і сформульовані для вільних матеріальних об’єктів, тобто для таких, на переміщення яких у просторі не накладено ніяких обмежень.

Питання для самоконтролю

1. Якими параметрами визначається сила, що діє на тверде тіло?
2. Що таке лінія дії сили?

3. Що називають проекцією сили на координатну вісь?
4. Який кут складає вектор з віссю, якщо його проекція на цю вісь: додатна; від'ємна; дорівнює нулю?
5. Як напрямлений вектор сили $\vec{P}$, що лежить в площині xOy, якщо його проекція на вісь Ox дорівнює нулю?
6. Що можна сказати про вектор просторової сили $\vec{F}$ у випадку, коли:

   а) проекція сили на вісь x дорівнює нулю;

   б) проекція сили на площину xOz дорівнює нулю?
7. Які системи сил називають еквівалентними?
8. Яку силу називають рівнодіючою системи сил?
9. Чи може рівнодіюча двох сил бути за модулем менше, ніж модуль складових її сил?
10. Дайте визначення векторного момента сили відносно довільного просторового центра і наведіть відповідну формулу.
11. Визначить геометричні місця точок простору, відносно яких моменти даної сили : а) геометрично рівні; б) рівні за модулем.
12. Що називають плечем сили?
13. Дайте визначення алгебраїчного момента сили відносно точки площини, в якій розташована лінія дії сили.
14. В яких випадках момент сили відносно а) довільного просторового центра; б) осі; в) точки площини, в якій розташована лінія дії сили, дорівнює нулю?
15. Чи можуть бути рівними моменти двох різних сил відносно однієї точки площини?
16. Дайте визначення пари сил. Чому дорівнює момент пари сил?
17. Які перетворення пари сил не змінюють її дії на тверде тіло?
18. Чому дорівнює проекція момента пари сил на координатну вісь? Відповідь обґрунтуйте.

1. СТАТИКА ТВЕРДОГО ТІЛА

Статика є розділом теоретичної механіки, в якому розглядаються властивості сил, а також умови рівноваги абсолютно твердого тіла або системи таких тіл під дією прикладених до них сил.

Статика – вельми важливий розділ курсу теоретичної механіки не тільки тому, що методи статики широко використовуються в суміжних дисциплінах (механіка матеріалів, теорія механізмів і машин, деталі машин та інш.), але і тому, що методи її покладені в основу розв’язання задач динаміки за допомогою принципу Даламбера (метод кінетостатики).

Математичний апарат статики базується на обмеженій кількості істин (аксіом), частина яких безпосередньо виходить із законів Ньютона.

1.1. Аксіоми статики вільного твердого тіла

Аксіома 1.

Дві сили, прикладені до вільного твердого тіла, взаємно зрівноважуються тоді і тільки тоді, коли вони рівні за величиною і діють вздовж однієї прямої в протилежних напрямах (рис.1.1).

Математично аксіома 1 виражається таким чином:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{рівність модулів сил:} & \boldsymbol{F_1 = F_2},\\ \text{протилежність напрямів:} & \overrightarrow{\boldsymbol{F_2}} = -\overrightarrow{\boldsymbol{F_1}},\end{array}\right\} \qquad (1.1')$$

напрям векторів сил вздовж однієї прямої в протилежні сторони забезпечує векторне рівняння рівності за модулем і протилежності знаків моментів даних сил відносно будь-якої точки *O*, що не лежить на прямій *MN* (рис.1.1), тобто

$$\overrightarrow{\boldsymbol{M_0}}(\overrightarrow{\boldsymbol{F_2}}) = -\overrightarrow{\boldsymbol{M_0}}(\overrightarrow{\boldsymbol{F_1}}). \qquad (1.1'')$$

Потрібно мати на увазі, що ця аксіома справедлива тільки для абсолютно твердого тіла; для тіл, що можуть деформуватися, вона не завжди справедлива.

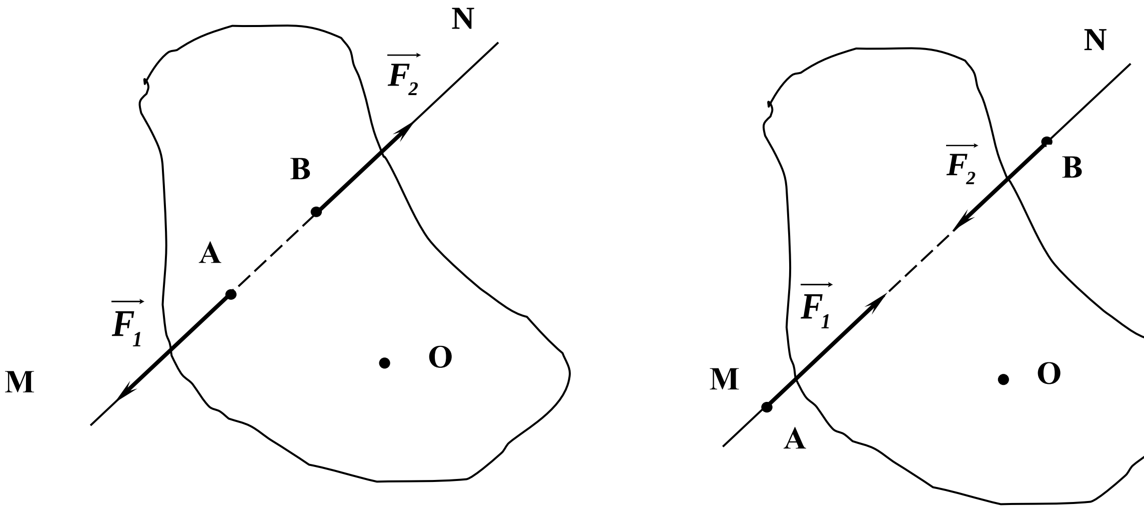


Рис. 1.1

Аксіома 2.

Дія на тверде тіло системи сил не змінюється від додавання до неї, чи відкидання від неї зрівноваженої системи сил.

Таким чином, згідно з аксіомою 2, стан спокою або характер руху твердого тіла не змінюється при додаванні до цього тіла або відкиданні від нього зрівноваженої системи сил.

Аксіома 3.

Рівнодіюча двох сил, прикладених до однієї точки твердого тіла під кутом одна до одної, визначається за величиною і напрямом діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах цих сил як на сторонах (рис.1.2).

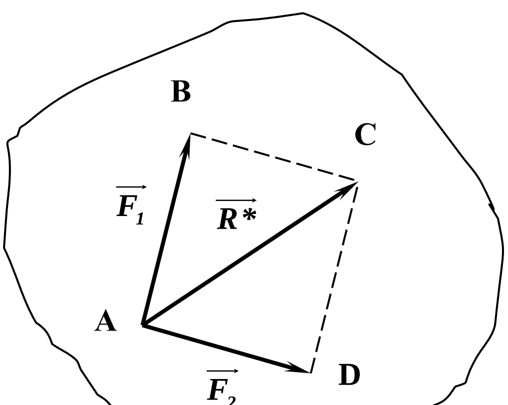


Рис.1.2

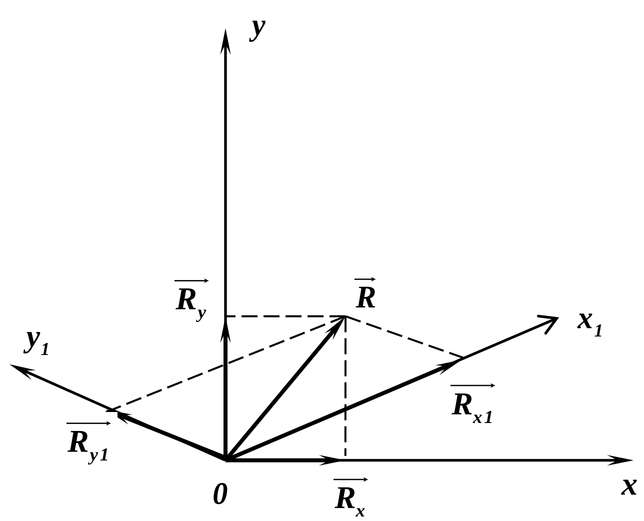


Рис.1.3

Ця аксіома може бути застосована до будь-яких тіл, не обов'язково до абсолютно твердих.

Заміна двох сил рівнодіючою за правилом паралелограма є не що інше, як векторне додавання. Тому:

$$\overrightarrow{R^*} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} \,. \tag{1.2}$$

Модуль рівнодіючої двох сил знаходять за формулою визначення довжини діагоналі паралелограма:

$$R^* = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 \cdot F_2 \cdot \cos(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2})} \,. \tag{1.3}$$

Висновок з аксіоми 3. Будь-яку силу $\vec{R}$ можна розкласти на складові по двох довільних напрямах за правилом паралелограма (рис.1.3).

$$\vec{R} = \overrightarrow{R_x} + \overrightarrow{R_y} = \overrightarrow{R_{x1}} + \overrightarrow{R_{y1}} \,.$$

1.2. Дві найпростіші теореми статики

1.2.1. Теорема 1. *Дія сили на абсолютно тверде тіло не змінюється, якщо початок вектора сили, прикладеної до цього тіла, перенести вздовж лінії її дії в будь-яку точку тіла.*

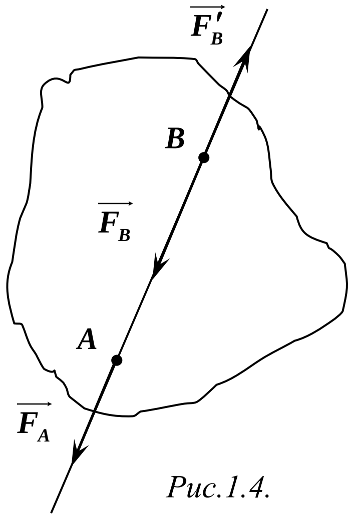


Рис.1.4.

Нехай на тверде тіло діє сила $\overrightarrow{F_A}$, прикладена в точці А (рис.1.4). Оберемо на лінії дії цієї сили довільну точку В в прикладемо до неї зрівноважені сили $\overrightarrow{F_B}$ і $\overrightarrow{F_B}'$, такі, що $|\overrightarrow{F_A}| = |\overrightarrow{F_B}| = |\overrightarrow{F'_B}|$. Очевидно, сили $\overrightarrow{F_A}$ і $-\overrightarrow{F'_B}$ також утворюють зрівноважену систему сил, яку на підставі аксіоми 2 можна відкинути. Залишається сила $\overrightarrow{F_B} = \overrightarrow{F_A}$, що і потрібно було довести.

Як відомо з математики, вектор, який можна переносити вздовж лінії його дії, називають ковзним. Таким чином, з доведеної теореми випливає, що сила, яка діє на абсолютно тверде тіло, є *ковзним вектором.*

Слід також відмітити, що дана теорема стосується тільки абсолютно твердого тіла; для тіл, що деформуються, перенос точки прикладання сили змінює її вплив на тіло.

1.2.2. Теорема 2. *Вільне тверде тіло може знаходитися в рівновазі під дією трьох непаралельних сил, що лежать в одній площині, тільки тоді, коли лінії дії цих сил перетинаються в одній точці.*

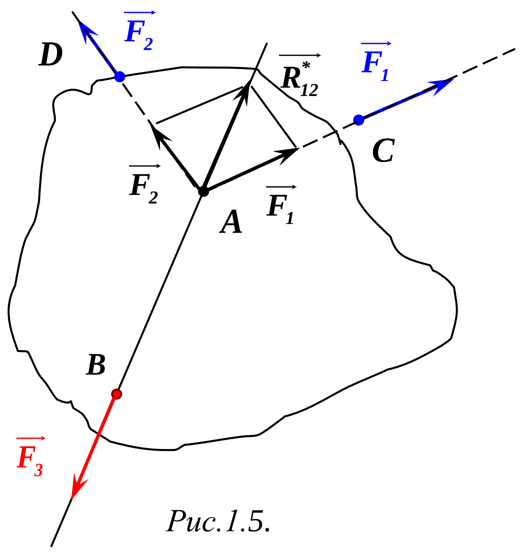


Рис.1.5.

Припустимо, що на тверде тіло діють три непаралельні сили: $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$, які прикладені в точках C, D, B, а лінії дії двох з них, наприклад, $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$, перетинаються в точці A (рис.1.5). Перенесемо сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ до цієї точки і на підставі аксіоми 3 замінюємо їх рівнодіючою $\vec{R}^*_{12}$. Тепер на тіло діють тільки дві сили: $\vec{R}^*_{12}$ і $\vec{F}_3$, рівновага яких за аксіомою 1 можлива тільки тоді, коли вони будуть рівними за модулем і напрямлені вздовж однієї прямої. А це означає, що лінія дії сили $\vec{F}_3$ також буде проходити через точку A перетину ліній дії сил $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$.

Доведену теорему називають *теоремою про три сили.* Вона дає лише необхідну умову рівноваги тіла під дією трьох сил. Але для рівноваги тіла зовсім не достатньо, щоб лінії дії трьох сил перетиналися в одній точці.

1.3. Вільні і невільні тіла. В’язі і їх реакції

В теоретичній механіці тверде тіло вважається вільним, якщо воно має можливість здійснювати будь-які переміщення в просторі під дією прикладених до нього відповідних сил.

Якщо певні переміщення тіла неможливі через обмеження, накладені з боку інших тіл, то дане тверде тіло називають *невільним.*

Обмеження, накладені на положення і рух твердого тіла, називають *в’язями.*

Таким чином, в'язі, що накладаються на тіло, обмежують його рух і відхиляють від того, який був би можливим під дією тих самих прикладених сил, але без в'язей. В статиці розглядаються найпростіші в'язі у формі різноманітних твердих або гнучких тіл.

Між тілом і в'яззю існує механічна взаємодія. Сила, з якою в'язь діє на тіло, називається *реакцією в'язі*, чи просто *реакцією*. Реакція в'язі прикладена до тіла. Згідно з третім законом Ньютона дане тіло діє на в'язь з силою, рівною за модулем і протилежно напрямленою реакції в'язі. Цю силу називають силою *тиску* тіла на в'язь.

За характером обмежень, що накладають в'язі на тіла, їх можна поділити на два види: *односторонні* чи *неутримуючі* і *двосторонні* або *утримуючі*. В'язі обох видів, в яких відсутні сили тертя, називають *ідеальними*.

Односторонніми в'язями називають такі в'язі, котрі обмежують свободу руху тіла тільки в одному напрямі. Всередині цього виду розрізняють в'язі односторонні тверді і односторонні гнучкі.

Якщо мати на увазі, що будь-яка в'язь дає реакцію тільки в напрямі, протилежному тому переміщенню, якого вона не дозволяє, то можна дійти до висновку: *реакція ідеальної односторонньої твердої в'язі напрямлена вздовж спільної нормалі до поверхонь тіла і в'язі в точці або поверхні їх стикання в бік від в'язі до тіла* (рис.1.6).

До гнучких в'язей належать троси, канати, ланцюги, паси, тощо. Особливістю гнучкої в'язі є те, що вона перешкоджає переміщенню тіла тільки в одному напрямі. Реакція ідеальної гнучкої в'язі завжди напрямлена вздовж її геометричної осі, причому від тіла до в'язі. А це означає, що гнучкі в'язі працюють тільки на розтягування (рис. 1.7).

Двосторонніми (утримуючими) називають такі в'язі, котрі обмежують переміщення тіла, як в одному, так і в прямо протилежному напрямах.

Класичними представниками двосторонніх в'язей є нерухомі шарніри. Шарніром називають таке з'єднання двох тіл, яке дає можливість повороту одного тіла навколо певної точки або осі, зв'язаних з другим тілом. Якщо цей поворот здійснюється навколо точки (центра шарніра), то такий шарнір називається *кульовим (сферичним)*.

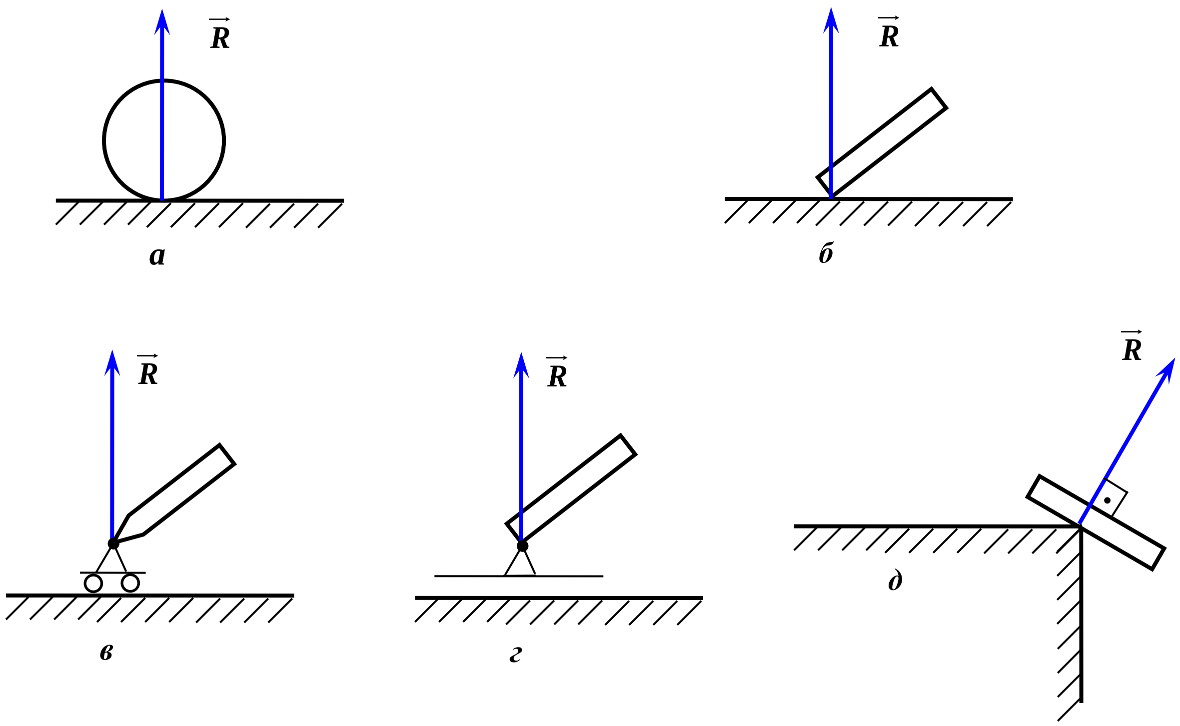


Рис.1.6

а,б – гладка опорна поверхня; в,г – рухомо-шарнірна опора (коток);

д – гладке ребро

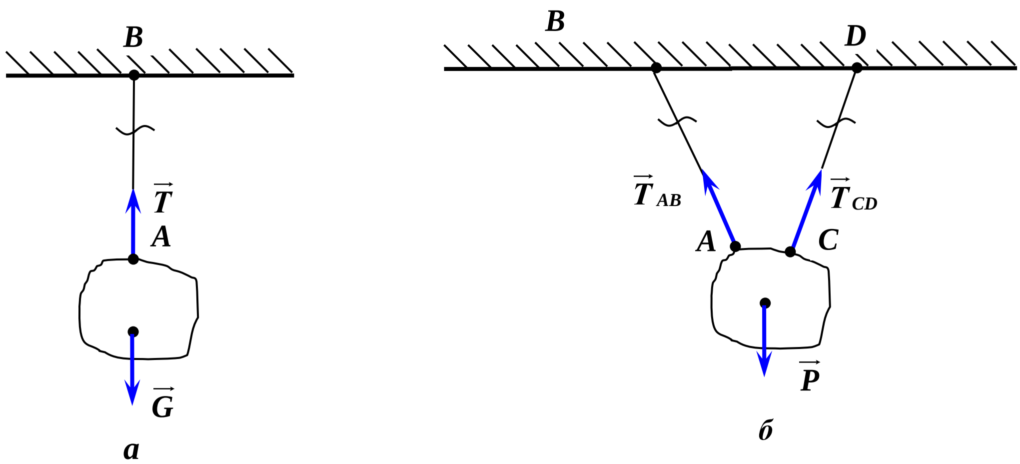
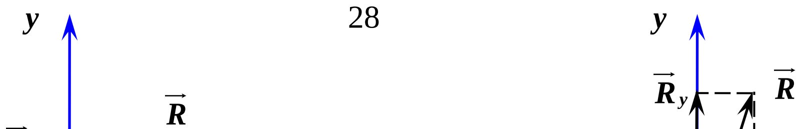


Рис. 1.7

Гнучкі в'язі



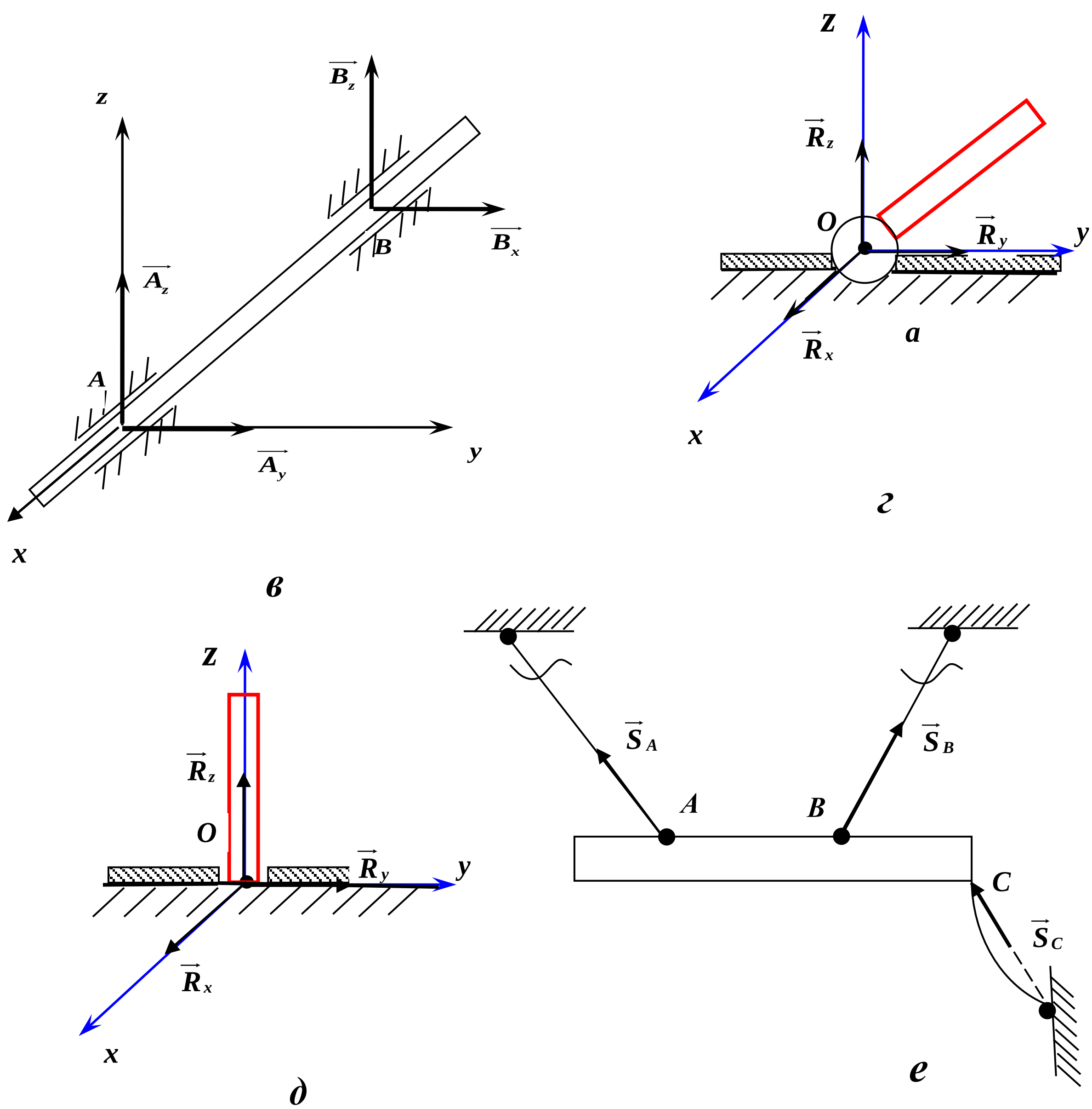


Рис. 1.8

а,б – циліндричний шарнір; в – радіальний підшипник; г – сферичний шарнір; д – підп'ятник; е – стержневі в'язі.

Якщо ж поворот можливий тільки навколо однієї певної осі, то шарнір називають *циліндричним.* Різновидами циліндричного шарніра є *радіальні підшипники,* а також (за принципом механічної дії) *підп'ятник.*

В загальному випадку реакції двосторонніх в'язей невідомі за величиною і напрямом. Тому при розв'язанні задач механіки, коли потрібно визначити реакції таких в'язей, їх показують у вигляді складових, напрямлених по координатних осях (рис.1.8).

Якщо опорою тіла є нерухомий ідеальний циліндричний шарнір або радіальний підшипник, то реакція в'язі проходить через повздовжню вісь шарніра (підшипника) і лежить в площині, перпендикулярній до цієї осі. Очевидно, що і складові повної реакції також розташовані у вказаній площині (рис.1.8 а,б,в).

В'язі, що здійснюються за допомогою сферичного шарніра або підп'ятника, дають реакції невідомі ні за величиною, ні за напрямом, але при відсутності в таких опорах тертя ці реакції будуть проходити через центр шарніра чи опорну точку підп'ятника. Для визначення модуля і напряму реакції зручно знаходити їх проекції на три координатні осі (рис. 1.8 г,д).

Найпростішим представником двосторонньої в'язі є в'язь, яка здійснюється за допомогою невагомих жорстких стержнів, що мають на кінцях точкові шарніри (тобто розмірами їх можна нехтувати). При відсутності тертя в шарнірах реакція такої в'язі напрямлена по прямій, що з'єднує кінцеві шарніри. На відміну від гнучких в'язей, стержні працюють як на розтягнення, так і на стиск (рис. 1.8.е).

Найскладнішими статичними в'язями, в розумінні визначення їх реакцій, є так звані повні в'язі, з яких найбільш поширена у практиці *жорстка заробка* (жорстке защемлення). Така утримуюча в'язь перешкоджає не тільки лінійним переміщенням тіла, але і повороту його навколо точки защемлення *O*. Ці накладені в'яззю обмеження створюють систему реакцій, яка зводиться до реактивної сили $\overrightarrow{\boldsymbol{R}_0}$ і пари сил з реактивним моментом $\overrightarrow{\boldsymbol{M}_0}$ (момент заробки). Зазначена сукупність сили і пари сил визначається відповідними умовами рівноваги тіла. У випадку, коли на тіло діє плоска система сил, реакцію жорсткої заробки $\vec{R_0}$ розкладають на дві складові, а невідомий реактивний момент $\vec{M_0}$ напрямляють перпендикулярно до площини дії зовнішніх сил (рис. 1.9,а). Якщо ж на тіло діє просторова система сил, невідомі $\vec{R_0}$ і $\vec{M_0}$ зображають у вигляді складових, які напрямляють вздовж координатних осей (рис.1.9,б).

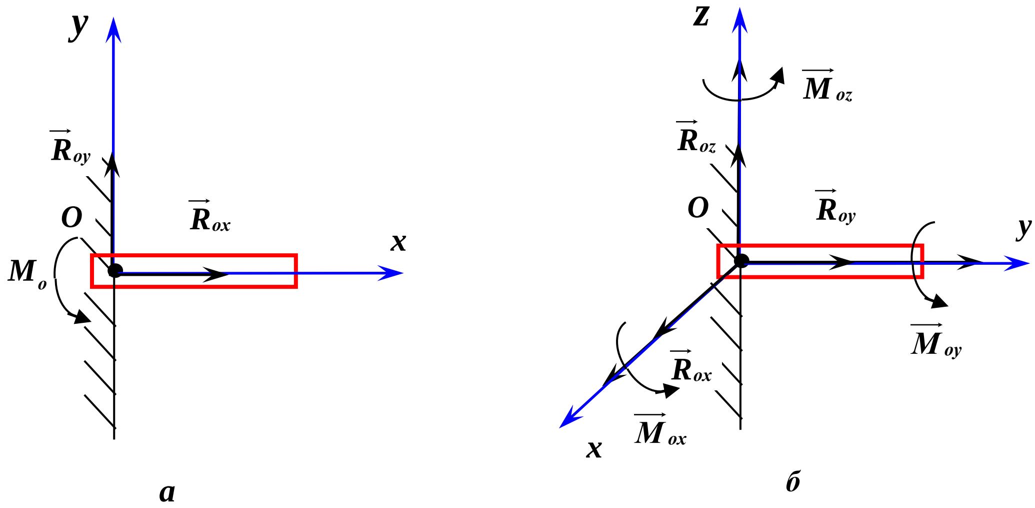


Рис.1.9

1.4. Аксіоми про в’язі

Фізичні властивості в’язей визначаються системою аксіом. До цієї групи положень теоретичної механіки, насамперед, відноситься третій закон Ньютона, бо існування реакцій в’язей як протидії при русі, або, в частинному випадку, - рівновазі тіла – спирається на цей основний закон механіки. Наступними аксіомами є такі.

1. Аксіома про звільнення від в’язей. *Невільне тверде тіло чи механічну систему можна розглядати як вільні, якщо відкинути в’язі і замінити їх дію відповідними реакціями.*

Аксіома, яку ще називають принципом звільнення від в’язей, дозволяє формально зводити задачу вивчення умов рівноваги або руху невільних тіл чи механічних систем до задачі дослідження вільних тіл і систем.[2]

[2] Принцип звільнення від в’язей в явній формі вперше використав французький математик Даламбер (1717…1783 р.р.) при розв’язанні задачі визначення динамічних реакцій невільної матеріальної системи.

2. Аксіома про накладання нових в'язей. *Рівновага механічної системи, або твердого тіла не порушується при накладанні на них нових в'язей.*

3. Аксіома про затвердіння. *Рівновага тіла, що може деформуватися, не порушується, якщо, без зміни прикладених до нього сил, розглядати це тіло як абсолютно тверде.*

Аксіома про затвердіння дозволяє методами теоретичної механіки розв'язувати найпростіші задачі статики тіл, що деформуються (пасові передачі, ланцюги, канати).

1.5. Класифікація сил. Метод перерізів

В курсі теоретичної механіки користуються двома способами класифікації сил. При розгляданні умов рівноваги або руху невільних твердих тіл сили поділяють на *активні сили* і *реакції в'язей.*

Активними називають сили, які при дії на тіло, що знаходиться у стані спокою, здатні надати йому той чи інший рух, модулі і напрями яких наперед відомі і від інших сил, прикладених до тіла, не залежать.

Реакції в'язей за своєю природою відрізняються від інших сил тим, що вони не сповна визначаються самою в'яззю; модулі, а інколи, і напрями їх залежать від активних сил, які діють на тіло.

За другим способом класифікації, який використовують при дослідженні системи кількох взаємодіючих між собою твердих тіл, розрізняють сили *зовнішні* і *внутрішні.*

Зовнішніми називають сили, які є результатом дії на механічну систему тіл, що не належать даній системі.

Внутрішні сили – це сили взаємодії між матеріальними точками або тілами, що входять до складу однієї механічної системи.

Згідно з третім законом Ньютона внутрішні сили розглядають як систему дій і протидій. Отже, кожний внутрішній силі можна поставити у відповідність другу внутрішню силу, рівну першій за величиною, але напрямленою протилежно.

Наприклад, силі $\vec{F}_{ki}$, що є дією тіла *«k»* на тіло *«i»*, відповідає сила дії тіла *«i»* на тіло *«k»* - $\vec{F}_{ik}$, причому $\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$.

Для абсолютно твердих тіл внутрішні сили взаємно зрівноважуються, і при вивченні умов рівноваги твердого тіла або системи твердих тіл враховують тільки зовнішні сили.

Питання визначення внутрішніх сил взагалі виходить за межі теоретичної механіки, але в деяких випадках воно може бути розв’язане на основі *методу перерізів.*

Суть цього методу полягає в тому, що механічну систему, яка складається з кількох тіл, умовно розділяють в місцях з’єднань на окремі тіла і розглядають рівновагу кожного з них окремо. При цьому внутрішні сили, що діяли між тілами в місцях перерізів, переходять до класу зовнішніх (рис. 1.10).

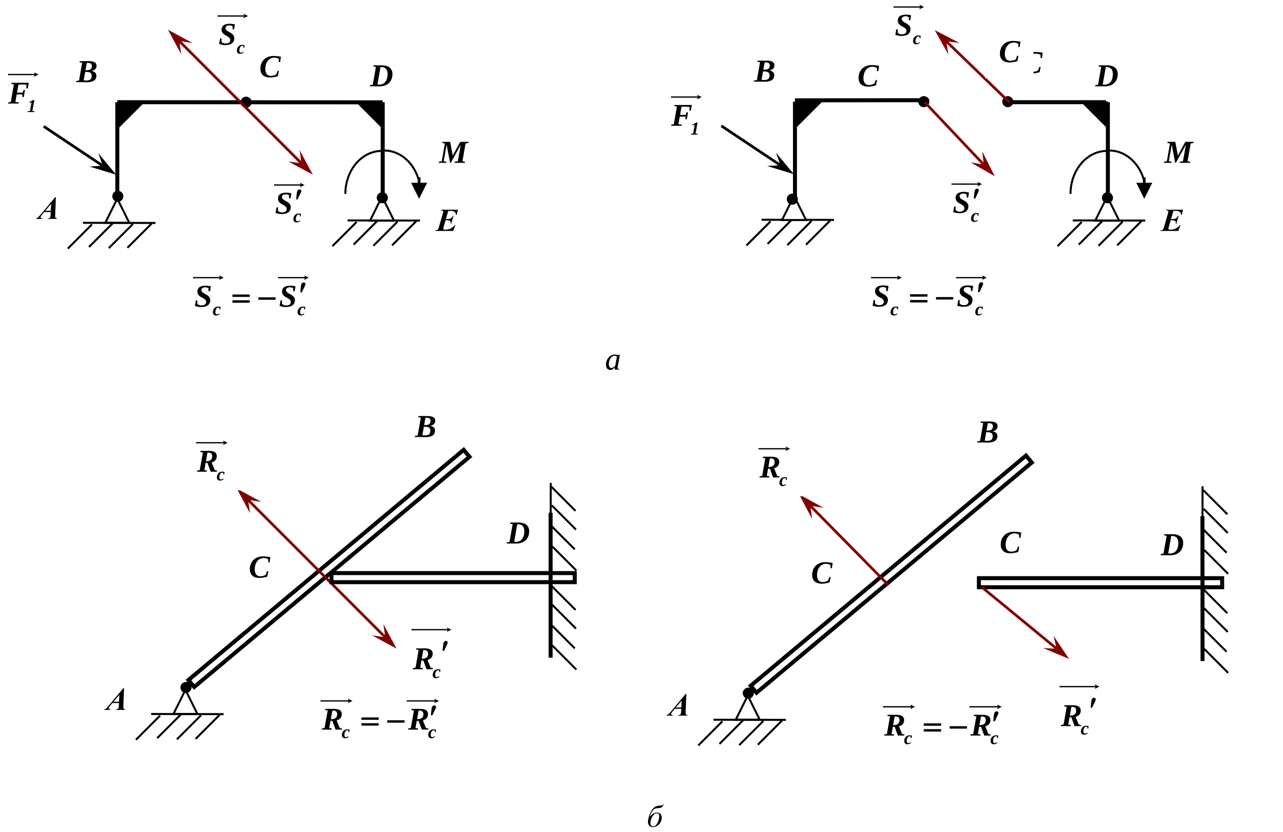


Рис. 1.10

1.6. Системи збіжних сил і умови їх рівноваги

1.6.1. Зведення до рівнодіючої і геометричні умови рівноваги збіжних сил

Операція геометричного складання векторів будь-якого класу (сил, переміщень, швидкостей і т.п.) зводиться до побудови векторного багатокутника – просторового або плоского. Замикаюча цього багатокутника, яка проведена з початку першого вектора в кінець останнього, називається *головним вектором* даної системи векторів. Отже, і кожна довільна система сил має головний вектор.

Розглянемо просторову систему збіжних сил $\left\{\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, ..., \overrightarrow{F_n}\right\}$, що діють на тверде тіло. Оскільки сили, прикладені до твердого тіла, є ковзними векторами, то можна вважати, що сили даної системи прикладені в одній точці – точці сходу (рис. 1.11а). На цих силах побудуємо силовий багатокутник (рис. 1.11б), замикаюча якого буде головним вектором $\overrightarrow{R_{гол}}$ системи сил $\left\{\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, ..., \overrightarrow{F_n}\right\}$.

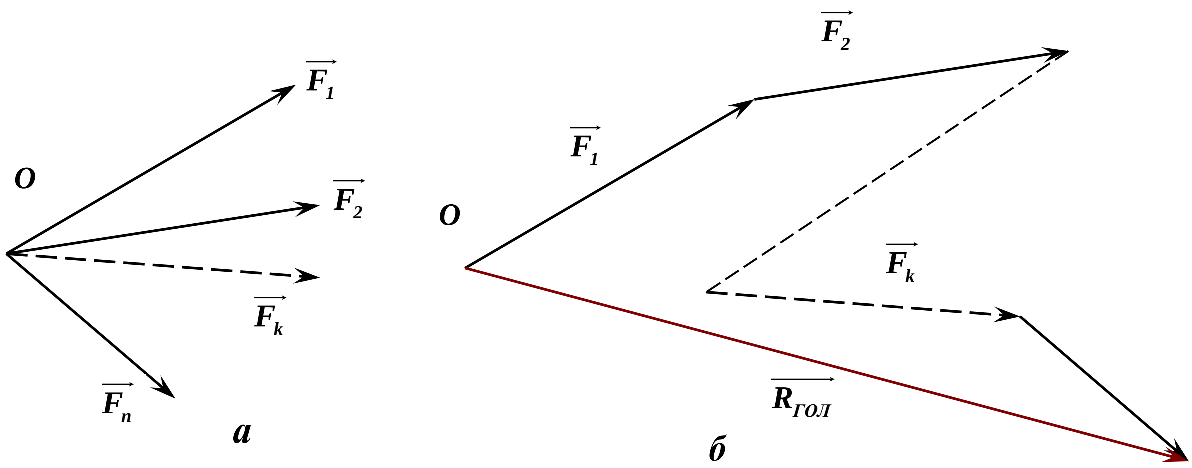


Рис. 1.11

Для системи збіжних сил на підставі аксіоми про паралелограм сил можна стверджувати, що векторна сума (головний вектор) таких сил визначає одночасно і рівнодіючу їх, тобто:

$$\overrightarrow{R_{гол}} = \overrightarrow{R^*} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + ... + \overrightarrow{F_n} = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{F_k}. \qquad (1.4)$$

Таким чином, система збіжних сил в загальному випадку приводиться до однієї сили – рівнодіючої, яка проходить через точку сходу, а графічно зображується замикаючою стороною багатокутника сил.

Для рівноваги тіла, яке знаходиться під дією певної системи сил, необхідно, щоб ця система була зрівноваженою, тобто еквівалентною нулю. Звідси виходять умови рівноваги збіжної системи сил в геометричній формі:

Для рівноваги збіжної системи сил, прикладених до твердого тіла, необхідно й достатньо, щоб рівнодіюча цієї системи дорівнювала нулю.

$$\overrightarrow{R^*} = \sum_{1}^{n} \overrightarrow{F_k} = 0 . \qquad (1.5)$$

Графічно умова рівноваги вимагає, щоб багатокутник, побудований з цих сил, був *замкненим.*

1.6.2. Аналітичні умови рівноваги систем збіжних сил

В основу аналітичних умов рівноваги систем сил покладено поняття проекції вектора на вісь.

Оберемо декартову прямокутну систему координат *Oxyz*, в якій розташована система збіжних сил $\{\overrightarrow{F_k}\}$ (рис. 1.12), і спроектуємо на осі *Ox, Oy* і *Oz* вектори, що знаходяться в правій і лівій частинах рівняння (1.4).

$$R_x^* = \sum_{1}^{n} F_{kx}\ ;\ R_y^* = \sum_{1}^{n} F_{ky}\ ,\ R_z^* = \sum_{1}^{n} F_{kz} \qquad (1.6)$$

Тут R_x^*, R_y^*, R_z^* - проекції рівнодіючої на координатні осі *x, y, z;*

F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} - проекції сили $\overrightarrow{F_k}$ на ті ж осі.

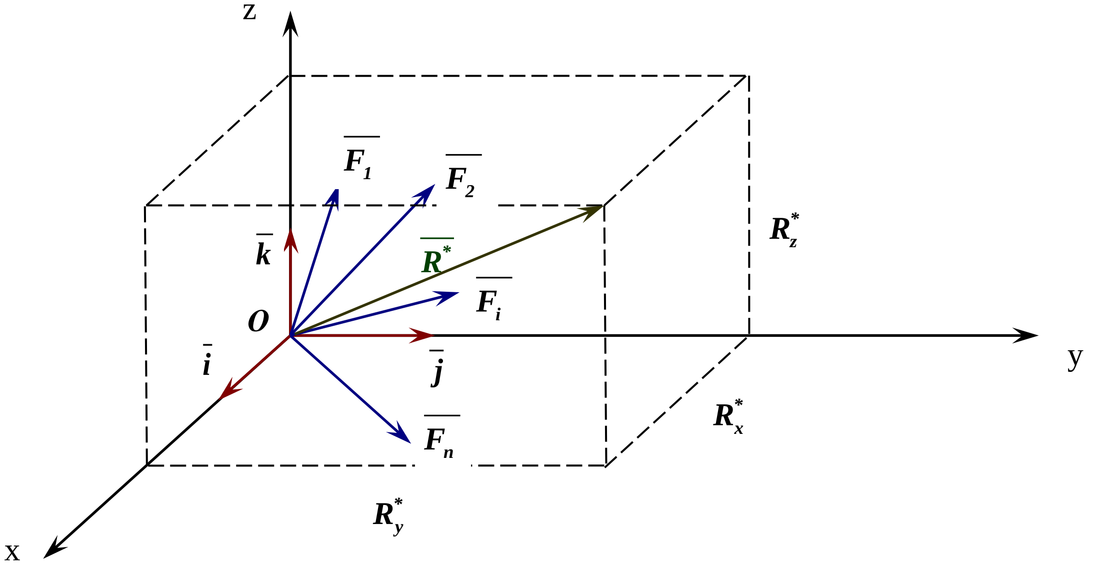


Рис. 1.12

Рівність нулю вектора рівнодіючої $\overrightarrow{R*}$ можлива тільки тоді, коли кожна з її проекцій на координатні осі буде дорівнювати нулю, тобто $R_x* = R_y^* = R_z^* = 0$. З цього виходить, що і праві частини рівнянь (1.6) повинні дорівнювати нулю:

$$\sum_1^n F_{kx} = 0;\ \sum_1^n F_{ky} = 0,\ \sum_1^n F_{kz} = 0. \qquad (1.7)$$

Отже, *для рівноваги просторової системи збіжних сил, прикладених до матеріальної точки або твердого тіла, необхідно і досить, щоб алгебраїчні суми проекцій всіх сил цієї системи на три взаємно перпендикулярні осі були рівними нулю.*

Очевидно, що для рівноваги плоскої системи збіжних сил, розташованих, наприклад, в площині *xOy,* будемо мати тільки два рівняння*:*

$$\sum_1^n F_{kx} = 0;\ \sum_1^n F_{ky} = 0. \qquad (1.8)$$

Умови рівноваги (1.7) і (1.8) називають також *рівняннями рівноваги*, так як вони дозволяють знаходити і невідомі сили, що зрівноважують задані. Потрібно мати на увазі, що кількість невідомих сил не повинна перевищувати кількість рівнянь рівноваги. У противному випадку задача стає статично невизначеною, і розв'язати її методами статики абсолютно твердого тіла неможливо.

1.7. Теорема Варіньона
(терема про момент рівнодіючої збіжної системи сил)

Момент рівнодіючої системи збіжних сил відносно довільного просторового центра дорівнює векторній сумі моментів сил складових відносно того ж центра.

Розглянемо просторову систему збіжних сил $\left\{\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, ..., \overrightarrow{F_n}\right\}$, лінії дії яких перетинаються в точці С (рис.1.13)

З довільно обраного моментного центра А проведемо до точки сходу С радіус-вектор $\vec{r}$ і підсумуємо моменти кожної сили відносно центра А:

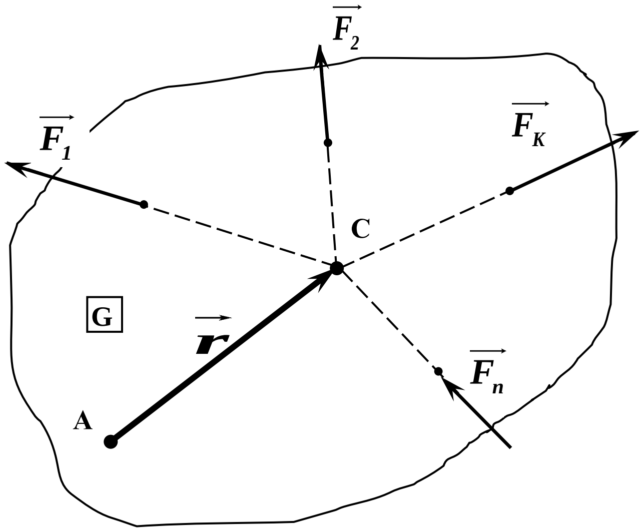


Рис.1.13

$$\sum_1^n \overrightarrow{M_A(F_k)} = \vec{r}\times\overrightarrow{F_1} + \vec{r}\times\overrightarrow{F_2} + \ldots + \vec{r}\times\overrightarrow{F_n} = \vec{r}\times(\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \ldots + \overrightarrow{F_n}).$$

Але $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \ldots + \overrightarrow{F_n} = \overrightarrow{R^*}$ і тому $\sum_1^n \overrightarrow{M_A(F_k)} = \vec{r}\times\overrightarrow{R^*}$, або $\overrightarrow{M_A(R^*)} = \sum_1^n \overrightarrow{M_A(F_k)}$, що і потрібно було довести.

Теорема Варіньона справедлива не тільки для систем збіжних сил, вона узагальнюється і на будь-яку систему сил, що зводиться до рівнодіючої.

Для плоскої системи збіжних сил теорема формулюється так: *момент рівнодіючої відносно точки площини, де розташована система сил, дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових відносно тієї ж точки. Тобто:*

$$M_A(\overrightarrow{R^*}) = \sum_1^n M_A(\overrightarrow{F_k}). \tag{1.9}$$

Приклад практичного використання теореми Варіньона

Визначити моменти сил $\vec{F}$ і $\vec{P}$, які розташовані в площині *xAy*, відносно точок A, B, D плоскої рамної конструкції ABCD, якщо відомі кути α, β і розміри a,b,c елементів рами.

Розв'язок.

Розкладемо сили $\overline{F}$ і $\overline{P}$ на складові, напрямлені вздовж координатних осей x і y. Модулі проекцій сил будуть:

$$F_x = F\cdot\cos\alpha,$$

$$F_y = F\cdot\sin\alpha,$$

$$P_x = P\cdot\sin\beta,$$

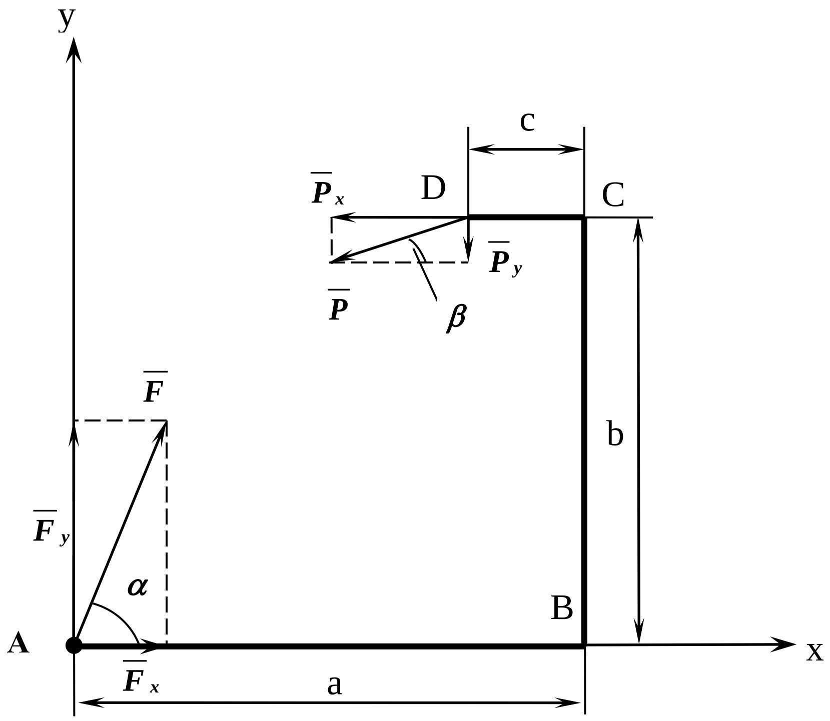
$$P_y = P \cdot \cos\beta \ .$$

Згідно з теоремою Варіньона для моментів сили $\overline{F}$ відносно точок A, B і D справедливі рівняння:

$$M_A(\vec{F}) = M_A(\vec{F_x}) + M_A(\vec{F_y}); \qquad (1)$$

$$M_B(\vec{F}) = M_B(\vec{F_x}) + M_B(\vec{F_y}); \qquad (2)$$

$$M_D(\vec{F}) = M_D(\vec{F_x}) + M_D(\vec{F_y}). \qquad (3)$$



Проаналізуємо ці рівняння. Оскільки лінії дії складових сили $\vec{F}$ перетинають моментну точку A (як і лінія дії самої сили $\vec{F}$), то $M_A(\vec{F}_x) = M_A(\vec{F_y}) = 0$ і момент сили $\vec{F}$ відносно точки A $M_A(\vec{F}) = 0$.

Якщо за моментну точку взяти точку B, - рівняння (2) -, то складова сили $\vec{F_x}$ перетинає цю точку і $M_B(\vec{F}_x) = 0,$.а $M_B(\vec{F_y}) = -F\sin\alpha \cdot a$. Таким чином $M_B(\vec{F}) = M_B(\vec{F_y}) = -F\sin\alpha \cdot a$.

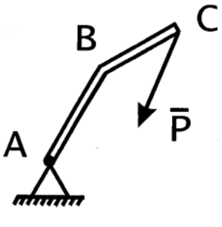
Для моментної точки D (рівняння 3) $M_D(\vec{F_x}) = F_x \cdot b = F\cos\alpha \cdot b$, $M_D(\vec{F_y}) = -F_y \cdot (a-c) = -F\sin\alpha \cdot (a-c)$, тому $M_D(\vec{F}) = F \cdot \cos\alpha \cdot b - F\sin\alpha \cdot (a-c)$.

Пропонується моменти сили $\vec{P}$ відносно точок A, B, D визначити самостійно.

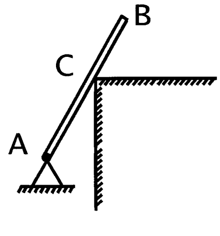
Питання для самоконтролю

1. Що установлює аксіома паралелограма сил?
2. Чи можливо силу в 1Н розкласти на дві складові по 10^6 Н кожна? Обґрунтуйте відповідь.
3. За якою формулою визначається модуль рівнодіючої двох збіжних сил $\vec{F_1}$ і $\vec{F_2}$?
4. На певну точку А твердого тіла діють дві рівні за модулем сили. При якому значенні кута φ між ними: а) рівнодіюча менше кожної із складових; б) рівнодіюча більше кожної із складових; в) рівнодіюча дорівнює складовим.
5. При яких значеннях кута між напрямами двох збіжних сил рівнодіюча їх буде за модулем:
   -найбільшою;
   -найменшою.
6. Чи може вільне тверде тіло знаходитись у рівновазі під дією однієї сили, двох сил, трьох сил?
7. Чи можливо, не порушуючи стану вільного твердого тіла, переносити силу вздовж лінії її дії?
8. При яких умовах тверде тіло буде знаходитись у стані рівноваги, якщо до нього прикладені три сили?
9. Чи можлива рівновага трьох збіжних сил, що не лежать в одній площині?
10. Що таке в'язь? У чому полягає суть принципу звільнення від в'язей?
11. Назвіть типи в'язей, для яких лінії дії реакцій відомі.
12. Як напрямлена реакція опорного шарніра, якщо тверде тіло з'єднане з опорою за допомогою невагомого стержня, що має на своїх кінцях шарніри?

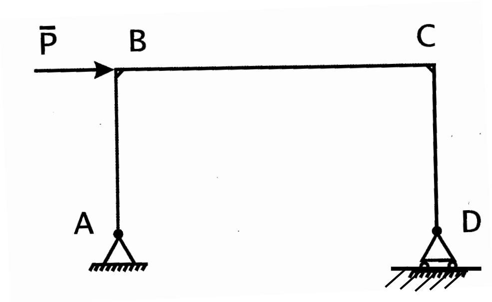
13. Назвіть особливості реакцій нерухомого циліндричного шарніра і жорсткої заробки.
14. Як визначається напрям рівнодіючої системи збіжних сил при побудові силового багатокутника?
15. За якими формулами визначають модуль і напрям рівнодіючої системи збіжних сил?
16. Відомо, що сума проекцій просторової системи збіжних сил на осі *Ox* і *Oy* прямокутної координатної системи *Oxyz* дорівнює нулю. Що можна сказати про рівнодіючу цієї системи сил?
17. Відомо, що сума проекцій плоскої системи збіжних сил на горизонтальну вісь *Ox* дорівнює нулю. Що можна сказати про рівнодіючу цієї системи сил?
18. У певній точці тіла прикладені три, рівні за модулем, сили, які розташовані в одній площині під кутом 120° одна до одної. Чому дорівнює рівнодіюча цих сил? Розв'язати питання геометрично і аналітично.
19. Сформулюйте умови рівноваги плоскої системи збіжних сил в геометричній та аналітичній формах.
20. Сформулюйте умови рівноваги просторової системи збіжних сил в геометричній і аналітичній формах.
21. При якому напрямі сили $\overline{P}$ ламаний важіль *ABC,* шарнірно закріплений в точці *A,* буде знаходитись у рівновазі? Вагою важеля нехтувати.



22. Визначити лінію дії і напрям реакції шарніра *A,* якщо важка однорідна балка *AB* в точці *C* вільно спирається на гладкий виступ стіни: а) $AC=CB$; б) $AC>CB$; в) $AC<CB$.

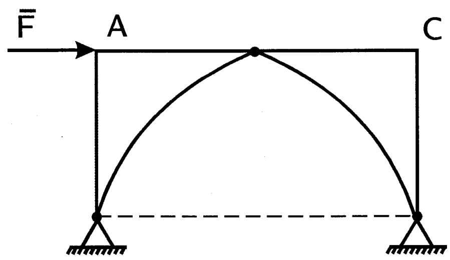


23. На раму *ABCD* діє сила $\overline{P}$. Нехтуючи вагою рами, визначити лінію дії і напрям реакції шарніра *A*.



24. Мотузка прикріплена одним кінцем до стіни, а за другий кінець її тягнуть два чоловіки силою *P* кожний. Потім мотузку відв'язують і за кінці тягнуть в протилежні сторони також з силами *P*. Визначити натяг мотузки в обох випадках.

25. На ліву частину трьохшарнірної арки діє сила $\overline{F}$. Чи можливо цю силу, не змінюючи її дії на арку, перенести по лінії дії в точку С, яка знаходиться на правій частині арки?



26. Сформулюйте теорему Варіньона для плоскої системи збіжних сил і наведіть приклади її практичного використання при розв'язанні задач.

1.8. Довільна просторова система сил і умови її рівноваги

1.8.1. Теорема про паралельний перенос сили

Як вже було доведено раніше, сила, що діє на абсолютно тверде тіло, є ковзним вектором. Виявляється, що можливо знайти таке перетворення, яке дозволяє переносити лінію дії паралельно самій собі. Має місце наступне твердження:

дія сили на тверде тіло не змінюється, якщо цю силу перенести паралельно самій собі в будь-яку точку тіла, приклавши додатково пару *сил з моментом, який дорівнює вектор-моменту даної сили відносно обраної точки переносу.*

Припустимо, що силу $\vec{F}$, яка прикладена до точки А твердого тіла, потрібно перенести до точки *O* цього тіла (рис. 1.14). В точці *O* прикладемо систему двох взаємо зрівноважених сил $\vec{F'}$ і $\vec{F''}$, лінії дії яких паралельні лінії дії заданої сили $\vec{F}$. Причому $F' = F'' = F$. Тоді $\left\{\vec{F}\right\} \square \left\{\vec{F},\vec{F'},\vec{F''}\right\} \square \left\{\vec{F'},(\vec{F},\vec{F''})\right\}$.

Система двох рівних за модулем і протилежно напрямлених сил $\left(\vec{F},\vec{F''}\right)$ складає пару сил, яку називають *приєднаною парою сил.*

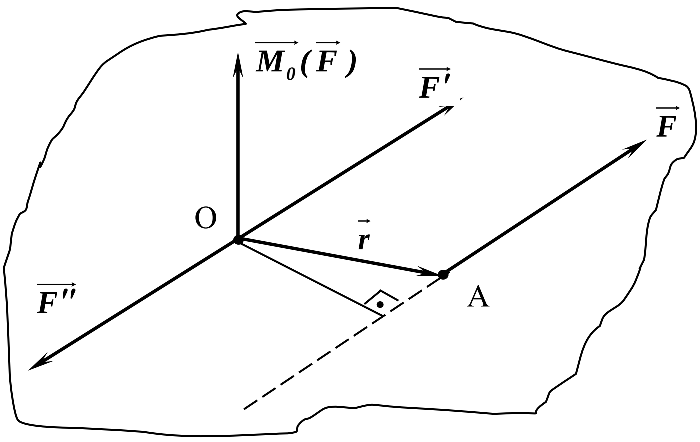


Рис. 1.14

Таким чином, замість сили $\vec{F}$, прикладеної в точці А, отримано силу $\vec{F'}$, рівну їй за модулем і напрямом, але прикладену в точці *O*, і приєднану пару сил ($\vec{F}$, $\vec{F''}$), векторний момент якої:

$$\vec{M}(\vec{F},\vec{F''}) = \vec{M_0}(\vec{F}). \qquad (1.10)$$

Процес заміни заданої сили $\vec{F}$ силою $\vec{F'}$ і парою сил ($\vec{F}$, $\vec{F''}$) називають *зведенням* сили $\vec{F}$ *до обраного центра O*.

1.8.2. Основна теорема статики (теорема Пуансо)

Будь-яку довільну систему сил, що діють на абсолютно тверде тіло, в загальному випадку можна звести до однієї сили і пари сил.

Нехай задана довільна система сил $\left\{\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, ..., \overrightarrow{F_n}\right\}$, прикладених до твердого тіла. Оберемо певну точку *O* тіла за центр зведення і кожну силу заданої системи сил зведемо до цього центра (рис.1.15). На підставі теореми про паралельний перенос сили отримаємо:

$$\left(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, ..., \overrightarrow{F_n}\right) \square \left\{\overrightarrow{F_1'}, \overrightarrow{F_2'}, ..., \overrightarrow{F_n'}; \left(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_1''}\right), \left(\overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_2''}\right), ..., \left(\overrightarrow{F_n}, \overrightarrow{F_n''}\right)\right\}.$$

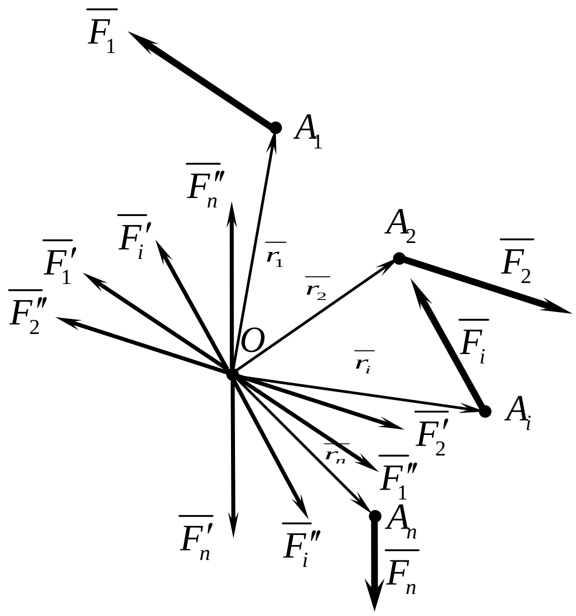


Рис. 1.15

Таким чином, система з *n* сил замінена системою з *3n* сил, до складу якої входить система збіжних сил $\left\{\overrightarrow{F_1'}, \overrightarrow{F_2'}, ..., \overrightarrow{F_n'}\right\}$, прикладених в центрі зведення *O* і система *n* приєднаних пар сил:

$$\left\{\left(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_1''}\right), \left(\overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_2''}\right), ..., \left(\overrightarrow{F_n}, \overrightarrow{F_n''}\right)\right\}.$$

Векторні моменти приєднаних пар сил, згідно з формулою (1.10), можна виразити через вектор-моменти заданих сил:

$$\overrightarrow{M}(\overrightarrow{F_K}, \overrightarrow{F_K''}) = \overrightarrow{M_0}(\overrightarrow{F_K}), \quad k = \overline{1,n}.$$

Система збіжних сил $\left\{\overrightarrow{F_1'}, \overrightarrow{F_2'}, ..., \overrightarrow{F_n'}\right\}$ геометрично дорівнює системі заданих сил, тобто:

$$\overrightarrow{F_1'} + \overrightarrow{F_2'} + ... + \overrightarrow{F_n'} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + ... + \overrightarrow{F_n}.$$

Але якщо для збіжної системи сил їх геометрична сума є рівнодіючою силою, то для заданої довільної системи сил геометрична сума складових її буде лише головним вектором.

У подальшому головний вектор будь-якої системи сил позначатимемо через $\overrightarrow{R_Г}$. Тоді:

$$\overrightarrow{R_Г} = \sum_1^n \overrightarrow{F_K}, \quad k = \overline{1,n}. \tag{1.11}$$

Систему приєднаних пар сил також можна замінити результуючою парою, яку називають головним моментом:

$$\overrightarrow{M}_{ГО} = \overrightarrow{M_0}(\overrightarrow{F_1}) + \overrightarrow{M_0}(\overrightarrow{F_2}) + ... + \overrightarrow{M_0}(\overrightarrow{F_n}) = \sum_1^n \overrightarrow{M_0}(\overrightarrow{F_K}) \tag{1.12}$$

Тобто, *головним моментом* довільної системи сил відносно обраного центра зведення називають суму векторних моментів усіх сил системи відносно цього центра.

З урахуванням введених понять основну теорему статики можна сформулювати так: *будь-яку систему сил, що діють на тверде тіло, можна звести до сили, яка дорівнює головному вектору цієї системи сил, і пари сил з моментом, рівним головному моменту системи сил відносно точки, обраної за центр зведення.*

1.8.3. Залежність головного вектора і головного моменту від вибору центра зведення

Припустимо, що задану довільну систему сил $\{\overrightarrow{F_K}\}$, $k = \overline{1,n}$, яка була зведена до центра O і мала головний вектор $\overrightarrow{R_{Г0}}$ і головний момент $\overrightarrow{M_{Г0}}$, потрібно звести до іншого центра, наприклад, O_1 (рис.1.16).

Згідно з теоремою про паралельний перенос сили головний вектор заданої системи сил залишиться незмінним, тобто $\overrightarrow{R'_{ГО_1}} = \overrightarrow{R_{ГО}} = \overrightarrow{R_Г}$. Але при цьому з'явиться приєднана пара $(\overrightarrow{R_{ГО}}, \overrightarrow{R''_{ГО}})$ з моментом, рівним моменту головного вектора $\overrightarrow{R_Г}$ відносно нового центра зведення:

$$\overrightarrow{M_{ГО_1}}(\overrightarrow{R_{ГО}}) = \vec{\rho} \times \overrightarrow{R_Г} \qquad (1.13)$$

Тоді головний момент заданої системи сил відносно нового центра буде таким:

$$\overrightarrow{M_{ГО_1}} = \overrightarrow{M_{ГО}} + \vec{\rho} \times \overrightarrow{R_Г} \qquad (1.14)$$

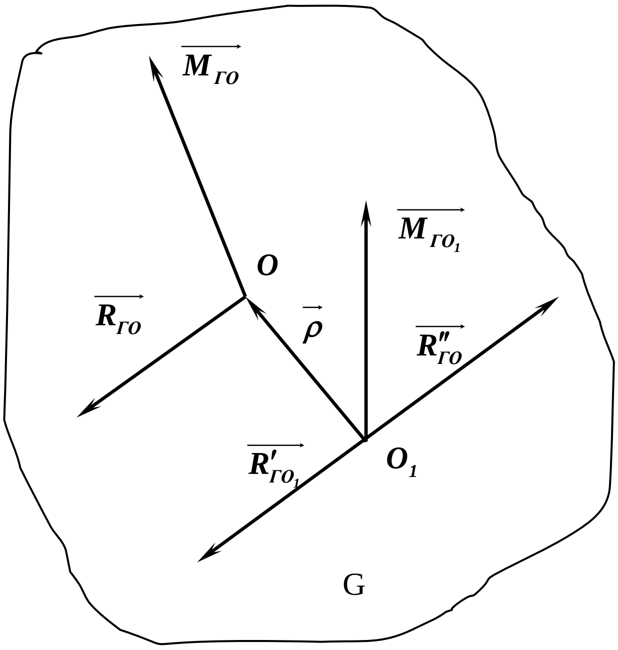


Рис.1.16

Висновок: *при зміні центра зведення головний вектор системи сил не змінюється, а головний момент цієї системи змінюється на величину, що дорівнює моменту головного вектора, прикладеного в старому центрі, відносно нового центра зведення.*

1.8.4. Умови рівноваги довільної просторової системи сил

З теореми про зведення довільної системи сил до сили і пари сил можна отримати умови рівноваги просторової системи сил, які діють на тверде тіло. Очевидно, що у випадку, коли система сил знаходиться в рівновазі, то в рівновазі знаходиться і еквівалентна їй система, яка складається з сили і пари сил. Тому *для рівноваги довільної системи сил, прикладених до твердого тіла, необхідно й досить, щоб головний вектор і головний момент цієї системи відносно будь-якого центра зведення були рівними нулю. Тобто:*

$$\overrightarrow{R_Г} = \sum_1^n \overrightarrow{F_k} = 0\,,\ \overrightarrow{M_{ГO}} = \sum_1^n \overrightarrow{M_0}(\overrightarrow{F_k}) = 0 \qquad (1.15)$$

З векторних умов рівноваги просторової системи сил виходять алгебраїчні умови рівноваги такої системи сил:

$$\left.\begin{array}{ll} 1.\ R_{Гx} = \sum_1^n F_{kx} = 0\,, & 4.\ M_{Гx} = \sum_1^n M_x(\overrightarrow{F_k}) = 0, \\ 2.\ R_{Гy} = \sum_1^n F_{ky} = 0 & 5.\ M_{Гy} = \sum_1^n M_y(\overrightarrow{F_k}) = 0, \\ 3.\ R_{Гz} = \sum_1^n F_{kz} = 0 & 6.\ M_{Гz} = \sum_1^n M_z(\overrightarrow{F_k}) = 0. \end{array}\right\} \qquad (1.16)$$

Таким чином, *для рівноваги довільної просторової системи сил необхідно і досить, щоб алгебраїчні суми проекцій всіх сил на координатні осі, а також алгебраїчні суми моментів цих сил відносно координатних осей були рівними нулю.*

1.9. Окремі випадки рівноваги систем сил

1.9.1. Умови рівноваги просторової системи паралельних сил

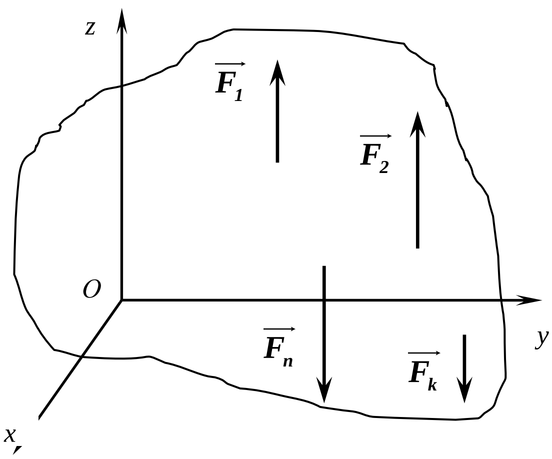


Рис. 1.17

Розглянемо систему сил $\{\overrightarrow{F_k}\}$, паралельних осі *Oz* (рис.1.17). Очевидно, що в такому випадку перше і друге рівняння загальних умов рівноваги довільної просторової системи сил (рівняння 1.16) перетворюється на тотожності:

$$\sum_1^n F_{kx} \equiv 0\,,\ \sum_1^n F_{ky} \equiv 0\,.$$

Крім того, тотожно буде дорівнювати нулю і останнє (шосте) рівняння умов рівноваги: $\sum_1^n M_z(\overrightarrow{F_k}) \equiv 0$. Таким чином, умови рівноваги просторової системи паралельних сил відповідають рівнянням:

$$\sum_{1}^{n} F_{kz} = 0; \ \sum_{1}^{n} M_x(\overrightarrow{F_k}) = 0; \ \sum_{1}^{n} M_y(\overrightarrow{F_k}) = 0 \qquad (1.17)$$

Тобто, *для рівноваги просторової системи паралельних сил, прикладених до твердого тіла, необхідно й досить, щоб алгебраїчна сума проекцій всіх сил на вісь, паралельну лініям дії даних сил, дорівнювала нулю і алгебраїчні моменти цих сил відносно двох інших координатних осей також були рівними нулю.*

1.9.2. Умови рівноваги плоскої системи сил

Припустимо, що система сил $\{\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, ..., \overrightarrow{F_n}\}$ розташована в площині *Oxy* (рис.1.18). Для такої системи сил умови рівноваги можна виразити в трьох рівнозначних формах:

а) $\sum_{1}^{n} F_{kx} = 0; \ \sum_{1}^{n} F_{ky} = 0, \ \sum_{1}^{n} M_z(\overrightarrow{F_k}) = 0$ або $\sum_{1}^{n} M_0(\overrightarrow{F_k}) = 0;$ (1.18)

б) $\sum_{1}^{n} M_A(\overrightarrow{F_k}) = 0; \ \sum_{1}^{n} M_B(\overrightarrow{F_k}) = 0; \ \sum_{1}^{n} F_{xk} = 0$ або $\sum_{1}^{n} F_{ky} = 0;$ (1.19)

в) $\sum_{1}^{n} M_A(\overrightarrow{F_k}) = 0; \ \sum_{1}^{n} M_B(\overrightarrow{F_k}) = 0; \ \sum_{1}^{n} M_0(\overrightarrow{F_k}) = 0.$ (1.20)

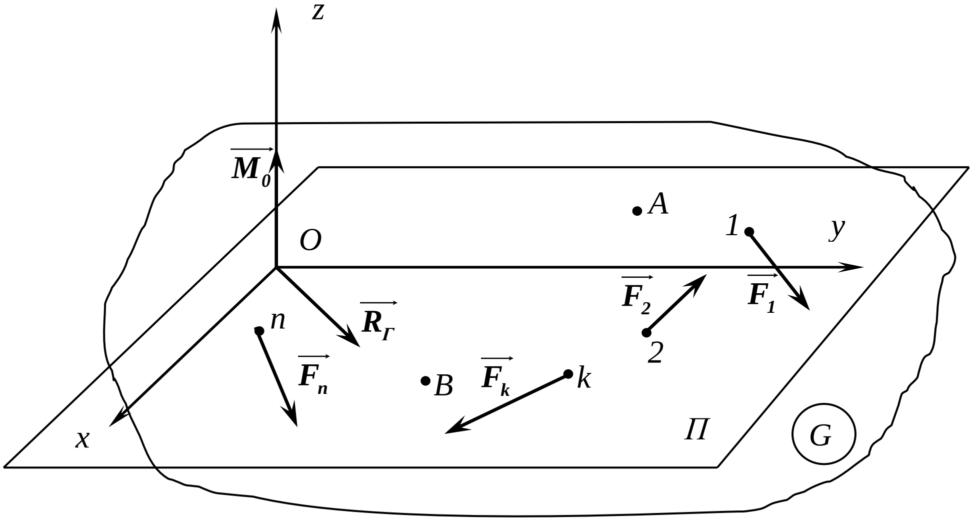


Рис.1.18

Тобто, для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно і досить, щоб алгебраїчні суми:

а) проекцій всіх сил на координатні осі, які лежать в площині дії цих сил, дорівнювали нулю і алгебраїчна сума моментів цих же сил відносно довільної точки даної площини була рівною нулю;

б) моментів усіх сил відносно будь-яких двох точок даної площини дорівнювали нулю і була рівною нулю алгебраїчна сума проекцій цих сил на вісь, не перпендикулярну до прямої, що проходить через дві обрані точки;

в) моментів усіх сил відносно трьох довільних точок площини, які не належать одній прямій, дорівнювала нулю.

1.9.3. Умови рівноваги плоскої системи паралельних сил

Розглянемо в площині *Oxy* систему сил $\left\{\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},...,\overrightarrow{F_n}\right\}$, які паралельні осі *Oy* (рис.1.19). Тоді умова $\sum_{1}^{n} F_{kx} = 0$ перетворюється в тотожність і перша форма умов рівноваги плоскої системи сил (1.18) для даного випадку набуває вигляду:

$$\sum_{1}^{n} F_{ky} = 0\,,\ \sum_{1}^{n} M_A(\overrightarrow{F_k}) = 0\,. \qquad (1.21)$$

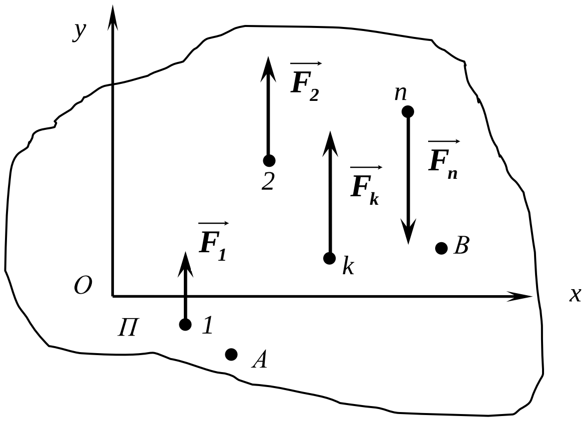


Рис.1.19

У відповідності з (1.19) рівняння рівноваги паралельної системи сил можна записати також у вигляді:

$$\sum_{1}^{n} M_A(\overrightarrow{F_k}) = 0\,,\ \sum_{1}^{n} M_B(\overrightarrow{F_k}) = 0\,. \qquad (1.22)$$

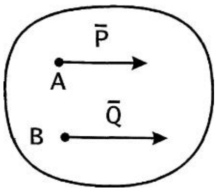
Таким чином, для рівноваги плоскої системи паралельних сил необхідно й досить, щоб:

а)алгебраїчна сума проекцій сил на координатну вісь, паралельну цим силам, і алгебраїчна сума моментів сил відносно довільної точки площини дорівнювали нулю;

б) алгебраїчні суми моментів сил відносно двох певних точок площини, які не лежать на прямій, паралельній лініям дії сил, були рівними нулю.

Питання для самоконтролю

1. Чи будуть сили $\overline{\boldsymbol{P}}$ і $\overline{\boldsymbol{Q}}$ рівні за модулем і однаково напрямлені, які прикладені до твердого тіла, еквівалентними?



2. Дайте визначення головного вектора і головного момента довільної системи тіл і наведіть їх математичні вирази.
3. Як залежать головний вектор і головний момент довільної системи сил від вибору центра зведення?
4. Запишіть аналітичні співвідношення для визначення модулів головного вектора і головного момента довільної просторової системи сил.
5. Сформулюйте основну теорему статики і запишіть її математичний вираз.
6. Запишіть умови рівноваги довільної просторової системи сил в аналітичній формі.
7. Сформулюйте умови рівноваги просторової системи паралельних сил.
8. Сформулюйте і запишіть у векторній формі умови рівноваги плоскої довільної системи сил, які лежать у координатній площині xOy.
9. Запишіть аналітичні умови рівноваги плоскої довільної системи сил, які лежать у координатній площині xOy, у трьох формах.
10. В якому випадку головний вектор плоскої системи сил зводиться до

рівнодіючої?

11. Чому дорівнює головний момент системи сил, що лежать в одній площині, відносно будь-якої точки площини?
12. В якому випадку головний момент плоскої системи сил відносно всіх точок площини буде одним і тим же?
13. До чого зводиться плоска система сил, якщо силовий багатокутник, побудований на цих силах, буде:

    а) замкненим; б) не замкненим?
14. До якого найпростішого виду можна привести плоску систему сил, коли відомо, що головний момент даних сил відносно довільних точок площини

    а) має різні числові значення,

    б) має стале значення не рівне нулю,

    в) дорівнює нулю.
15. Де розташовані точки, відносно яких сума алгебраїчних моментів плоскої системи збіжних сил дорівнює нулю?
16. Як напрямлені реакції опор балки, що навантажена парою сил і лежить на двох опорах, з яких одна шарнірно-нерухома, а друга - шарнірно-рухома?
17. Сформулюйте умови рівноваги плоскої системи паралельних сил.
18. Скільки форм умов рівноваги плоскої системи паралельних сил існує? Запишіть їх.
19. В якому випадку модуль рівнодіючої двох паралельних сил буде дорівнювати модулю однієї із складових сил?
20. Які задачі статики називають статично визначеними і які - статично невизначеними?
21. У чому полягає метод розчленування при розгляданні рівноваги складених конструкцій?
22. Скільки рівнянь рівноваги можна записати для механічної системи, яка знаходиться під дією плоскої системи сил, і складається із:

    а) двох твердих тіл, б) трьох твердих тіл?
23. Як можна визначити внутрішні сили, що діють між окремими тілами

механічної системи?

1.10. Тертя

З виявленням сил тертя людина стикається кожного разу, коли намагається здійснити переміщення одних матеріальних тіл по поверхням інших.

При прагненні зсунути одне тіло по поверхні іншого в площині їх стикання виникає *сила зчеплення*, яка гальмує початок руху тіл відносно одне одного. При ковзанні тіла по поверхні іншого також діє сила опору, яка заважає цьому рухові – сила тертя ковзання.

Якщо ж тіло котити (або намагатися котити) по поверхні другого, то через деформації поверхонь тіл виникає пара сил, що перешкоджає коченню.

1.10.1. Зчеплення і тертя ковзання

Перші дослідження явища тертя сягають до робіт Леонардо да Вінчі. Детальні дослідження законів тертя почав французький механік Г.Амонтон (1663…1705). У 1781 р. Ш.Кулон (1736-1806), французький фізик і механік, опублікував «Теорію простих машин з точки зору їх частин», в якій виклав теорію тертя і сформулював закони тертя.

Розглянемо тверде тіло, що знаходиться у стані спокою на горизонтальній площині (рис.1.20). У випадку, коли тіло і площина є абсолютно гладкими, то реакція в'язі (площини) напрямлена по нормалі до спільної дотичної, тобто перпендикулярно до площини (рис.1.20а), а спроба прикласти до тіла будь-яку, навіть нескінченно малу силу, не перпендикулярну до площини, порушить стан рівноваги – тіло почне рухатись (ковзати) по площині. Зовсім інша картина спостерігається при розгляданні стану рівноваги реальних тіл, поверхні яких є більш чи менш шорсткими. Прикладемо до тіла горизонтальну силу $\vec{S}$, величину якої будемо поступово збільшувати від нульового значення. На певному інтервалі збільшення сили тіло буде залишатися у стані спокою, що можливо лише при появі протидіючої сили, такої, що зрівноважує силу $\vec{S}$.

Силу, яка виникає в площині стикання тіл, називають *силою зчеплення* або силою тертя ковзання при стані спокою - $\overrightarrow{F_{тр}}$ (рис.1.20б).

Поява сили зчеплення спричиняє відхилення від нормалі повної реакції площини, і її розглядають як геометричну суму нормальної і тангенціальної складових, причому остання і є силою зчеплення: $\vec{R} = \vec{N} + \overrightarrow{F_{тр}}$. Тіло залишається у стані спокою при зміні модуля сили $\vec{S}$ від нуля до певного значення її $\vec{S}_{гр}$, при якому починається ковзання. Відповідно і сила зчеплення (сила тертя спокою) зростає від нуля до деякого максимального значення $\overrightarrow{F_{max}}$, більше якого вона бути не може (рис.1.20.в).

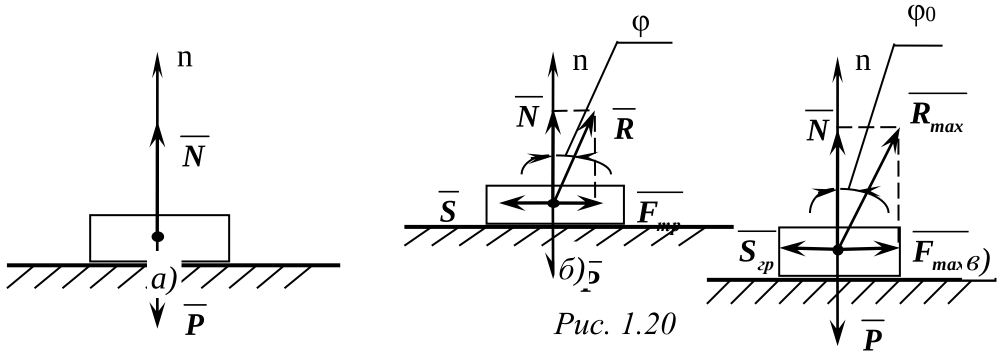


Рис. 1.20

Тобто:

$$0 \le F_{тр} \le F_{max}. \tag{1.23}$$

Досвід показує, що *максимальне значення сили тертя спокою пропорційне силі нормального тиску тіла на поверхню або за модулем нормальній реакції:*

$$F_{max} = f_0 N. \tag{1.24}$$

Коефіцієнт пропорційності f_0 називають *статичним коефіцієнтом тертя.* Він є безрозмірною величиною, яка залежить від матеріалу стичних поверхонь, чистоти їх обробки, температури, тощо. В той же час його можна вважати незалежним від площі контакту тіл.

Умова $F_{тр} = F_{max}$ є умовою граничної рівноваги тіла в стані спокою. При найменшому перевищенні сили $\vec{S}$ своєї граничної величини $\left(\vec{S} \geq \overrightarrow{S_{гр}}\right)$ тіло починає ковзати.

При ковзанні тіла по шорсткій поверхні до нього прикладена сила *тертя ковзання*. Напрям цієї сили протилежний напряму руху тіла, а модуль сили тертя ковзання визначають за формулою:

$$F_{тр} = f \cdot N, \tag{1.25}$$

де f - коефіцієнт тертя ковзання (динамічний коефіцієнт тертя), величина також безрозмірна і, в певній мірі, залежна від швидкості відносного руху стичних тіл.

В більшості випадків при зростанні відносної швидкості взаємодіючих сил коефіцієнт тертя ковзання f спочатку незначно спадає від значення f_0, а потім зберігає майже стале значення.

В наближених технічних розрахунках нехтують деякою різницею коефіцієнтів тертя і приймають $f \approx f_0$.

Якщо під дією прикладених сил тіло знаходиться в рівновазі, то згідно з нерівністю (1.23) в межах зони рівноваги сила тертя може приймати значення від нуля до F_{max}. Тому при фіксованій величині нормальної реакції $\vec{N}$ повна реакція поверхні також може змінюватися від $\vec{N}$ до свого максимального значення $\overrightarrow{R_{max}}$, а кут відхилення φ реакції від нормалі буде зростати від нуля до певного граничного значення φ_0 (рис.1.20в).

Кут φ_0, який утворює $\overrightarrow{R_{max}}$ з нормаллю $\vec{n}$ називають *кутом зчеплення*, або *кутом тертя.* З рис.1.20в видно, що $tg\varphi_0 = F_{max} / N$, а оскільки $F_{max} = f_0 N$, то:

$$tg\varphi_0 = f_0. \tag{1.26}$$

Має місце така особливість області конуса тертя - конуса, описаного лінією дії максимальної повної реакції навколо напряму нормалі до площини стикання тіл – *будь-яка за величиною сила* $\vec{T}$*, що утворює з нормаллю кут* $\alpha < \varphi_0$ (тобто розташована всередині цієї області) не може надати руху тілу, яке знаходиться в стані рівноваги на шорсткій поверхні (рис.1.21). Саме цим пояснюються відомі в техніці явища заклинювання і самогальмування тіл.

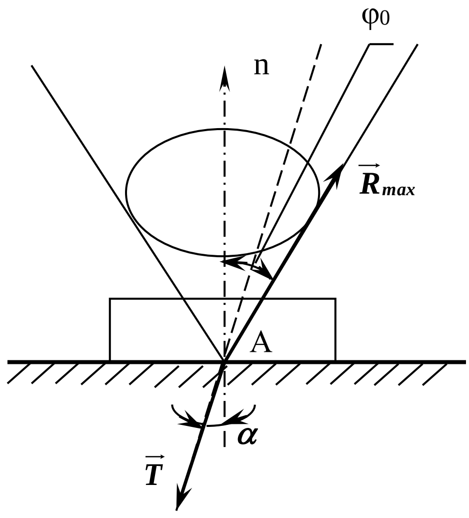


Рис.1.21

1.10.2. Рівновага гнучкої нитки на негладкій циліндричній поверхні

До кінця А нитки, яка перекинута через нерухомий круглий циліндр, прикладена сила $\vec{P}$. Під дією сили нитка намагається ковзати по поверхні циліндра. Визначимо, яку мінімальну силу $\vec{Q}$ потрібно прикласти до другого кінця нитки, щоб утримати її в рівновазі при куті охоплення α і коефіцієнті тертя нитки об поверхню циліндра f_0. Розглянемо рівновагу елемента DE нитки (рис.1.22), центральний кут якого DOE дорівнює $d\theta$. Різниця натягів елемента нитки в перерізах D і E $d\vec{T}$ зрівноважується силою тертя, максимальне значення якої $dF = f_0 dN$, де dN - нормальна реакція елемента DE циліндра. Тобто маємо, що:

$$dT = f_0 dN . \qquad \text{(a)}$$

Складемо рівняння рівноваги сил, прикладених до елемента нитки, в проекції на вісь y :

$$dN - (T + dT) \cdot \sin\frac{d\theta}{2} - T \cdot \sin\frac{d\theta}{2} = 0 .$$

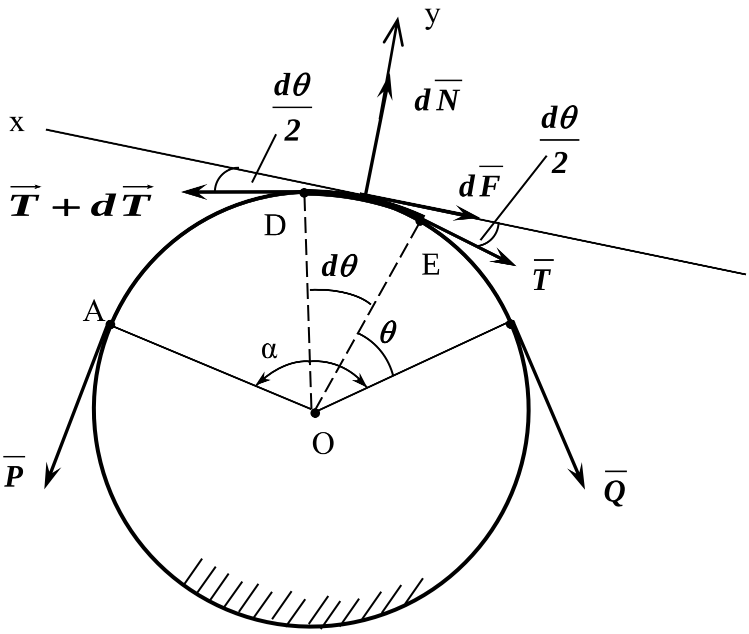


Рис.1.22

З огляду на мализну кута $d\theta$, можна прийняти, що $sin\frac{d\theta}{2} \approx \frac{d\theta}{2}$. Тоді, при нехтуванні малими вищого порядку, отримаємо:

$$dN = T \cdot d\theta .$$

З урахуванням цього співвідношення рівняння (а) набуває вигляду:

$$dT = f_0 T d\theta \text{, або } \frac{dT}{T} = f_0 d\theta .$$

Інтегруємо диференціальне рівняння по всій дузі охоплення: від точки В, де $\theta = 0$ і $T = Q$, до точки А, де $\theta = \alpha$ і $T = P$:

$$\int_Q^P \frac{dT}{T} = f_0 \int_0^\alpha d\theta .$$

Звідки:

$$ln\frac{P}{Q} = f_0 \cdot \alpha \text{ і } \frac{P}{Q} = e^{f_0 \alpha} .$$

Потрібна утримуюча сила Q визначається рівнянням, яке називають формулою Ейлера:

$$Q = P \cdot e^{-f_0 \alpha} . \qquad (1.27)$$

З цієї формули виходить, що утримуюча сила не залежить від діаметра циліндра. Практично важливим є та обставина, що за рахунок збільшення кута охоплення можна значно зменшити утримуючу силу. Наприклад, натяг в 1 кН можна урівноважити силою 2Н, якщо двічі ($\alpha = 4\pi$) обернути конопляний канат навколо дерев'яного стовпа.

За формулою Ейлера визначають натяги ведучої ($\vec{P}$) і веденої ($\vec{Q}$) частин пасової передачі, яка часто використовується в сільгоспмашинах.

1.10.3. Тертя кочення

Тертям кочення називають опір, який виникає при коченні одного тіла по поверхні другого.

Нехай круглий циліндричний коток радіусом r і вагою $\vec{G}$ знаходиться на горизонтальній шорсткій площині. Прикладемо до осі котка певну силу $\vec{T} < \vec{F}_{max}$. Тоді в точці стикання А котка з площиною, крім нормальної реакції $\vec{N}$ повинна виникнути і сила тертя ковзання $\vec{F}_{тр}$ ($F_{тр} = T$), яка буде перешкоджати ковзанню котка по площині (рис.1.23).

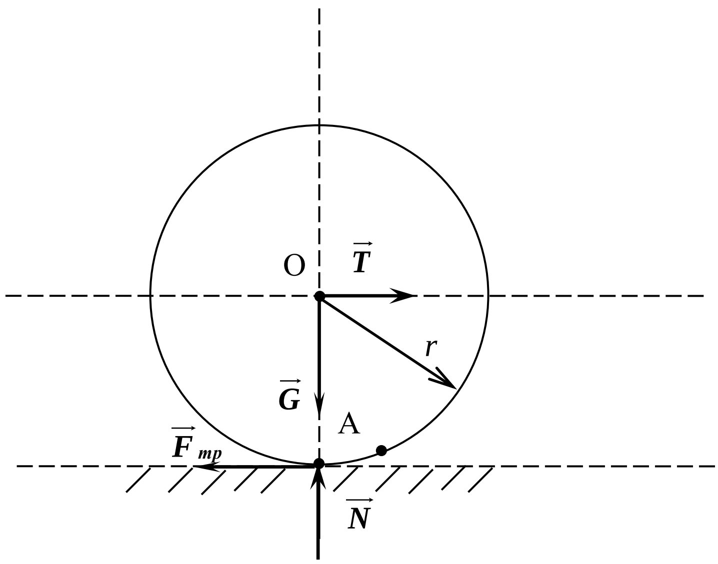


Рис.1.23

Але при такій схемі розташування сил утворюється нічим не зрівноважена пара сил ($\vec{T}, \overrightarrow{F_{тр}}$), яка повинна була б викликати кочення при будь-якій малій силі $\vec{T}$, чого реально не спостерігається.

Справа у тому, що через деформації поверхонь реальних стичних тіл їх торкання відбувається по певній площадці BAD, причому інтенсивність тиску вздовж якої збільшується від краю B до краю D. В результаті реакція $\vec{N}$ площини, що є рівнодіючою цих тисків, виявляється зміщеною у бік дії сили $\vec{T}$ (рис. 1.24). Таким чином, до котка в стані рівноваги прикладені дві взаємно зрівноважені пари сил ($\vec{T}, \overrightarrow{F_{тр}}$) і ($\vec{N}, \vec{G}$). Перша з них прагне зрушити коток, друга – протидіє руху.

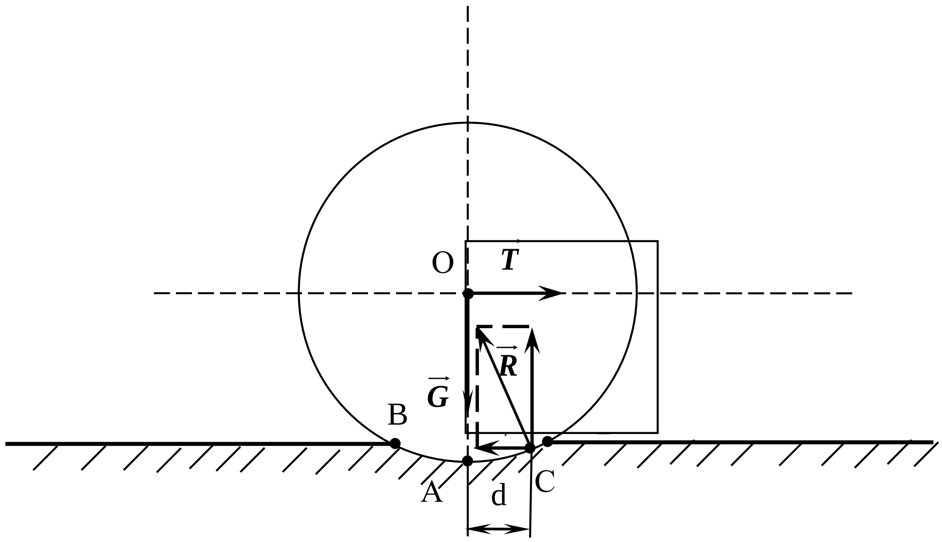


Рис.1.24

Доки коток знаходиться у рівновазі збільшення сили $\vec{T}$, а, відповідно, і пари ($\vec{T}, \overrightarrow{F_{тр}}$), викликає зростання протидіючої пари, момент якої називають *моментом опору коченню*, або *моментом тертя кочення*. Очевидно, що зростання момента опору коченню можливе тільки за рахунок збільшення відстані d.

В стані граничної рівноваги $d_{max} = \delta$ і максимальний момент опору коченню:

$$m_{max} = \delta \cdot N \,, \qquad (1.28)$$

де N - нормальна складова повної реакції площини.

Коефіцієнт пропорційності δ, котрий має лінійну розмірність, називають коефіцієнтом *тертя кочення.* Його величина залежить від матеріалу тіл, фізичного стану їх поверхонь і визначається експериментально.

Якщо активні сили, що діють на коток, звести до точки контакту А з площиною (деформаціями котка і поверхні нехтуємо), то в загальному випадку дістанемо головний вектор сил $\overline{R_Г} = \sum_1^n \overline{F_K}$ і головний момент $\overline{M_{ГА}} = \sum_1^n M_A(\overline{F_K})$. Головний вектор прагне змусити коток ковзати, а головний момент – котитися (рис.1.25).

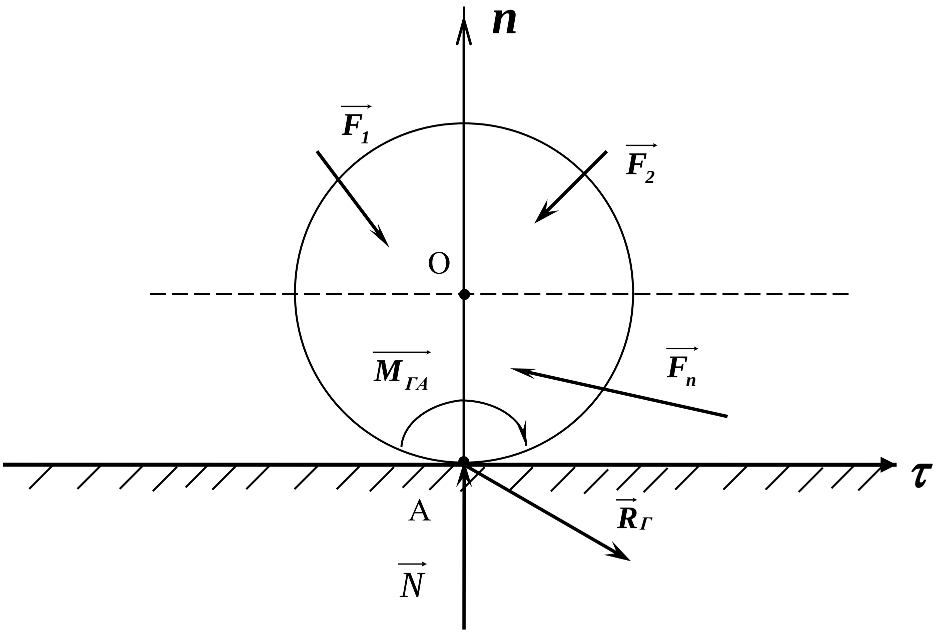


Рис. 1.25

Для того, щоб коток не котився, необхідно виконання умови:

$$\left|\sum_1^n M_A(\overline{F_K})\right| \le m_{max} = \delta \cdot N = \delta \cdot \left|\sum_1^n F_{Kn}\right|. \qquad (1.29)$$

Для того, щоб коток не ковзав, необхідно, щоб:

$$F_{mp\ max} = f_0 \cdot N \ge \left|\sum_1^n F_{K\tau}\right|$$

або:

$$f_0 \left| \sum_1^n F_{Kn} \right| \geq \left| \sum_1^n F_{K\tau} \right|. \qquad (1.30)$$

Таким чином, відсутність ковзання і кочення буде зберігатися при одночасному виконанні умов (1.29) і (1.30).

Кочення без ковзання відповідає такому співвідношенню:

$$\frac{\left| \sum_1^n F_{K\tau} \right|}{f_0} < \left| \sum_1^n F_{Kn} \right| < \frac{\left| \sum_1^n M_A(\overrightarrow{F_K}) \right|}{\delta}. \qquad (1.31)$$

Активні сили, які прикладені до котків у вигляді коліс (рис.1.26), крім сили ваги $\vec{G}$ звичайно складаються із сили $\vec{T}$, прикладеної до центра колеса, паралельно спільній дотичній в точці А, і пари сил з моментом L, що прагне котити колесо.

Колеса, для яких $T \neq 0$ і $L \neq 0$, називають *ведено-ведучими*; якщо $L = 0, T \neq 0$, то колесо називають *веденим;* при $L \neq 0$ і $T = 0$ колесо є *ведучим.*

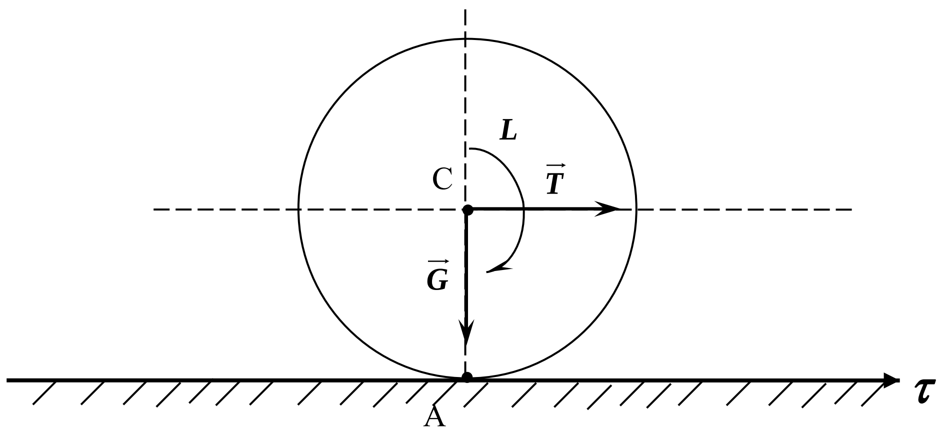


Рис.1.26

Питання для самоконтролю

1. Якими причинами можна пояснити виникнення тертя ковзання?
2. Від чого залежить величина сили тертя ковзання при спокою і в яких межах вона змінюється?
3. Що являє собою конус тертя і яку знаменну властивість має область у середині його?
4. Поясніть причини виникнення тертя кочення.

5. Від яких факторів залежить величина опору коченню і в яких межах змінюється момент сил опору коченню?
6. У чому полягає фізична різниця між коефіцієнтами тертя ковзання і кочення?
7. За якими формулами визначаються максимальна сила тертя ковзання спокою і максимальний момент сил опору коченню?
8. При яких умовах кочення відбувається без ковзання?
9. При яких умовах кочення буде відбуватися із ковзанням?
10. Коток радіуса R котиться без ковзання по площині, що розташована під кутом α до горизонту. Визначити коефіцієнт тертя кочення.
11. При відомих коефіцієнтах тертя ковзання f і кочення δ котка радіуса R визначити умови початку: а) чистого кочення і б) чистого ковзання котка на площині, що нахилена під кутом α до горизонту.
12. Наведіть математичний вираз умови рівноваги гнучкого тіла на негладкій циліндричній поверхні (формула Ейлера).

1.11. Центр паралельних сил. Центр ваги тіла

1.11.1. Рівнодіюча систем двох паралельних сил, які не утворюють пару

Розглянемо систему двох паралельних сил $\vec{F_1}$ і $\vec{F_2}$ $\left|\vec{F_1} \neq \vec{F_2}\right|$, напрямлених в одну (рис.1.27а) чи в протилежні (рис.1.27б) сторони.

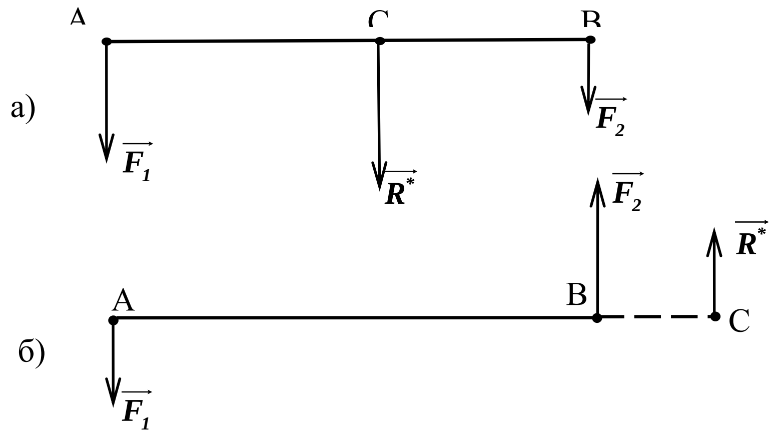


Рис.1.27

Доведемо, що така система сил зводиться до рівнодіючої, яка прикладена в певній точці С. Положення цієї точки для кожного із зазначених випадків знайдемо, обчисливши відносно неї момент рівнодіючої: $\overrightarrow{R^*} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$. Згідно з теоремою Варіньона отримаємо:

$$M_C(\overrightarrow{R^*}) = F_1 AC - F_2 BC = 0,$$

звідки:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{BC}{AC} \text{ або } \frac{F_1}{BC} = \frac{F_2}{AC}. \qquad (1.32)$$

Точка С, через яку проходить лінія дії рівнодіючої, називається *центром паралельних сил*.

Зі співвідношення (1.32) і рис.1.27 виходить, що лінія дії рівнодіючої двох паралельних, нерівних між собою сил поділяє відстань між точками прикладання цих сил на частини, обернено пропорційні модулям сил – внутрішньо – для сил одного напряму і зовнішньо – для сил з протилежними напрямами.

1.11.2. Центр паралельних сил

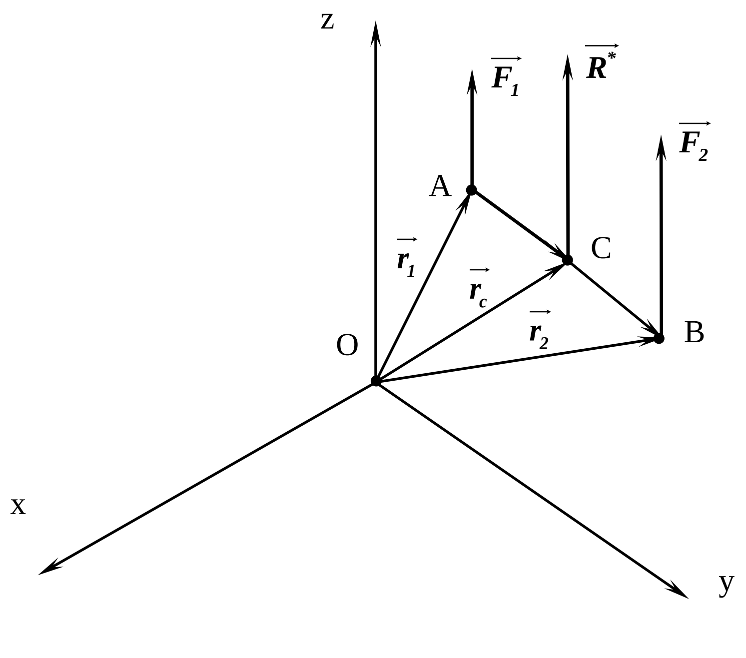


Рис.1.28

Розглянемо паралельні нерівні між собою сили $\vec{F_1}$ і $\vec{F_2}$ в системі координат *Oxyz*, де точки прикладання цих сил А і В визначаються радіусами-векторами $\vec{r_1}$ і $\vec{r_2}$ відповідно. Радіус-вектор $\vec{r_c}$ визначає точку С прикладання рівнодіючої даних сил (рис.1.28). Тоді на підставі рівняння (1.32) можна записати, що $\dfrac{\overline{AC}}{F_2} = \dfrac{\overline{CB}}{F_1}$. Але $\overline{AC} = \vec{r_c} - \vec{r_1}$ і $\overline{CB} = \vec{r_2} - \vec{r_c}$.

Отже:

$\dfrac{\vec{r_c} - \vec{r_1}}{F_2} = \dfrac{\vec{r_2} - \vec{r_c}}{F_1}$, звідки: $\vec{r_c} = \dfrac{F_1\vec{r_1} + F_2\vec{r_2}}{F_1 + F_2}$.

Якщо узагальнити отриманий результат на систему n паралельних сил $\left\{\overline{F_K}\right\}$, то отримаємо, що:

$$\vec{r_c} = \frac{\sum_1^n F_K \cdot \overline{r_K}}{\sum_1^n F_K}. \tag{1.33}$$

Рівняння (1.33) визначає положення центра паралельних сил у векторній формі.

Координати центра паралельних сил обчислюють через проекції радіуса-вектора $\vec{r_c}$ на осі координат:

$$x_c = \frac{\sum_1^n F_K \cdot x_K}{\sum_1^n F_K};\; y_c = \frac{\sum_1^n F_K \cdot y_K}{\sum_1^n F_K};\; z_c = \frac{\sum_1^n F_K \cdot z_K}{\sum_1^n F_K}. \tag{1.34}$$

1.11.3 Центр ваги твердого тіла

Центром ваги тіла називають центр системи паралельних сил, яку наближено утворюють сили ваги його елементарних частинок.

Радіус-вектор центра ваги $\vec{r_c}$ підраховують як радіус-вектор центра паралельних сил (рис.1.29) за формулою:

$$\vec{r_c} = \frac{\sum_1^n \vec{r_K} \cdot \Delta G_K}{\sum_1^n \Delta G_K} = \frac{\sum_1^n \vec{r_K} \cdot \Delta G_K}{G}, \qquad (1.35)$$

де: $\vec{r_K}$ - радіус-вектор точки прикладання сили ваги елементарної частинки A_K;

ΔG_K - вага елементарної частинки;

G - вага всього тіла.

В граничному випадку, коли число елементарних частинок n прямує до нескінченості, формула (1.35) набуває вигляду:

$$\vec{r_c} = \frac{\int \vec{r} dG}{G}. \qquad (1.36)$$

У свою чергу $dG = \rho g d\upsilon$ і тому:

$$\vec{r_c} = \frac{\int_\upsilon \vec{r} \cdot \rho g d\upsilon}{G}, \qquad (1.36')$$

де: ρ - густина речовини тіла; $d\upsilon$ - елементарний об'єм частинки тіла; $\vec{r}$ - радіус-векор елементарної частинки.

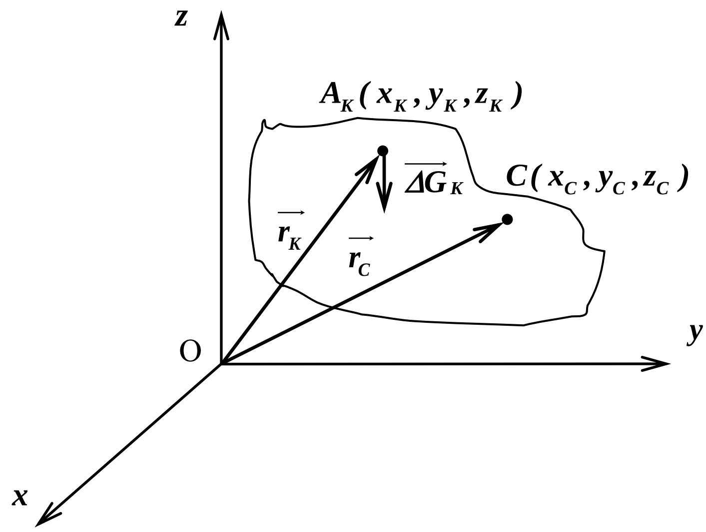


Рис.1.29

Координати центра ваги тіла визначаються рівняннями:

$$x_C = \frac{\int_\upsilon \rho g x d\upsilon}{G}, \; y_C = \frac{\int_\upsilon \rho g y d\upsilon}{G}, \; z_C = \frac{\int_\upsilon \rho g z d\upsilon}{G}. \qquad (1.37)$$

Якщо тіло є однорідним, то $\rho = const$ і $G = \rho g V$. В такому випадку

$$x_C = \frac{\int\limits_{\upsilon} x d\upsilon}{V}, \; y_C = \frac{\int\limits_{\upsilon} y d\upsilon}{V}, \; z_C = \frac{\int\limits_{\upsilon} z d\upsilon}{V}, \qquad (1.38)$$

тут V - об’єм тіла.

Аналогічні міркування можна провести для тіла, що являє собою однорідну тонку поверхню, і отримати формулу для визначення положення її центра мас:

$$\vec{r_C} = \frac{\int\limits_{S} \vec{r} dS}{S} \qquad (1.39)$$

в якій S - площа всієї поверхні.

Для однорідної тонкої пластини, яка розташована, наприклад, в координатній площині Oxy, координати центра мас дорівнюють:

$$x_C = \frac{\int\limits_{S} x dS}{S}, \; y_C = \frac{\int\limits_{S} y dS}{S}. \qquad (1.40)$$

Інтеграли, що стоять в чисельниках формул (1.40) називають *статичними моментами площі* пластини (або статичними моментами площі поперечного перерізу тіла) відносно координатних осей Ox і Oy (рис.1.30).

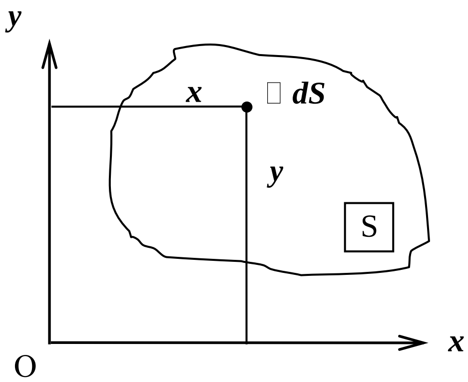


Рис.1.30

Статичний момент площі відносно осі Ox:

$$M_X = \int\limits_{S} y dS, \qquad (1.41)$$

відносно осі Oy:

$$M_y = \int\limits_{S} x dS. \qquad (1.42)$$

Узагальнення результатів визначення центрів ваги однорідних тіл приводить до висновку: *якщо однорідне тіло має площину, вісь або центр симетрії, то центр його ваги розташований відповідно або в площині симетрії, або на осі симетрії, або в центрі симетрії.*

Методика визначення центра ваги тіл полягає в наступному. Тіло розбивають на скінчену кількість таких частин, для кожної з котрих положення центра ваги відоме, або може бути попередньо визначено. Далі центр ваги підраховують за загальними формулами. Так, наприклад, координати центра ваги плоскої однорідної фігури визначаються з рівнянь:

$$x_C = \frac{1}{S}\sum_{1}^{n} x_K \cdot S_K \, ; \; y_C = \frac{1}{S}\sum_{1}^{n} y_K \cdot S_K \, , \qquad (1.43)$$

у котрих n - кількість простих фігур (коло, прямокутник, трикутник), на які розбита задана фігура;

$S = \sum_{1}^{n} S_K$ - площа всієї фігури;

x_K, y_K - координати центра ваги k-ї простої фігури площею S_K.

Коли плоска фігура, центр ваги якої потрібно визначити, має вирізи, то площі таких вирізаних фігур підставляють до формул (1.43) з від’ємним знаком.

Приклад.

Визначити координати центра мас прямокутної пластини площиною S, в якій зроблено два вирізи у формі прямокутника площиною S_2 і у формі трикутника площиною S_3.

Розв’язання

Позначимо центри ваги прямокутної пластини без вирізів через C_1, вирізаних фігур – через C_2 і C_3. Тоді:

$$\sum_{1}^{n=3} S_K = S = S_1 - S_2 - S_3 \, ;$$

$$x_C = \frac{x_{c_1} \cdot S_1 - x_{c_2} \cdot S_2 - x_{c_3} \cdot S_3}{S_1 - S_2 - S_3} \quad \text{і}$$

$$y_C = \frac{y_{c_1} \cdot S_1 - y_{c_2} \cdot S_2 - y_{c_3} \cdot S_3}{S_1 - S_2 - S_3}.$$

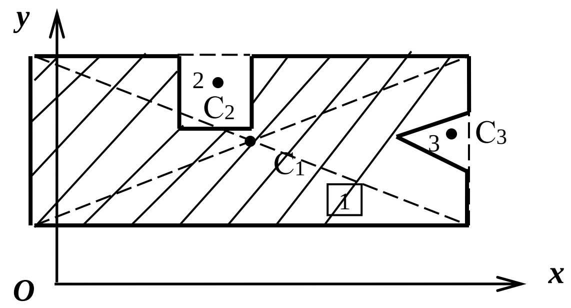


Рис.1.31

Питання для самоконтролю

1. Яку точку називають центром паралельних сил? За якою формулою вона визначається?
2. За якими формулами визначають центр мас твердого тіла?
3. Що називають статичним моментом площі плоскої фігури відносно осі, як він обчислюється і яку розмірність має?
4. Статичний момент плоскої фігури відносно осі *Ox* дорівнює нулю. Що можна сказати про центр ваги цієї фігури?
5. Як визначити положення центра ваги площі, якщо відоме положення центрів ваги окремих її частин?
6. Центри мас трьох однорідних дисків з однаковими масами розташовані у вершинах трикутника. Вкажіть положення центра мас системи.
7. Центри мас чотирьох однорідних однакових за масою куль лежать у вершинах трикутної піраміди. Укажіть положення центра мас системи.

2. КІНЕМАТИКА ТОЧКИ І ТВЕРДОГО ТІЛА

Кінематикою називають розділ теоретичної механіки, в якому вивчаються загальні властивості і якості різних механічних рухів з геометричної точки зору без урахування причин, що викликають і змінюють ці рухи.

Кінематику можна розглядати як перехідну ступінь від геометрії до механіки – вона є геометрією чотирьох вимірів, бо крім трьох вимірів, прийнятих в геометрії, запроваджується четвертий – час. Кінематика для свого викладання не потребує ніяких нових аксіом, і спирається на аксіоми евклідової геометрії.

Під рухом в механіці розуміють зміну з часом положення даного об'єкта по відношенню до іншого. Характер руху суттєво залежить від вибору тіла, з яким зв'язаний спостерігач.

Реальне або умовне тверде тіло, по відношенню до якого визначають положення чи рух інших об'єктів, **називають системою відліку**. Простір в механіці розглядається як тривимірний і евклідовий. Час уважається універсальним, тобто таким, що плине абсолютно однаково в будь-якій системі відліку.

В задачах кінематики час приймається за незалежну змінну (аргумент). Відлік часу ведеться від певного початкового моменту, котрий обирають відповідно до конкретних умов задачі.

Кінематично задати рух матеріального об'єкту (тіла, точки) – означає задати положення цього об'єкту відносно обраної системи відліку в будь-який момент часу. Якщо положення об'єкта визначається певними параметрами, то необхідно задати залежність параметрів від часу. Така залежність називається **кінематичними рівняннями руху** або **законом руху**.

Основними питаннями кінематики є виявлення математичних способів задання руху і методів визначення всіх кінематичних величин, що характеризують даний рух.

2.1. Способи задання руху точки

Рух точки в просторі можна задати трьома способами: векторним, координатним і натуральним (природним).

2.1.1. Векторний спосіб

Положення довільної точки *M*, що рухається по відношенню до обраної системи відліку *Oxyz* можна визначити за допомогою її радіуса-вектора $\vec{r}$, проведеного з початку координат *O* в дану точку (рис.2.1).

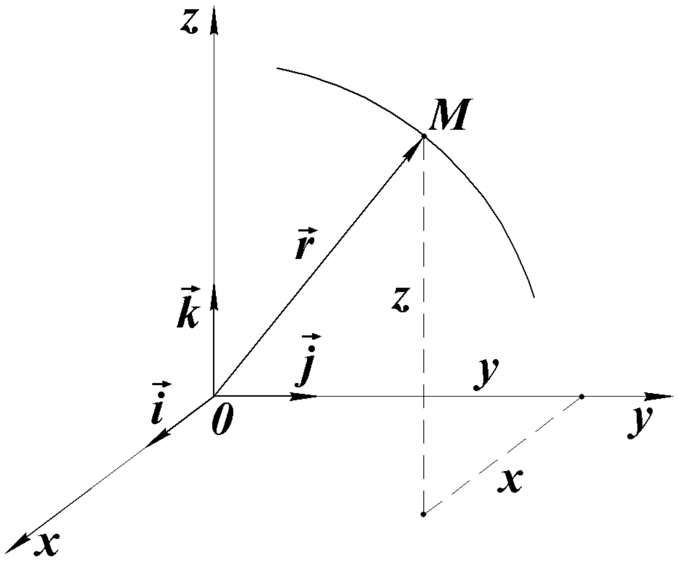


Рис. 2.1

При русі точки М вектор $\vec{r}$ з плином часу t буде змінюватися як за модулем, так і по напряму, тобто він буде вектором-функцією, що залежить від скалярного аргумента t:

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \qquad (2.1)$$

Рівняння (2.1) і визначає закон руху точки у векторній формі. Неперервна лінія, яку описує точка при своєму русі відносно обраної системи відліку, називається *траєкторією точки*. Якщо траєкторією точки є пряма лінія, рух точки називається прямолінійним, а якщо крива – криволінійним. При векторному способі задання руху траєкторія точки зображує собою геометричне місце кінців вектора $\vec{r}$ (*годограф цього вектора*).

2.1.2. Координатний спосіб

Положення точки в просторі також можна визначити її декартовими координатами *x, y, z* залежними від часу t.

Неперервні функції:

$$x = x(t);\ y = y(t);\ z = z(t), \tag{2.2}$$

які називають кінематичними рівняннями, визначають закон руху точки в прямокутних декартових координатах.

Рівняння (2.2) одночасно є рівнянням траєкторії точки в *параметричній формі*, де роль параметра відіграє час t. Якщо виключити з них час t, то знайдемо рівняння траєкторії в звичайній формі у вигляді залежності між координатами точки.

Оскільки координати рухомої точки M (рис.2.1) відповідають координатам кінця вектора $\vec{r}$ в системі $Oxyz$, то між векторним і координатним способами задання руху існує зв'язок у формі рівняння

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}. \tag{2.3}$$

2.1.3. Природний спосіб

Природний спосіб задання руху використовують у випадках, коли траєкторія наперед відома. Тоді положення точки в просторі визначається (рис.2.2)

- просторовою кривою BC (траєкторією точки);
- криволінійною (дуговою) координатою S на траекторії;
- початком відліку дугової координати;
- напрямом додатного відліку дугової координати.

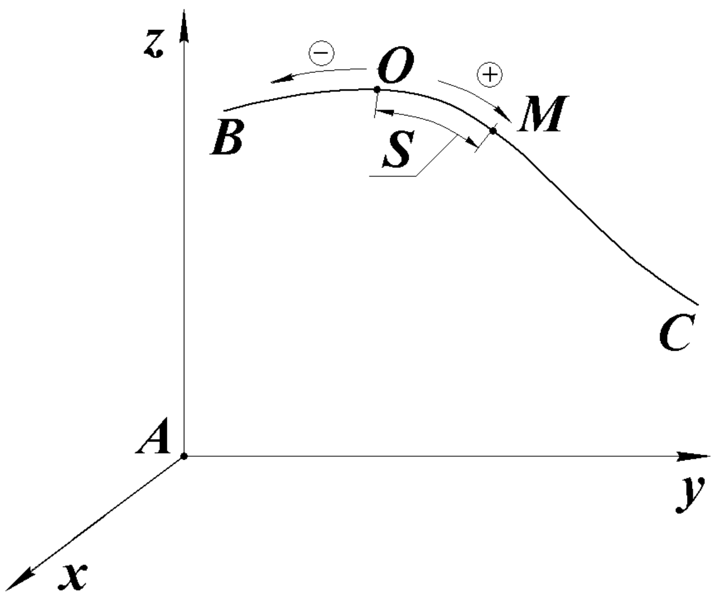


Рис. 2.2

При русі точки по траєкторії дугова координата змінюється з часом, тобто

$$S = S(t). \tag{2.4}$$

Залежність (2.4) називають законом руху точки вздовж заданої траєкторії.

Дугову координату не можна плутати з довжиною шляху, який пройшла точка.

Шлях точки – це відстань, що пройдена нею за певний проміжок часу, яка вимірюється вздовж траєкторії в напрямку руху точки.

Дугова координата – положення точки на траєкторії в даний момент часу.

2.2. Швидкість і прискорення точки

Основними кінематичними характеристиками руху точки є векторні величини – швидкість точки і її прискорення.

Поняття "швидкість" виникло ще в доісторичну епоху, коли людина засвоїла уявлення про швидкість і повільність руху. Таке буденне поняття швидкості і було спочатку сприйнято механікою. Формула $\upsilon = S/t$ не зустрічається не тільки у стародавніх вчених, але навіть і в працях таких корифеїв науки, як Галілей і Ньютон. Тільки Ейлер першим у рішучій формі подав швидкість як відношення пройденого точкою шляху до витраченого на це часу. Саме він зазначив, що швидкість є мірою руху, завдяки котрій забезпечується проходження певного шляху за певний проміжок часу.

Поняття прискорення, як характеристики руху, було запроваджено в механіку французькими вченими Понселе (1841 р.) і Розалем (1851 р.).

2.2.1. Векторний спосіб визначення швидкості і прискорення точки

При вектрному способі задання руху точки вважається відомим радіус-вектор точки як функція часу: $r = r(t)$.

Швидкістю точки називається кінематична міра руху точки, яка дорівнює похідній за часом від радіуса-вектора цієї точки в обраній системі відліку

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \tag{2.5}$$

З фізичної точки зору вектор швидкості визначає інтенсивність зміни просторового положення точки з часом. Напрямлений цей вектор по дотичній до траєкторії точки в бік її руху (рис. 2.3).

Розмірність швидкості $\dim \upsilon = L \cdot T^{-1}$ $(м/с)$ (dimension – розмір, вимір).

Прискоренням точки називається кінематична міра зміни швидкості точки, яка дорівнює похідній за часом від швидкості цієї точки в *обраній системі відліку*

$$\vec{W} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \tag{2.6}$$

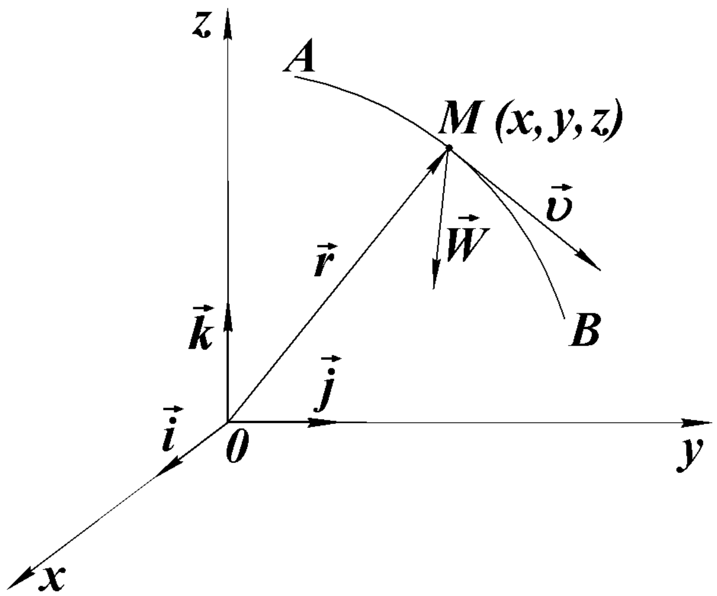


Рис. 2.3

Розмірність прискорення $\dim W = L \cdot T^{-2}\ \left(м/c^2\right)$.

З рівняння (2.6) виходить, що прискорення точки дорівнює нулю тоді, коли швидкість точки зберігає сталу величину і сталий напрям, тобто $\vec{W} = 0$ при рівномірному прямолінійному русі точки. Напрям вектора $\vec{W}$ співпадає з напрямом вектора $d\vec{\upsilon}$ – прирістом вектора швидкості за час dt.

Формули (2.5) і (2.6) зручно використовувати для теоретичного викладання кінематики точки, але для практичних обчислень їм надають більш конкретний вигляд.

2.2.2. Визначення швидкості і прискорення точки в декартовій системі координат

Загальні формули (2.5) і (2.6) визначають швидкість і прискорення точки через похідні за часом від її радіуса-вектора $\vec{r}$, який через координати x, y, z точки (рис.2.3) можна записати так:

$$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}\ .$$

Диференціюємо вираз за часом:

$$d\vec{r} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \qquad (2.7)$$

або

$$\vec{\upsilon} = \upsilon_x \cdot \vec{i} + \upsilon_y \cdot \vec{j} + \upsilon_z \cdot \vec{k}\,. \qquad (2.8)$$

Звідсіля виходить, що проекція швидкості точки на координатну вісь дорівнює першій похідній від відповідної координати точки за часом:

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x};\ \upsilon_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y};\ \upsilon_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}\,, \qquad (2.9)$$

де крапка над координатою – символ диференціювання за часом.

Модуль швидкості знаходимо за формулою

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2}\,, \qquad (2.10)$$

а її напрям визначається напрямляючими косинусами:

$$\cos\left(\vec{\upsilon}^\wedge_{,}\vec{i}\right) = \frac{\upsilon_x}{\upsilon};\ \cos\left(\vec{\upsilon}^\wedge_{,}\vec{j}\right) = \frac{\upsilon_y}{\upsilon};\ \cos\left(\vec{\upsilon}^\wedge_{,}\vec{k}\right) = \frac{\upsilon_z}{\upsilon}. \qquad (2.10')$$

Для визначення прискорення точки згідно з формулою (2.6) потрібно продиференціювати за часом співвідношення (2.7) і (2.8). Отримаємо

$$\vec{W} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

і

$$\vec{W} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d\upsilon_x}{dt}\vec{i} + \frac{d\upsilon_y}{dt}\vec{j} + \frac{d\upsilon_z}{dt}\vec{k}\,.$$

З другого боку

$$\vec{W} = W_x \cdot \vec{i} + W_y \cdot \vec{j} + W_z \cdot \vec{k}\,.$$

З наведених рівнянь виходить, що проекції прискорення точки на координатні осі дорівнюють першим похідним від проекцій швидкості або другим похідним від відповідних координат точки за часом:

$$W_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = \ddot{x};\ W_y = \frac{d\upsilon_y}{dt} = \ddot{y};\ W_z = \frac{d\upsilon_z}{dt} = \ddot{z}\,. \qquad (2.11)$$

Модуль прискорення знаходять за формулою

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2}\,, \tag{2.12}$$

а напрям визначають напрямляючі косинуси:

$$\cos\left(\vec{W}_,\hat{}\,\vec{i}\right) = \frac{W_x}{W};\ \cos\left(\vec{W}_,\hat{}\,\vec{j}\right) = \frac{W_y}{W};\ \cos\left(\vec{W}_,\hat{}\,\vec{k}\right) = \frac{W_z}{W}. \tag{2.12'}$$

З викладеного випливає, що залежності $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ по суті повністю визначають рух точки. Вони дають змогу знайти не тільки положення точки, але і проекції її швидкості і прискорення, а отже, модуль і напрям векторів $\vec{\upsilon}$ і $\vec{W}$ в будь-який момент часу. Крім того, можна розв’язати і ряд інших питань: знайти траєкторію точки, залежність швидкості від положення точки, тощо.

Розв’язання оберненої задачі – визначення швидкості і закону руху точки по заданому прискоренню – проводиться шляхом інтегрування проекцій прискорення за часом, причому задача буде мати однозначний розв’язок, якщо крім прискорення задані ще і початкові умови – проекції швидкості і координати точки в початковий момент часу.

2.2.3. Визначення швидкості і прискорення при природному способі задання руху точки

При природному способі задання руху, коли відомі траєкторія точки і закон руху її вздовж цієї траєкторії $S = S(t)$, значення векторів $\vec{\upsilon}$ і $\vec{W}$ визначають по їх проекціях не на осі будь-якої нерухомої системи відліку, а на осі рухомої прямокутної системи координат $M\tau nb$.Ця координатна система має початок в точці M і рухається разом з нею вздовж траєкторії (рис.2.4).

Осі координат системи, які називають осями природного тригранника, напрямлені так: вісь $M\tau$ (дотична) – по дотичній до траєкторії в бік додатного відліку відстані S; вісь Mn (головна нормаль) – по нормалі до траєкторії в так званій стичній площині[3] в бік угнутості траєкторії; вісь Mb (бінормаль) – перпендикулярно двом першим осям так, щоб вона утворювала з ними праву систему осей.

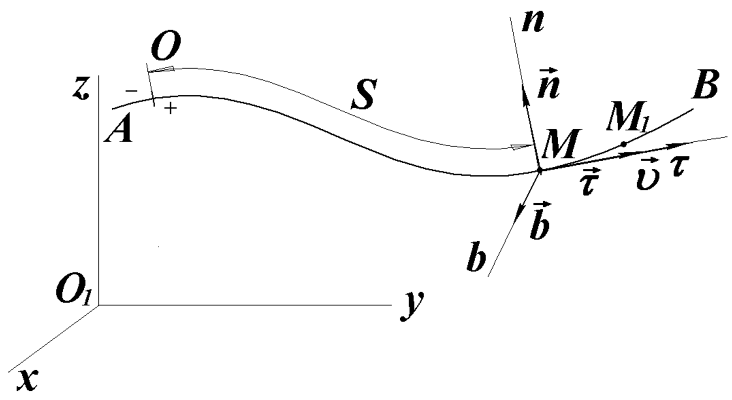


Рис.2.4

Уведемо одиничні орти $\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b}$, які визначають додатні напрями осей τ, n, b натурального триганника. Тоді вектор швидкості $\vec{\upsilon}$ точки M, що напрямлений по дотичній до траєкторії, можна подати у вигляді

$$\vec{\upsilon} = \upsilon_\tau \cdot \vec{\tau}\ , \tag{2.13}$$

де $\upsilon_\tau = ds/dt$ – проекція вектора $\vec{\upsilon}$ на дотичну $M\tau$ – величина алгебраїчна.

Очевидно, що $|\upsilon_\tau| = |\vec{\upsilon}| = \upsilon$, тому надалі в більшості випадків будемо опускати індекс "τ" при визначенні числового значення швидкості точки.

Продиференціюємо (2.13) за часом

$$\vec{W} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d\upsilon_\tau}{dt} \cdot \vec{\tau} + \upsilon_\tau \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dt}. \tag{2.14}$$

Далі перетворимо останній член цього виразу

$$\upsilon_\tau \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \upsilon_\tau \frac{d\vec{\tau}}{dS} \cdot \frac{dS}{dt} = \upsilon_\tau^2 \frac{d\tau}{dS}. \tag{2.15}$$

Визначимо приріст вектора $\vec{\tau}$ на ділянці dS переміщення точки по траекторії з положення 1 в положення 2 (рис.2.5).

---

[3] Стичною площиною в точці M траєкторії називають граничне положення площини, проведеної через дотичну до траєкторії в точці M паралельно суміжній дотичній в точці M_1, коли остання прагне збігтися з точкою M (рис.2.4)

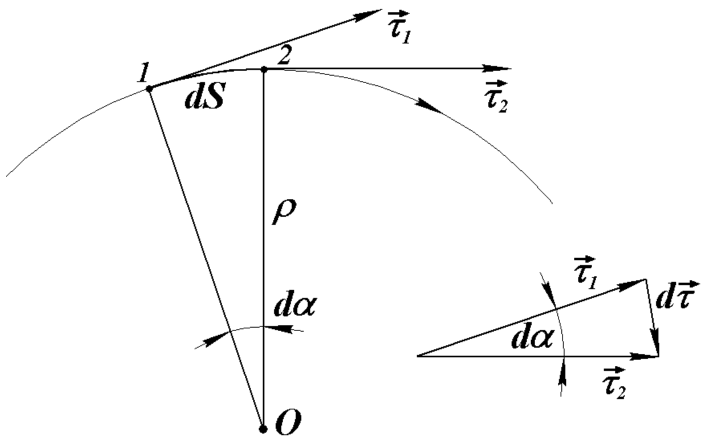


Рис. 2.5

При прагненні точки 2 до точки 1 відрізок траєкторії dS наближається до дуги кола з центром в певній точці *O*. Цю точку називають *центром кривизни траєкторії* в даній точці *1*, а радіус ρ відповідного кола – *радіусом кривизни траєкторії* в тій же точці.

Як видно з рис 2.5, центральний кут $d\alpha = \dfrac{dS}{\rho} = \dfrac{|d\vec{\tau}|}{1}$, бо $|\vec{\tau}_1| = |\vec{\tau}_2| = |\vec{\tau}| = 1$.

Тоді
$$\left|\frac{d\vec{\tau}}{dS}\right| = \frac{1}{\rho}.$$

В свою чергу легко довести математично (і це можна бачити також з рис.2.5), що при $dS \to 0$ $d\vec{\tau} \perp \vec{\tau}$, тобто вектор $d\vec{\tau}$ співпадає з напрямом головної нормалі *n*. Тому, користуючись ортом головної нормалі $\vec{n}$, останнє співвідношення у векторній формі можна записати так:

$$\frac{d\vec{\tau}}{dS} = \frac{1}{\rho} \cdot \vec{n}. \tag{2.16}$$

Підставляємо (2.16) до (2.15), а отриманий вираз до (2.14). В результаті знаходимо:

$$\vec{W} = \frac{d\upsilon_\tau}{dt} \cdot \vec{\tau} + \frac{\upsilon_\tau^2}{\rho} \cdot \vec{n}. \tag{2.17}$$

Перший доданок цього рівняння називають *тангенціальним* (дотичним) прискоренням $\vec{W}_\tau$, а другий – *нормальним* або доцентровим прискоренням $\vec{W}_n$:

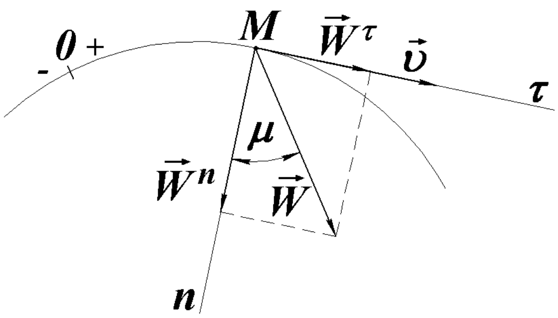
$$\vec{W}_\tau = \frac{d\upsilon_\tau}{dt}\cdot\vec{\tau},\ \left|\vec{W}_\tau\right| = \frac{d\upsilon_\tau}{dt};\ \vec{W}_n = \frac{\upsilon_\tau^2}{\rho}\cdot\vec{n},\ \left|\vec{W}_n\right| = \frac{\upsilon_\tau^2}{\rho}. \qquad (2.18)$$

Так як орти $\vec{n}$ і $\vec{\tau}$ лежать в стичній площині, то і вектор $\vec{W}$ також буде лежати в цій площині. Тому проекція повного прискорення на бінормаль $\vec{W}_b = 0$.

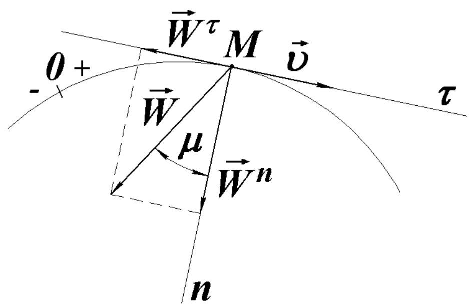
Таким чином, повне прискорення точки в загальному випадку криволінійного руху

$$\vec{W} = \vec{W}^\tau + \vec{W}^n. \qquad (2.19)$$

Потрібно чітко уявляти особливості кожної складової повного прискорення. Вектор тангенціального прискорення $\vec{W}^\tau$ напрямлений по дотичній до траєкторії точки і характеризує зміну модуля швидкості точки. Величина $\vec{W}^\tau$ може бути додатною, від'ємною або рівною нулю. Вектор нормального прискорення $\vec{W}^n$ завжди напрямлений в бік угнутості траєкторії і характеризує зміну вектора швидкості точки за напрямом. Величина $\vec{W}^n$ завжди додатна (рис. 2.6)



а) прискорений рух



б) сповільнений рух

Рис. 2.6

Модуль повного прискорення точки визначають за формулою

$$W = \sqrt{W^{\tau^2} + W^{n^2}}. \qquad (2.20)$$

Кут μ відхилення вектора $\vec{W}$ від нормалі *Mn* знаходять зі співвідношення

$$tg\mu = \frac{W^\tau}{W^n} \qquad (2.21)$$

причому $-\frac{\pi}{2} \le \mu \le \frac{\pi}{2}$.

Частинні випадки руху точки.

1. $\vec{W}=0$ $\left(W^{n}=W^{\tau}=0\right)$ – прямолінійний рівномірний рух.

2. $\vec{W}^{\tau}$ =const, $\vec{W}^{n}=0$ – прямолінійний рівнозмінний рух.

3. $\vec{W}^{\tau}=\dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt}=0, \vec{W}^{n}\neq 0$ – рівномірний рух точки вздовж криволінійної траєкторії будь-якої форми, або момент екстремального значення швидкості.

4. $W^{\tau}=const,\ W^{n}\neq 0$ – рівнозмінний криволінійний рух.

5. $W^{n}=\dfrac{\upsilon^{2}}{\rho}=0$ – прямолінійний рух точки; момент часу, коли рухома точка знаходиться в точці перегину траєкторії, або моменти часу зміни напряму руху точки вздовж траєкторії.

Питання для самоконтролю

1. Що називають траєкторією точки?
2. Які способи задання руху точки існують і в чому полягає кожний з них?
3. Чому функції $x=f_{1}(t),\quad y=f_{2}(t),$ і $z=f_{3}(t),$ що визначають рух точки в координатній формі, повинні бути однозначними?
4. Як при координатному способі задання руху точки визначається її траєкторія?
5. Чому дорівнює і як напрямлений у просторі вектор швидкості?
6. Чому дорівнюють проекції швидкості точки на осі нерухомої декартової системи координат?
7. Чому дорівнюють проекції швидкості точки на дотичну і головну нормаль до траєкторії?
8. Як за проекціями швидкості знайти її величину і напрям?
9. Чому дорівнює і як напрямлений у просторі вектор прискорення точки?
10. Як визначаються проекції прискорення точки на нерухомі осі декартової системи координат?
11. Як за проекціями прискорення знайти його модуль і напрям?

12. Що являє собою натуральна система координат; де знаходиться її початок і як напрямлені осі цієї системи?
13. Як визначаються проекції прискорення точки на осі натуральної системи координат $M\tau nb$?
14. Які особливості руху точки характеризує дотичне прискорення?
15. Яким чином впливає на вид траєкторіїї точки величина нормального прискорення?
16. Який рух точки вздовж довільної траєкторії називають рівномірним, рівноприскореним, рівносповільненим?
17. Що означає в загальному випадку наявність чи відсутність нормального прискорення точки?
18. Траєкторією точки є еліпс. В яких положеннях на траєкторії точка має найбільше і найменше прискорення, якщо вона рухається рівномірно?
19. Дві точки починають рух зі стану спокою з однаковими дотичними прискореннями. Перша рухається по колу радіуса r_1, а друга – по колу радіуса r_2, причому $r_2 > r_1$. Яка точка в кожний момент часу має більше прискорення?
20. При яких умовах значення дугової координати в певний момент часу дорівнює шляху, що пройшла точка від початкового до даного момента часу?
21. Чи правильним є вираз для тангенціального прискорення :

$$W_\tau = \frac{d}{ds}\left(\frac{\upsilon^2}{2}\right)?$$

2.3. Кінематика твердого тіла

Вільне тверде тіло має можливість здійснювати будь-який рух з даного положення. Якщо одну з точок твердого тіла, наприклад точку A, жорстко зв'язати з нерухомою системою відліку (закріпити її), то воно буде мати можливість рухатись відносно цієї точки (*сферичний рух*) Якщо закріпити ще одну довільну точку тіла (наприклад, точку B), то воно зможе тільки обертатися навколо прямої, що проходить через ці точки, причому сама пряма, яку називають віссю обертання, буде нерухомою. Якщо закріпити ще і третю точку, котра не лежить на осі обертання (точка С), то тіло виявиться закріпленим нерухомо. Таким чином, положення твердого тіла в просторі відносно обраної системи координат визначається положенням трьох його точок, що не лежать на одній прямій. З'єднаємо три обрані точки між собою (рис. 2.7). Трикутник ABC, що утворився при цьому, в кінематиці розглядається як модель твердого тіла, бо рух його повністю визначає рух будь-якого тіла, жорстко з ним зв'язаного.

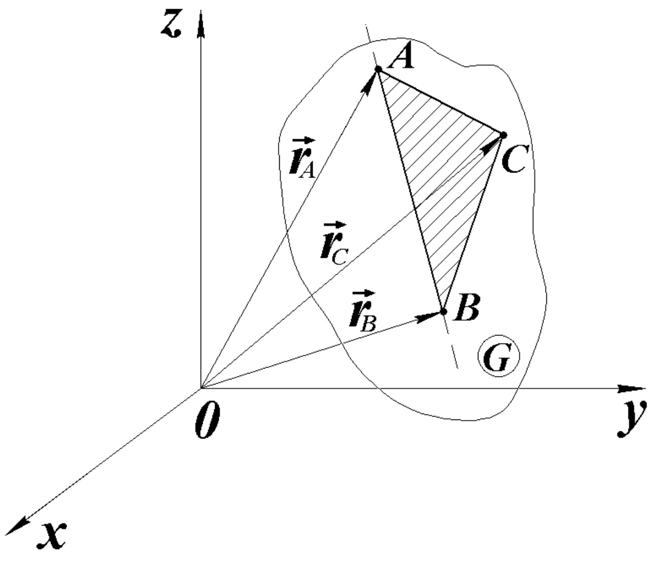


Рис. 2.7

При вивченні кінематики твердого тіла розглядаються дві задачі: 1) установлення способів задання руху і визначення кінематичних характеристик тіла в цілому;

2) визначення кінематичних характеристик окремих точок тіла.

Для будь-якого виду руху твердого тіла має місце теорема Ф.Грасгофа[1]: *проекції швидкостей двох довільних точок твердого тіла на пряму, що з'єднує ці точки, завжди рівні між собою.*

З великої кількості способів доведення цієї теореми скористуємось логічним доведенням. Проекції швидкостей точок *A* і *B* твердого тіла на пряму, що з'єднує ці точки (рис.2.8), повинні бути рівними, бо в протилежному випадку відстань *AB* між цими точками змінювалася б, що для твердого тіла неможливо. Тобто

$$\upsilon_A \cdot \cos\alpha = \upsilon_B \cdot \cos\beta$$

або (2.22)

$$\upsilon_A \cdot \cos\left(\vec{\upsilon}_A \,\hat{}\, \overrightarrow{AB}\right) = \upsilon_B \cdot \cos\left(\vec{\upsilon}_B \,\hat{}\, \overrightarrow{AB}\right)$$

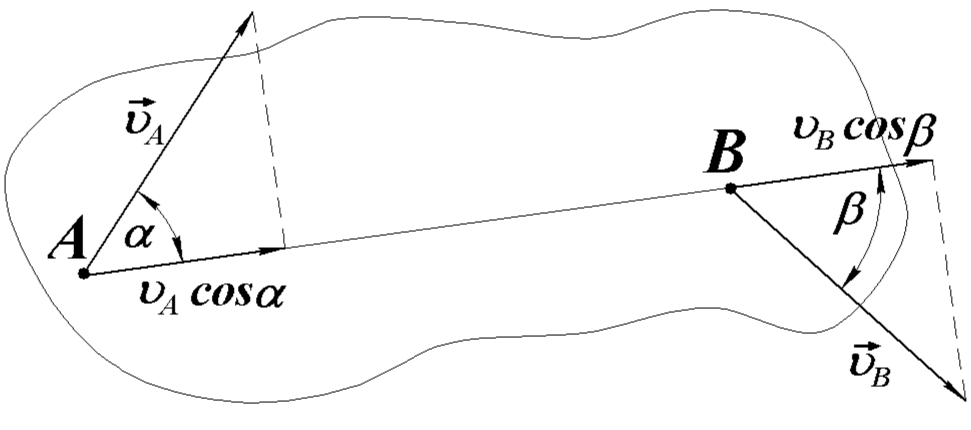


Рис. 2.8

[1] Ф.Грасгоф (1826…1893) – німецький механік і машинобудівник.

2.3.1. Поступальний рух твердого тіла

Рух тіла називається поступальним, якщо будь-яка пряма, проведена в тілі, переміщується паралельно самій собі, тобто не повертається відносно свого початкового напряму.

Властивості поступального руху визначаються такою теоремою:
при поступальному русі твердого тіла всі його точки описують геометрично однакові траєкторії і в кожний момент часу мають однакові за модулем і напрямом швидкості і прискорення.

Щоб довести теорему, розглянемо тверде тіло, яке рухається поступально (рис.2.9). В обраній системі відліку радіуси-вектори двох довільних точок A і B тіла зв'язані співвідношенням:

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overrightarrow{AB}$$

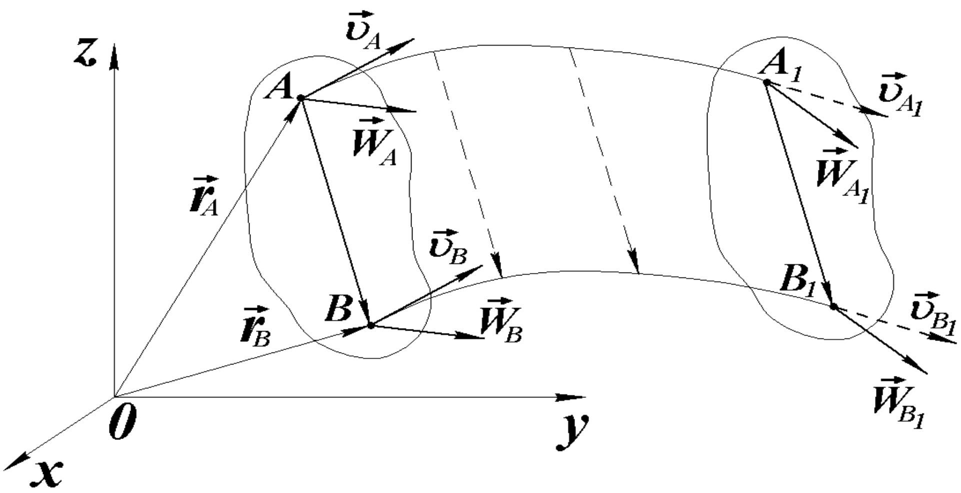


Рис. 2.9

Але в твердому тілі відстань між точками є сталою, тобто $|\overrightarrow{AB}| = \overrightarrow{const}$, напрям $\overrightarrow{AB}$ не змінюється згідно з визначенням поступального руху. Таким чином $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{const}$. Отже траєкторію точки *B* можна отримати паралельним переносом траєкторії точки *A*.

Якщо продиференціювати за часом наведене співвідношення і врахувати при цьому, що $\frac{d}{dt}(\overrightarrow{AB}) = 0$, то отримаємо: $\vec{\upsilon}_A = \vec{\upsilon}_B$ і далі $\vec{W}_A = \vec{W}_B$. Теорема доведена.

Від поступального руху тіла потрібно відрізняти так званий *миттєво-поступальний рух*, при якому в певний момент часу швидкості точок тіла стають векторно рівними між собою, але при цьому прискорення – векторно різні.

Взагалі поняття "швидкість тіла", "прискорення тіла" мають сенс тільки при поступальному русі тіла, бо тільки тоді кінематичні характеристики однакові для всіх точок тіла.

2.3.2. Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі

Обертальним рухом твердого тіла навколо нерухомої осі називають такий рух, при якому всі точки, що лежать на певній прямій, незмінно зв'язаній з тілом, залишаються нерухомими в обраній системі відліку.

Нерухому пряму, навколо якої обертається тіло, називають *віссю обертання*. Всі точки тіла, що не лежать на осі обертання, рухаються в площинах, перпендикулярних до осі обертання, і описують кола, центри яких знаходяться на цій осі. Відстань точки від осі обертання називають *радіусом обертання точки.*

Доцільно також відмітити, що всі прямі, проведені в тілі паралельно осі обертання, рухаються поступально.

Оберемо нерухому систему координат $Oxyz$ так, щоб вісь Oz співпала з віссю обертання твердого тіла. Положення тіла, яке обертається навколо нерухомої осі, може бути визначено двогранним кутом φ, котрий відлічують від певної нерухомої півплощини I до рухомої півплощини II, що незмінно зв'язана з тілом (рис.2.10). Кут φ вважається додатним, якщо він відлічується від нерухомої півплощини в напрямку проти руху годинникової стрілки для спостерігача, що дивиться з додатного кінця осі Oz, і від'ємним, якщо він відрахований за рухом годинникової стрілки. Вимірюється кут φ в радіанах ($1\,рад = 57^{o}17'45''$).

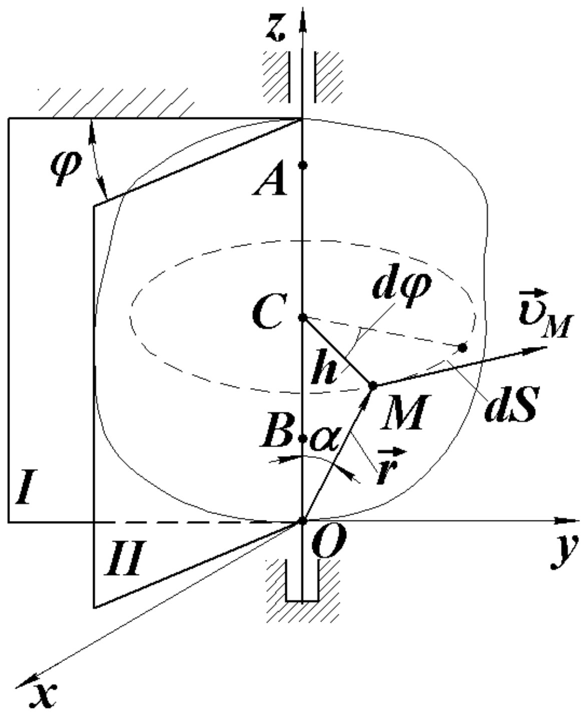


Рис. 2.10

Рівняння

$$\varphi = \varphi(t), \qquad (2.23)$$

що установлює залежність кута φ від часу, називають законом обертального руху тіла навколо нерухомої осі.

Для характеристики обертального руху використовують поняття кутової швидкості і кутового прискорення.

Кутова швидкість характеризує зміну з часом кута повороту тіла, а її алгебраїчна величина дорівнює першій похідній за часом від кута повороту:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}, \text{ або } \omega = \dot{\varphi}. \qquad (2.24)$$

Розмірність кутової швидкості $\dim\omega = рад/c$.

Знак ω визначає напрям обертання: якщо обертання тіла відбувається проти руху годинникової стрілки, то $\omega > 0$, якщо тіло обертається за рухом годинникової стрілки – $\omega < 0$. Ця обставина відображується на рисунках (кресленнях) показом кутової швидкості за допомогою дугової стрілки.

В техніці кутову швидкість часто задають числом обертів за хвилину n Оскільки за один оберт тіло повертається на кут $\varphi = 2\pi$, то

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30}. \tag{2.25}$$

Кутове прискорення характеризує зміну з часом кутової швидкості тіла, а його алгебраїчна величина дорівнює першій похідній від кутової швидкості, або другій похідній від кута повороту тіла за часом

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}. \tag{2.26}$$

Розмірність кутового прискорення $\dim \varepsilon = рад / c^2$.

При обертанні твердого тіла навколо нерухомої осі можливі такі випадки:

– при $\dot{\varphi} > 0$ $\ddot{\varphi} > 0$ – тіло обертається прискорено в додатному напрямі (проти руху годинникової стрілки);
– при $\dot{\varphi} < 0$ $\ddot{\varphi} < 0$ – тіло обертається прискорено у від'ємному напрямі (за рухом годинникової стрілки);
– при $\dot{\varphi} > 0$ $\ddot{\varphi} < 0$ – сповільнене обертання в додатному напрямі;
– при $\dot{\varphi} < 0$ $\ddot{\varphi} > 0$ – сповільнене обертання у від'ємному напрямі.

Теоретична механіка розглядає кутову швидкість і кутове прискорення не тільки як алгебраїчні параметри обертального руху, але і у вигляді векторних величин.

Вектором кутової швидкості $\vec{\omega}$ називають вектор, рівний за модулем алгебраїчній кутовій швидкості і напрямлений вздовж осі обертання тіла в той бік, звідкіля обертання тіла спостерігається як рух проти ходу годинникової стрілки.

Вектор $\vec{\varepsilon}$, рівний за модулем величині кутового прискорення і напрямлений вздовж осі обертання тіла в той бік, звідкіля обертання тіла спостерігається як рух проти ходу годинникової стрілки, називають *вектором кутового прискорення*.

При цьому

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \qquad (2.27)$$

Вектори $\vec{\omega}$ і $\vec{\varepsilon}$, для яких суттєве значення мають лише модулі і лінії дії, являють собою ковзні вектори.

У випадках, коли $\vec{\omega}$ і $\vec{\varepsilon}$ мають один напрям, тіло обертається прискорено; якщо $\vec{\omega}$ і $\vec{\varepsilon}$ протилежних напрямів, то тіло обертається сповільнено (рис. 2.11).

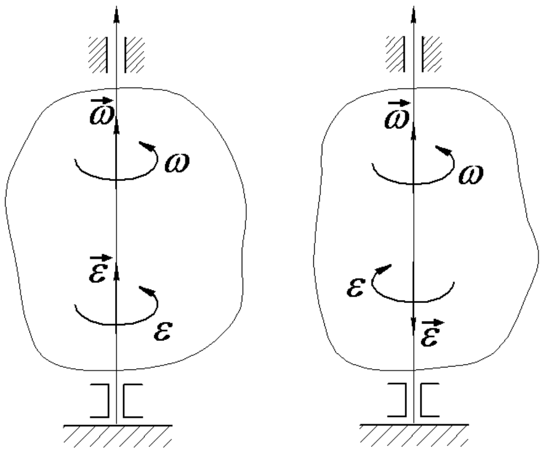


Рис. 2.11

Розподіл швидкостей і прискорень точок тіла при обертальному русі

При обертанні твердого тіла навколо нерухомої осі будь-яка його точка (наприклад, точка *M*), що відстоїть від осі обертання на відстані h, описує коло радіуса h (рис. 2.10). Тоді, якщо за час dt тіло обернеться на кут $d\varphi$, точка M здійснить переміщення $dS = hd\varphi$. Алгебраїчна швидкість точки на цьому переміщенні згідно з формулою (2.13)

$$\upsilon = \frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}(h \cdot d\varphi),$$

або

$$\upsilon = h \cdot \omega. \qquad (2.28)$$

Таким чином, швидкість будь-якої точки твердого тіла, що здійснює обертальний рух, дорівнює добутку кутової швидкості тіла на відстань цієї точки до осі обертання.

Вектор швидкості $\vec{\upsilon}$ завжди напрямлений по дотичній до кола, яку описує точка, і лежить в площині, перпендикулярній до осі обертання тіла. Інколи швидкість $\vec{\upsilon}$ точки називають *лінійною* або *коловою* швидкістю.

Проведемо з довільної точки O осі обертання радіус-вектор $\vec{r}$ точки M (рис. 2.10), який утворює кут α з віссю обертання. З прямокутного трикутника OCM виходить: $CM = h = r \cdot \sin\alpha$. Тоді

$$\upsilon = |\vec{\upsilon}| = \omega \cdot h = \omega \cdot r \cdot \sin\alpha$$

звідкіля, згідно з векторним добутком двох векторів, отримаємо

$$\vec{\upsilon} = \vec{\omega} \times \vec{r} \,. \qquad (2.29)$$

Тобто вектор швидкості будь-якої точки твердого тіла, що здійснює обертальний рух, дорівнює векторному добутку кутової швидкості тіла, на радіус-вектор цієї точки (формула Ейлера).

При обертальному русі твердого тіла повні прискорення окремих його точок в загальному випадку складаються з тангенціальних $\vec{W}^{\tau}$ і нормальних $\vec{W}^{n}$ прискорень (формула 2.19), алгебраїчні значення яких визначаються за формулами (2.18). Цим формулам можна надати іншого вигляду, якщо використати співвідношення (2.28).

Отримаємо

$$W^{\tau} = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d}{dt}(h \cdot \omega) = h \cdot \frac{d\omega}{dt}, \text{ або, кінцево, } W^{\tau} = h\varepsilon\,; \qquad (2.30)$$

$$W^{n} = \frac{\upsilon^2}{\rho} = \frac{(h\omega)^2}{h}, \text{ або, кінцево, } W^{n} = h \cdot \omega^2. \qquad (2.31)$$

Тоді модуль повного прискорення точки

$$W = \sqrt{W^{\tau^2} + W^{n^2}} = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\,. \qquad (2.32)$$

2.3.3. Перетворення найпростіших рухів твердого тіла

Передача обертального руху від одного тіла до іншого здійснюється за допомогою *передаточних механізмів*, в яких перше тіло називають *ведучим*, а друге – *веденим.* Якщо осі обертання ведучого і веденого тіл паралельні або перетинаються, то обертання можна передавати за допомогою зубчастих чи фрикційних передач. В зубчастій передачі обертання передається через зуби коліс, у фрикційній – при наявності сил тертя на поверхнях стичних коліс.

В зубчастих і, при відсутності проковзування, у фрикційних передачах лінійна швидкість в точці стикання буде однаковою як для ведучого, так і для веденого коліс. (рис.2.12), тобто $\upsilon_{A_1} = \upsilon_{A_2} = \upsilon_A$. В свою чергу $\upsilon_{A_1} = \omega_1 \cdot r_1$, $\upsilon_{A_2} = \omega_2 \cdot r_2$, тому $\omega_1 \cdot r_1 = \omega_2 \cdot r_2$ і

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}. \qquad (2.33)$$

Таким чином, кутові швидкості зубчастих і фрикційних коліс обернено пропорційні їх радіусам.

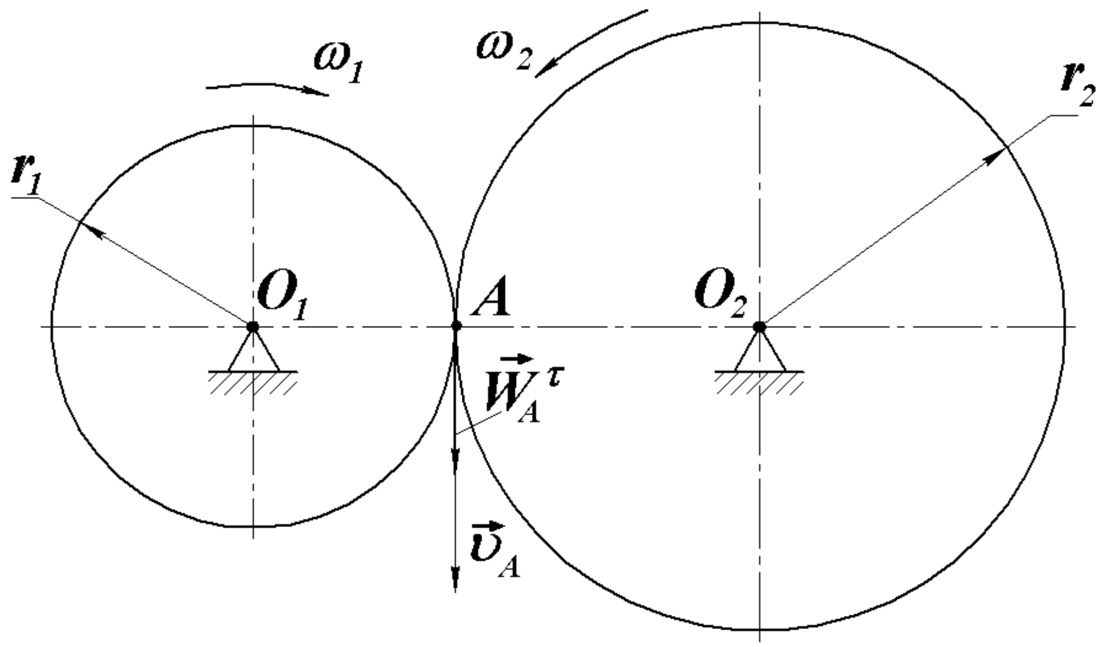


Рис.2.12

Оскільки числа зубів коліс, що знаходяться в зачепленні, пропорційні їх діаметрам, то для них буде вірним співвідношення

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1}, \qquad (2.34)$$

де z_1, z_2 – кількість зубів першого і другого коліс.

Крім зубчастої і фрикційної передач, існує передача обертального руху на відстані за допомогою гнучкого зв'язку (пас, трос, ланцюг). При відсутності проковзування паса по поверхні шківів лінійні швидкості всіх його точок будуть однаковими (рис. 2.13), тому співвідношення (2.33) буде справедливим і для пасових передач. Маємо:

$$\upsilon_A = \upsilon_B = \upsilon_C,$$

$$\upsilon_A = \omega_1 \cdot r_1, \ \upsilon_B = \omega_2 \cdot r_2 \text{ і}$$

$$\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2 = \upsilon_C.$$

З рівняння (2.33) також виходить, що

$$\frac{d\omega_1}{dt} r_1 = \frac{d\omega_2}{dt} r_2 \text{ або } \varepsilon_1 r_1 = \varepsilon_2 r_2 = W_A^{\tau}. \qquad (2.35)$$

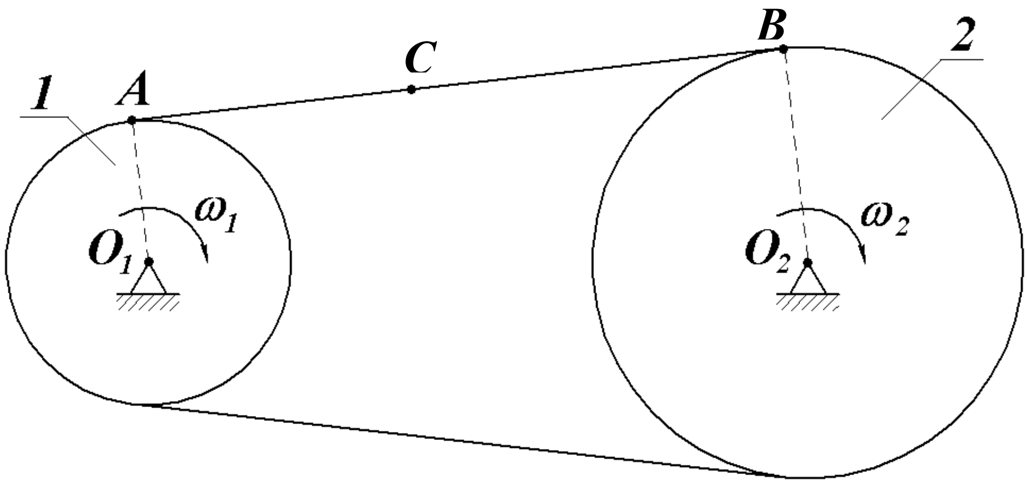


Рис. 2.13

Питання для самоконтролю

1. Яка залежність існує між проекціями швидкостей двох точок твердого тіла на пряму, що з'єднує ці точки?

2. Який рух тіла називають поступальним?
3. Чим відрізняється миттєво-поступальний рух від поступального руху тіла?
4. Чи можуть траєкторії точок тіла при його поступальному русі бути колами? Якщо так, то наведіть приклади.
5. Перерахуйте основні властивості поступального руху твердого тіла.
6. Чи можна звести кінематику поступального руху тіла до кінематики точки? Відповідь обґрунтуйте.
7. Кабінка колеса оглядання в процесі свого руху залишається завжди вертикальною. Які точки кабінки мають більше прискорення: точки підлоги чи точки стелі?
8. Який рух твердого тіла називають обертанням навколо нерухомої осі? Що являють собою траєкторії окремих точок при такому русі?
9. Яким рівнянням задається закон обертального руху тіла навколо нерухомої осі?
10. За якими формулами визначаються модулі кутової швидкості і кутового прискорення твердого тіла, що обертається?
11. Як напрямлені вектори кутової швидкості і кутового прискорення при обертанні тіла навколо нерухомої осі?
12. Наведіть формули для визначення величин швидкостей і прискорень окремих точок твердого тіла, яке обертається навколо нерухомої осі.
13. У скільки разів прискорення точки A диска більше прискорення його точки B, якщо відстань точки A від осі обертання диска удвоє більше відстані від осі точки B?
14. При яких умовах напрям прискорення точки при обертанні тіла складає з відрізком, що з’єднує цю точку з центром її траєкторії, кути 0^0, 45^0, 90^0?
15. Визначте геометричні місця точок твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі, для яких прискорення:

    а) рівні за модулем;

    б) співпадають за напрямом;

    в) рівні за модулем і співпадають за напрямом (векторно рівні).

16. Дві шестерні радіусами r_1 і $r_2 = 2r_1$ знаходяться в зачепленні і обертаються рівномірно. У якої шестерні прискорення точки зачеплення більше? У скільки разів?
17. За якою формулою можна перейти при обчисленні кутової швидкості від частоти обертання «n за хвилину» до розмірності «радіан за секунду»?

2.3.4. Плоскопаралельний рух твердого тіла

Плоскопаралельним або плоским рухом твердого тіла називається такий рух, при якому всі точки тіла рухаються паралельно певній нерухомій в даній системі відліку площині.

Плоский рух твердого тіла широко розповсюджений в техніці, оскільки окремі ланки значної кількості механізмів і машин здійснюють тільки плоский рух (кривошипно-шатунні, кулісні, епіціклічні механізми).

2.3.4.1. Рівняння і характеристики плоского руху

З визначення плоскопаралельного руху виходить, що він повністю характеризується рухом плоскої фігури, утвореної перерізом тіла площиною, паралельною певній нерухомій площині. В подальшому будемо вважати, що рух плоскої фігури відбувається в площині рисунка і, відповідно, рисунок є натуральним зображенням фігури. В свою чергу, положення плосокї фігури в координатній площині, наприклад, Oxy, яка обрана за базову, визначається положенням будь-якого відрізка AB цієї фігури (рис.2.14). З аналітичної геометрії відомо, що положення відрізка в площині його руху можна однозначно визначити координатами довільної точки відрізка (наприклад, координатами x_A, y_A точки A) і кутом φ між відрізком і однією з координатних осей (наприклад, віссю Ox). Точку, обрану для визначення положення плоскої фігури, називають *полюсом*.

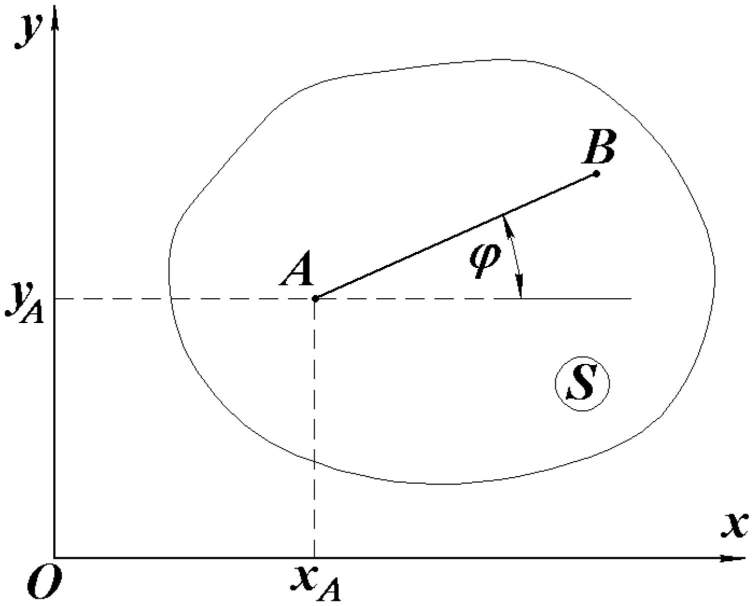


Рис. 2.14

Таким чином, закон руху плоскої фігури в її площині, а отже, і плоско-паралельного руху тіла в цілому, відносно обраної системи координат *Oxy* описується трьома рівняннями:

$$x_A = x_A(t),\ y_A = y_A(t),\ \varphi = \varphi(t). \tag{2.36}$$

Аналіз залежностей (2.36) дає можливість зробити висновок, що плоско-паралельний рух тіла є сукупністю двох простих рухів: *поступального*, при якому всі точки тіла рухаються так само, як і полюс (точка *A)*, і *обертального* – навколо осі, що проходить через полюс перпендикулярно до площини руху тіла.

Основними кінематичними характеристиками плоскопаралельного руху є швидкість і прискорення полюса (в нашому випадку $\vec{\upsilon}_A$, $\vec{W}_A$), а також кутова швидкість ω і кутове прискорення ε тіла.

Взагалі за полюс можна вибрати будь-яку точку тіла. Причому, при зміні точки, що вибирається за полюс, характеристики поступальної частини руху змінюється, а характеристики обертальної частини руху ω і ε залишаються *незмінними*.

2.3.4.2. Визначення швидкостей точок тіла при плоскопаралельному русі

Оскільки плоский рух можна розглядати як такий, що складається з поступального і обертального рухів, то справедливим буде таке твердження: *швидкість будь-якої точки твердого тіла, що здійснює плоскопаралельний рух, дорівнює геометричній (векторній) сумі швидкості полюса і лінійної швидкості цієї точки в її обертанні навколо полюса.*

Так, якщо за полюс взяти точку *A* (рис.2.15), то швидкість точки *B* тіла

$$\vec{\upsilon}_B = \vec{\upsilon}_A + \vec{\upsilon}_{BA}. \qquad (2.37)$$

При цьому швидкість $\vec{\upsilon}_{BA}$ визначається за числовим значенням і напрямом так само, як у випадку обертання тіла навколо нерухомої осі, що проходить через полюс, перпендикулярно до площини руху тіла. Тобто $\vec{\upsilon}_{BA} \perp \overrightarrow{AB}$ і

$$\vec{\upsilon}_{BA} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{AB}, \ \upsilon_{BA} = \omega \cdot AB. \qquad (2.38)$$

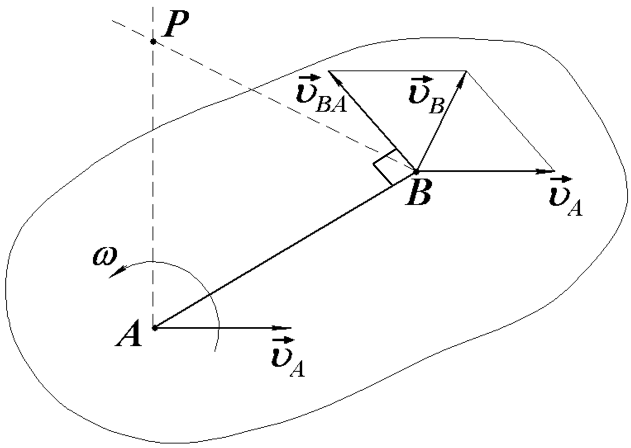


Рис.2.15

Розв’язання задач кінематики плоскопарлельного руху, в яких потрібно визначити швидкості певних точок твердого тіла, базується на рівнянні (2.37), але використання його у векторній формі в багатьох випадках недоцільне.

Як правило, для отримання конкретних числових значень шуканих величин векторне рівняння (2.37) проектується на осі плосокї системи координат. Так, якщо рух тіла розглядається в координатній площині xOy, отримаємо такі алгебраїчні співвідношення:

$$\begin{aligned} \upsilon_{Bx} &= \upsilon_{Ax} + \upsilon_{BAx}, \\ \upsilon_{By} &= \upsilon_{Ay} + \upsilon_{BAy}, \end{aligned} \qquad (2.37')$$

звідкіля

$$\upsilon_B = \sqrt{\upsilon_{Bx} + \upsilon_{By}}\,.$$

2.3.4.3. Миттєвий центр швидкостей

Можна довести, що при непоступальному русі плоскої фігури в кожний момент часу існує, і при тому єдина, точка з нульовою швидкістю.

Точка плоскої фігури, швидкість якої в даний момент часу дорівнює нулю, називається *миттєвим центром швидкостей (МЦШ)*. Надалі МЦШ будемо позначати літерою P.

Оберемо за полюс МЦШ. Тоді рівняння (2.37) можна записати так

$$\vec{\upsilon}_B = \vec{\upsilon}_{\mathrm{P}} + \vec{\upsilon}_{B\mathrm{P}},$$

але за визначенням $\vec{\upsilon}_{\mathrm{P}} = 0$ і тому

$$\vec{\upsilon}_B = \vec{\upsilon}_{B\mathrm{P}} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{\mathrm{P}B}. \qquad (2.39)$$

Отже, якщо за полюс вибрати МЦШ, то плоскопаралельний рух тіла зводиться до миттєвого обертального руху навколо миттєвої осі, що проходить через МЦШ перпендикулярно до площини руху цього тіла. Модулі швидкостей всіх точок плоскої фігури будуть прямо пропорційними їх відстаням до МЦШ, а напрями векторів швидкостей будуть перпендикулярними до прямих, які з'єднують ці точки з МЦШ. Саме тому МЦШ називають також *миттєвим центром обертання.*

Так, наприклад, відповідно до рис 2.15 будемо мати

$$\upsilon_A = \omega A\mathrm{P};\ \upsilon_B = \omega B\mathrm{P} \ \text{ і } \ \frac{\upsilon_A}{\upsilon_B} = \frac{A\mathrm{P}}{B\mathrm{P}}. \qquad (2.40)$$

Способи визначення положення МЦШ

1. Відомі швидкість $\vec{\upsilon}_A$ певної точки A плоскої фігури і миттєва кутова швидкість $\vec{\omega}$ цієї фігури. У цьому випадку $\upsilon_A = \omega \cdot \mathrm{P}A$ і $\mathrm{P}A = \dfrac{\upsilon_A}{\omega}$. Напрям відрізка Р$A$ визначиться поворотом вектора $\vec{\upsilon}_A$ на кут 90° в сторону обертання (рис. 2.16).

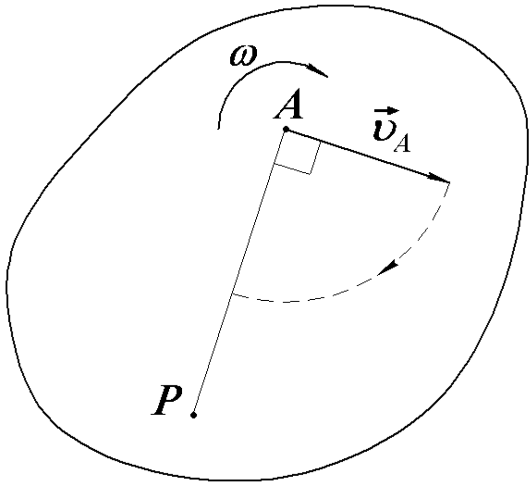
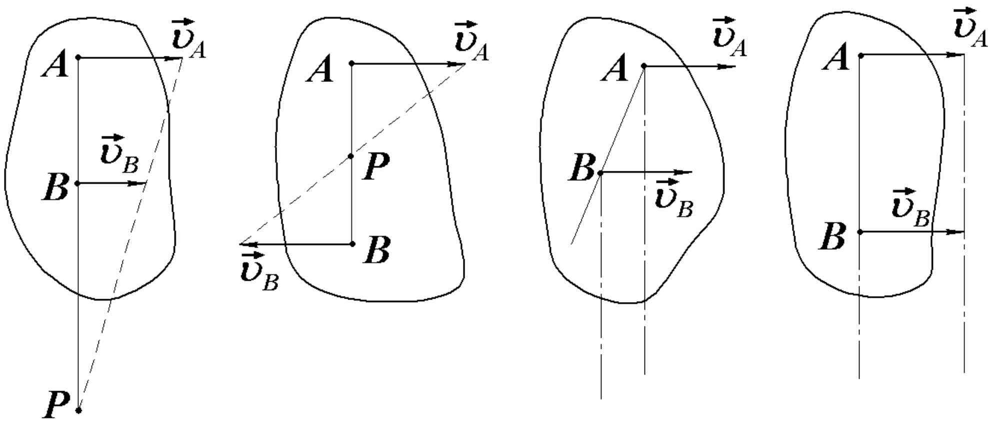


Рис.2.16

2. Відомі напрями швидкостей двох точок плоскої фігури або, що теж саме, види траєкторій двох точок фігури. Очевидно, що миттєвий центр швидкостей в даний момент буде знаходитись в точці перетину перпендикулярів, поставлених з цих точок до векторів їх швидкостей (наприклад, точки А і В на рис.2.15).

3. Швидкості двох точок плоскої фігури відомі і напрямлені в одну сторону перпендикулярно до відрізка, що їх з'єднує; при цьому $\upsilon_A \neq \upsilon_B$. МЦШ знаходиться в точці перетину прямої, що з'єднує кінці векторів швидкостей цих точок, і прямої, проведеної через точки А і В (рис.2.17а).

4. Швидкості двох точок плоскої фігури напрямлені в різні боки і перпендикулярні до відрізка, що з'єднує ці точки. МЦШ знаходиться в точці перетину відрізка AB і прямої, проведеної через кінці векторів швидкостей точок (рис.2.17, б).



а *б* *в* *г*

Рис.2.17

5. Швидкості двох точок плосокі фігури рівні між собою, паралельні і напрямлені в один бік. (тобто $\vec{v}_A = \vec{v}_B$). МЦШ віддаляється в нескінченність і має місце миттєво-поступальний рух тіла (фігури) (рис.2.17в,г).

6. Кочення без ковзання тіла по нерухомій площині (випадок плоского руху). Очевидно, що в кожний момент часу точка контакту тіла і поверхні має цілком певну швидкість. Але поверхня нерухома, тому і точка контакту, спільна для тіла і поверхні, також має нульову швидкість і, таким чином, є МЦШ для цього тіла (рис.2.18).

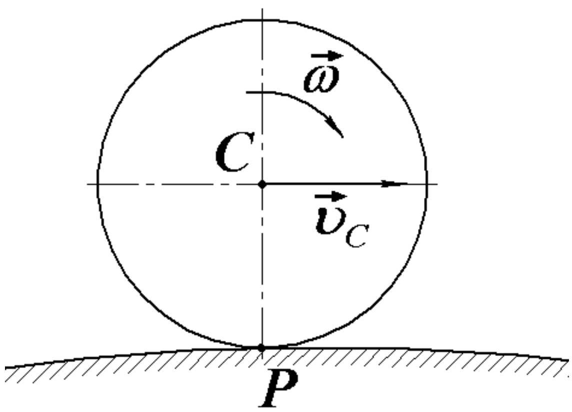


Рис. 2.18

2.3.4.4. Прискорення точок при плоскопаралельному русі твердого тіла

Теорема: *прискорення будь-якої точки твердого тіла, що здійснює плоский рух, дорівнює геометричній сумі прискорення полюса і прискорення даної точки в її обертальному русі навколо полюса.*

Згідно з формулою (2.37) швидкість довільної точки *B* тіла (дивись рис.2.15).

$$\vec{\upsilon}_B = \vec{\upsilon}_A + \vec{\upsilon}_{BA}.$$

Диференціюємо це рівняння за часом і отримуємо

$$\vec{W}_B = \vec{W}_A + \vec{W}_{BA}. \qquad (2.41)$$

що і потрібно було довести.

В свою чергу, прискорення $\vec{W}_{BA}$, як прискорення точки в обертальному русі навколо полюса *A*, складається з нормального і тангенціального прискорень:

$$\vec{W}_{BA} = \vec{W}^{\,n}_{BA} + \vec{W}^{\,\tau}_{BA}. \qquad (2.42)$$

Тоді формулі (2.41) можна надати вигляду

$$\vec{W}_B = \vec{W}_A + \vec{W}^{\,n}_{BA} + \vec{W}^{\,\tau}_{BA}. \qquad (2.43)$$

Модулі векторів $\vec{W}^{\,n}_{BA}$ і $\vec{W}^{\,\tau}_{BA}$ визначають згідно з формулами (2.31) і (2.30):

$$W^n_{BA} = \omega^2 \cdot AB,\ W^\tau_{BA} = \varepsilon \cdot AB,$$

причому вектор $\vec{W}^{\,n}_{BA}$ напрямлений від точки *B* до полюса *A*, а вектор $\vec{W}^{\,\tau}_{BA}$ перпендикулярний до відрізка *AB*, що з’єднує дану точку з полюсом, і має напрям в бік напряму стрілки кутового прискорення ε (рис. 2.19).

При розв’язанні задач кінематики плоскопаралельного руху доцільно векторне рівняння (2.43) замінити алгебраїчними рівняннями його проекцій на дві обрані координатні осі. Так, наприклад, в плоскій системі координат *Oxy* будемо мати:

$$\left.\begin{aligned} W_{Bx} &= W_{Ax} + W^{n}{}_{BAx} + W^{\tau}{}_{BAy}; \\ W_{By} &= W_{Ay} + W^{n}{}_{BAy} + W^{\tau}{}_{BAy.} \end{aligned}\right\}. \tag{2.44}$$

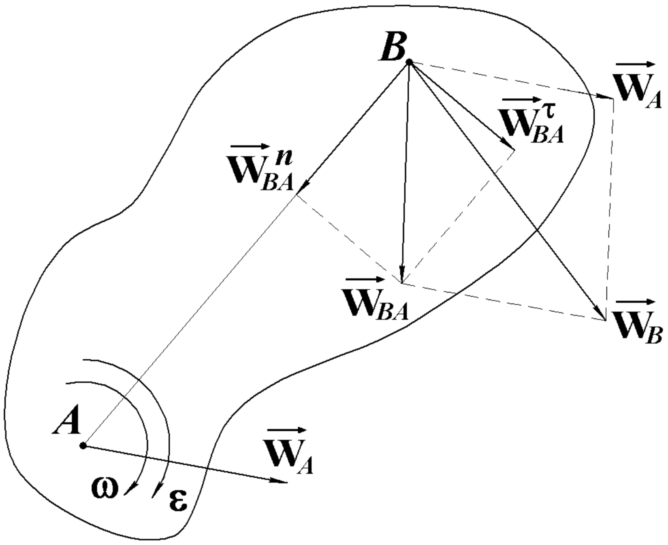


Рис.2.19

2.3.4.5. Миттєвий центр прискорень

Миттєвим центром прискорень (МЦП) плоскої фігури, що рухається непоступально (ω і ε одночасно не дорівнюють нулю), називається така її точка Q, прискорення якої в даний момент часу дорівнює нулю.

Припустимо, що є відомими за модулем і напрямком прискорення будь-якої точки *A* плоскої фігури, а також кутова швидкість і кутове прискорення цієї фігури. Якщо взяти за полюс точку *A*, то для точки Q прискорення

$$\vec{W}_Q = \vec{W}_A + \vec{W}_{QA}.$$

Але точка Q – це МЦП і $\vec{W}_Q = 0$, тому

$$\vec{W}_{QA} = -\vec{W}_A.$$

Таким чином, вектор прискорення точки Q в її обертанні навколо полюса А протилежний за напрямком вектору $\vec{W}_A$, і рівний йому за модулем. Тоді на підставі формули (2.32).

$$W_A = W_{QA} = QA\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\,, \tag{2.45}$$

звідкіля відстань МЦП від даної точки А

$$QA = W_A \Big/ \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\,. \tag{2.46}$$

Очевидно, що рівняння (2.45) справедливе і для будь-якої іншої точки *B* плоскої фігури. Тому можна записати, що

$$\frac{W_A}{W_B} = \frac{QA}{QB}. \tag{2.47}$$

Останнє співвідношення означає, що прискорення точок тіла, яке здійснює плоский рух, пропорційні їх відстаням до МЦП. Причому вектори прискорень точок тіла утворюють один і той же кут α з відповідними відрізками, що з'єднують ці точки з МЦП (рис.2.20). Величина кута α визначається на підставі формули (2.21):

$$tg\alpha = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}.$$

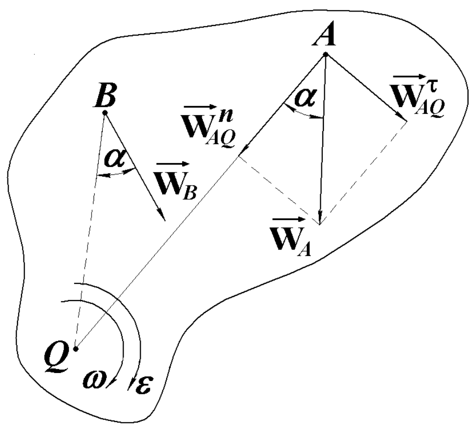


Рис. 2.20

Способи визначення положення МЦП

З вищевикладеного виходить перше правило визначення положення МЦП: щоб знайти положення МЦП, треба відоме прискорення будь-якої точки плоскої фігури (наприклад, точки А) повернути на кут α в напрямі обертання фігури, якщо $\varepsilon > 0$, і протилежно обертанню, якщо $\varepsilon < 0$. На отриманому промені відкладають відрізок, довжина якого визначається за формулою (2.46).

Другий спосіб визначення МЦП

Припустимо, що відомі прискорення $\vec{W}_A$ і $\vec{W}_B$ двох будь-яких точок *A* і *B* фігури (рис.2.21). Якщо взяти за полюс точку А, то

$$\vec{W}_B = \vec{W}_A + \vec{W}_{BA}.$$

Звідси вектор відносного прискорення точки *B* в її русі навколо точки *A*

$$\vec{W}_{BA} = \vec{W}_B + \left(-\vec{W}_A\right).$$

Відкладаємо з точки В вектор $-\vec{W}_A$ і, додаючи його геометрично до вектора $\overline{W}_B$, знайдемо вектор $\overline{W}_{BA}$.

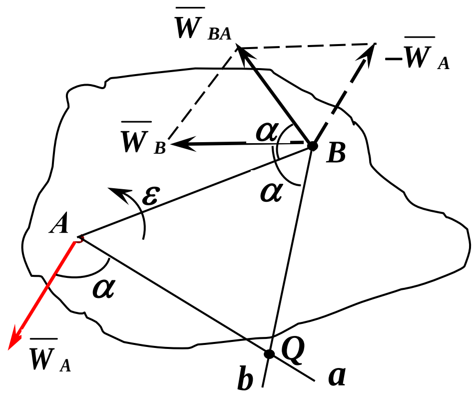


Рис. 2.21

Вимірюємо кут α між $\overline{W}_{BA}$ і лінією АВ. З рисунка видно, що вектор $\overline{W}_{BA}$, який визначає напрям кутового прискорення ε фігури, спрямований проти руху годинникової стрілки відносно полюса А. З точок А і В проводимо лінії *Aa* і *Bb* під кутом α до векторів $\overline{W}_A$ і $\overline{W}_B$, який відкладають також проти руху годинникової стрілки. Точка перетину цих ліній визначає положення МЦП даної плоскої фігури.

Частинні випадки знаходження МЦП

1. $\omega = 0$; $\varepsilon \neq 0$. Тоді $tg\alpha = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2} = \infty$ і $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Цей випадок відповідає миттєво-поступальному руху. Прискорення всіх точок плоскої фігури перпендикулярні до прямих, що з'єднують ці точки з МЦП (рис.2.22).

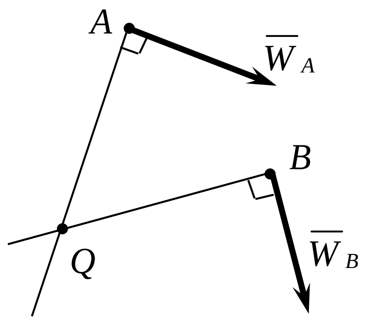


Рис.2.22

2. $\varepsilon = 0$, $\omega \neq 0$. Така умова відповідає або обертанню плоскої фігури з постійною кутовою швидкістю, або випадку, коли кутова швидкість досягає екстремальних значень. Маємо: $tg\alpha = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2} = 0$ і $\alpha = 0$. Отож, прискорення всіх точок фігури напрямлені до МЦП (рис.2.23).

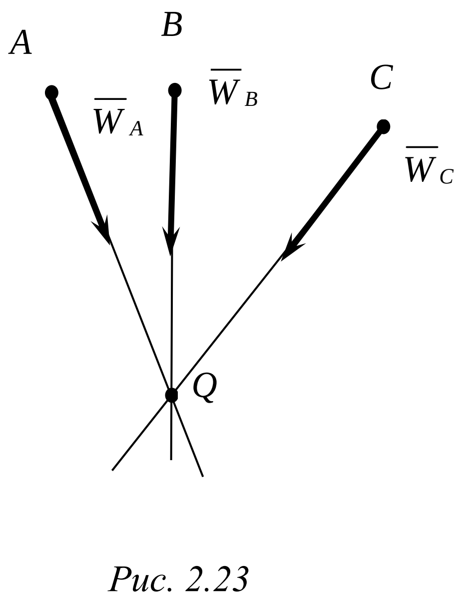


Рис. 2.23

3. $\omega = 0$; $\varepsilon = 0$. Умова відповідає поступальному руху, і прискорення будь-якої точки плоскої фігури дорівнює прискоренню полюса, а МЦП знаходиться у нескінченності.

На закінчення розділу потрібно підкреслити, що МЦШ і МЦП – це різні точки тіла (фігури). Вони збігаються лише у випадку обертання тіла навколо нерухомої осі.

Розглянемо такий приклад.

Циліндр радіуса R котиться без ковзання по горизонтальній площині, причому швидкість його центра мас A $\vec{\upsilon}_A$ є змінною. Визначити прискорення точки P контакту циліндра з площиною (рис.2.24).

Розв'язання:

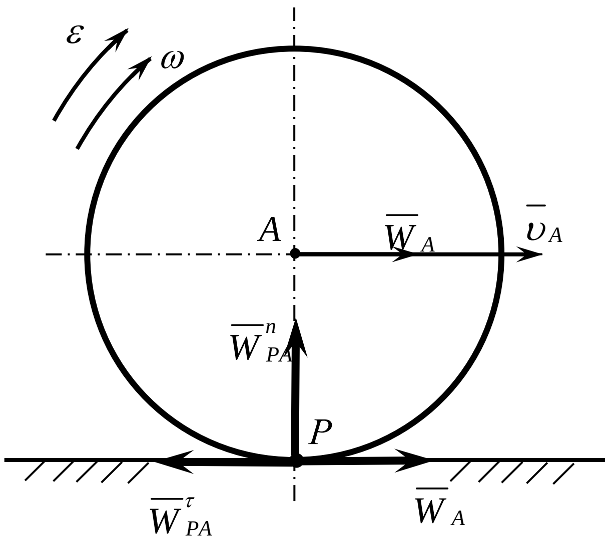


Рис. 2.24

В даному випадку точка P є миттєвим центром швидкостей котка і $\vec{\upsilon}_P = 0$.

Визначимо кутову швидкість і кутове прискорення циліндра:

$$\omega = \frac{\upsilon_A}{R}; \; \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\upsilon_A}{R}\right) = \frac{1}{R}\frac{d\upsilon_A}{dt} = \frac{W_A}{R} \qquad \text{(a)}$$

Припустимо, що циліндр котиться прискорено, тобто $W_A > 0$. Приймаємо точку A за полюс, тоді прискорення точки P визначається формулою:

$$\overrightarrow{W_P} = \overrightarrow{W_A} + \overrightarrow{W}^n_{PA} + \overrightarrow{W}^\tau_{PA}. \qquad (б)$$

Величина тангенціальної складової відносного прискорення $W^\tau_{PA} = \varepsilon \cdot R$ і, таким чином, дорівнює величині W_A. В той же час, як видно з рисунка, $\overrightarrow{W}^\tau_{PA} = -\overrightarrow{W_A}$. З урахуванням цього рівняння (б) набуває вигляду: $\overrightarrow{W_P} = \overrightarrow{W}^n_{PA}$.

Оскільки $W^n_{PA} = R\omega^2 = \dfrac{\upsilon_A^2}{R}$, то величина прискорення точки P:

$$W_P = \frac{\upsilon_A^2}{R}.$$

Питання для самоконтролю

1. Який рух твердого тіла називають плоскопаралельним?
2. Рухом якої фігури повністю визначається плоскопаралельний рух твердого тіла?
3. Запишіть у загальній формі рівняння, які задають плоскопаралельний рух.
4. З яких простих рухів складається плоскопаралельний рух?
5. Яка точка плоскої фігури обирається за полюс і який рух здійснюють інші точки фігури відносно полюса?
6. Покажіть, які рівняння плоскопаралельного руху тіла визначають швидкість полюса, і кутову швидкість тіла.
7. За якою формулою визначається швидкість будь-якої точки тіла, що рухається плоскопаралельно? Поясніть фізичне значення складових, які входять в цю формулу.
8. Швидкості точок A і B плоскої фігури утворюють кути з прямою, що їх з’єднує, рівні відповідно 45^0 і 15^0. Яка точка має меншу швидкість?
9. Що називають миттєвим центром швидкостей плоскої фігури (тіла)?
10. Яке з понять: полюс чи МЦШ має більш загальний смисл?

11. Де знаходиться МЦШ тіла, що в даний момент здійснює миттєво-потсупальний рух?
12. За яким законом змінюються лінійні швидкості точок тіла в залежності від їх відстаней до МЦШ?
13. Яка точка колеса, що котиться без ковзання по нерухомій площині, має найбільшу швидкість?
14. Як напрямлена швидкість точки *B* плоскої фігури відносно прямої *AB*, якщо швидкість точки *A* перпендикулярна до цієї прямої?
15. Визначити швидкість точки *B* плоскої фігури, якщо швидкість обертання її навколо полюса *A* векторно дорівнює швидкості точки *A*.
16. Визначити положення МЦШ плоскої фігури у випадку, коли швидкість точки *B* в її обертанні навколо полюса *A* за модулем дорівнює швидкості точки *A*, але має протилежний напрям.
17. Швидкість точки *A* плоскої фігури напрямлена вздовж прямої *AB*. Визначте швидкість точки *B* при умові, що швидкість її відносно точки *A* за модулем дорівнює $\overrightarrow{\upsilon_A}$.
18. Прискорення якої точки тіла, що здійснює плоский рух, можна обчислити за рівняннями його руху?
19. За якою формулою можна визначити прискорення будь-якої точки тіла в плоскопаралельному русі? Поясніть фізичне значення окремих складових, що входять до цієї формули.
20. Чому проекція прискорення довільної точки плоскої фігури на вісь, що проходить через полюс і цю точку, не може бути більшою проекції прискорення полюса на ту ж вісь?
21. Як напрямлено прискорення точки *B* плоскої фігури, якщо її кутова швидкість стала, а прискорення полюса *A* напрямлено вздовж прямої *AB*?
22. Яку точку плоскої фігури називають миттєвим центром прискорень (МЦП) і чи може МЦП співпвдвти з МЦШ?

23. Визначити напрям прискорення точки *B*, якщо плоска фігура здійснює миттєво-поступальний рух, а прискорення точки *A* перпендикулярно до прямої *AB*.
24. Як напрямлено і чому дорівнює прискорення точки *B* плоскої фігури, якщо кутова швидкість є сталою, прискорення точки *A* $\overrightarrow{W_A}$ перпендикулярне до відрізка *AB*, а прискорення $\overrightarrow{W_{BA}^n}$ за модулем рівне прискоренню W_A?
25. Знайдіть величину і напрям прискорення точки *B* плоскої фігури, якщо прискорення точки *A* відоме і перпендикулярне до відрізка *AB*, при таких умовах:

   а) $\overrightarrow{W_{BA}^{\tau}} = \overrightarrow{W_A}$, $W_{BA}^n = W_A$;

   б) $\overrightarrow{W_{BA}^{\tau}} = -\overrightarrow{W_A}$, $W_{BA}^n = W_A$.
26. Що можна сказати про кутову швидкість плоскої фігури, якщо прискорення точки *A* дорівнює нулю, а прискореннння точки *B* напрямлене вздовж прямої *AB*?
27. Що являє собою картина розподілу прискорень точок плоскої фігури в даний момент часу по відношенню до МЦП в таких випадках:

   а) $\omega \neq 0; \quad \varepsilon \neq 0;$

   б) $\omega \neq 0; \quad \varepsilon = 0;$

   в) $\omega = 0; \quad \varepsilon \neq 0;$

   г) $\omega = 0; \quad \varepsilon = 0.$

2.4. Складання рухів точки і твердого тіла

2.4.1. Складний рух точки

З різними видами рухів, які в механіці називають складними, ми досить часто зустрічаємося в повсякденному житті. Це, наприклад, рух пасажира по палубі рухомого пароплава, рух повзуна в механізмі по рухомій напрямній, переміщення людини по рухомому ескалатору, тощо. При цьому рух точки або тіла буде видаватися різним в залежності від того, розглядається він відносно рухомої палуби, напрямній, ескалатора, чи відносно нерухомого спостерігача. *Складним* рухом точки будемо називати рух, що відбувається одночасно відносно основної нерухомої системи відліку і деякої другої системи відліку, яка рухається, в свою чергу, відносно основної системи.

Припустимо, що рух певної точки *M* розглядається в двох системах координат: $O^*x^*y^*z^*$, яка є нерухомою, і $Oxyz$, яка здійснює довільний рух відносно системи $O^*x^*y^*z^*$ (рис.2.25).

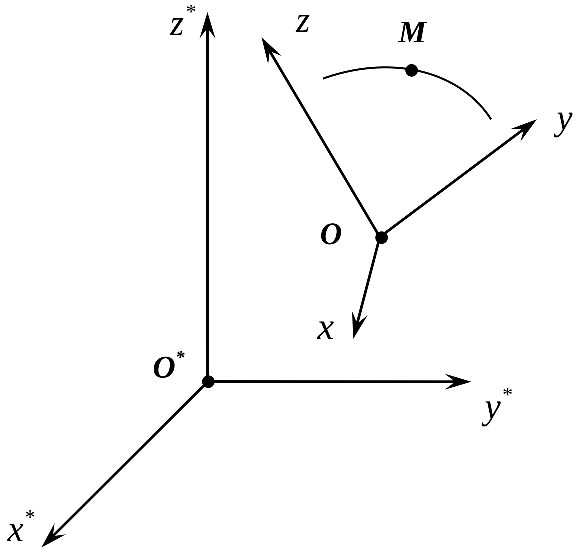


Рис. 2.25

Рух точки *M* відносно основної нерухомої системи координат $O^*x^*y^*z^*$ називають *абсолютним*; рух точки *M* по відношенню до рухомої системи відліку $Oxyz$ називають *відносним,* а рух самої рухомої системи по відношенню до нерухомої будемо називати *переносним* рухом. При дослідженні переносного руху точки *M* її подумки слід скріпити з рухомою системою $Oxyz$ (або з незмінюваним середовищем, що жорстко зв'язане з рухомою системою) і розглядати рух точки по відношенню до нерухомих осей.

Відповідно з цим швидкість і прискорення точки *M* в абсолютному русі будемо називати абсолютною швидкістю і абсолютним прискоренням і позначати їх індексом "a": $\overline{\upsilon_a}, \overline{W}_a$; швидкість і прискорення у відносному русі – відносними і позначати індексом "r": $\overline{\upsilon_r}, \overline{W}_r$; швидкість і прискорення точки в переносному русі – переносними і позначати індексом "e": $\overline{\upsilon_e}, \overline{W}_e$.

2.4.1.1. Складання швидкостей

Розглянемо рух точки M по відношенню до двох систем координат: нерухомої $O^*x^*y^*z^*$ і системи $Oxyz$, що має відносно нерухомих координат певну кутову швидкість $\overline{\omega}$ (рис. 2.26).

Положення точки M по відношенню до нерухомої системи відліку визначається радіусом-вектором $\overline{r_a}$, а по відношенню до рухомої системи – радіусом-вектором $\overline{\rho}$, положення точки О (початок рухомої системи), відносно нерухомої – радіусом-вектором $\overline{r_0}$.

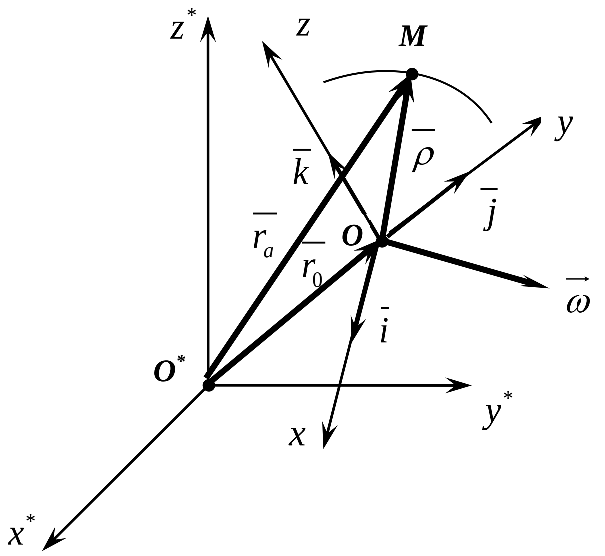


Рис. 2.26

Доведемо теорему:

абсолютна швидкість точки дорівнює геометричній сумі переносної і відносної швидкостей.

З рис.2.26 маємо:

$$\overline{r_a} = \overline{r_0} + \overline{\rho},$$

але оскільки:

$$\overline{\rho} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k},$$

то:

$$\overline{r_a} = \overline{r_0} + x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}\,. \qquad (2.48)$$

В рухомій системі відліку $Oxyz$ з часом змінюються як координати x, y, z точки M, так і (за напрямом) одиничні вектори $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ цієї системи.

Тому швидкість абсолютного руху точки:

$$\overline{\upsilon_a} = \frac{d\overline{r_a}}{dt} = \frac{d\overline{r_0}}{dt} + \left(x\frac{d\bar{i}}{dt} + y\frac{d\bar{j}}{dt} + z\frac{d\bar{k}}{dt} \right) + \left(\frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k} \right). \qquad (2.49)$$

Перший доданок у правій частині рівності (2.49) являє собою швидкість точки O відносно нерухомої системи відліку. Другий доданок – це похідна за часом від $\bar{\rho}$ в припущенні, що координати x, y, z точки M сталі. Тобто другий доданок – це швидкість відносно центра O тієї точки рухомої системи, яка в даний момент часу збігається з точкою M.

З цього виходить, що сума двох перших доданків правої частини рівняння (2.49) визначає швидкість відносно нерухомих координатних осей точки рухомої системи $Oxyz$, з якою в даний момент часу збігається точка M, тобто швидкість $\overline{\upsilon_e}$ переносного руху.

Третій доданок правої частини рівняння – похідна від $\bar{\rho}$ в припущенні, що $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ сталі величини, - визначає швидкість точки M по відношенню до рухомих координатних осей, тобто і є швидкістю її у відносному русі: $\overline{\upsilon_r}$.

З урахуванням вище викладеного рівняння (2.48) набуває вигляду:

$$\overline{\upsilon_a} = \bar{\upsilon}_e + \bar{\upsilon}_r\,, \qquad (2.50)$$

що і потрібно було довести.

Величину абсолютної швидкості можна знайти за формулою, що визначає довжину діагоналі паралелограма швидкостей (рис.2.27):

$$\upsilon_a = \sqrt{\upsilon_e^{\,2} + \upsilon_r^{\,2} + 2\upsilon_e \cdot \upsilon_r \cdot \cos\left(\overline{\upsilon_e}, \overline{\upsilon_r}\right)}. \qquad (2.51)$$

Другим способом визначення модуля абсолютної швидкості є спосіб проекцій.

В декартовій системі координат *Oxyz* векторне рівняння (2.50) відповідає трьом алгебраїчним рівнянням:

$$\left.\begin{aligned} \upsilon_{ax} = \upsilon_{ex} + \upsilon_{rx},\ \upsilon_{ay} = \upsilon_{ey} + \upsilon_{ry}, \upsilon_{az} = \upsilon_{ez} + \upsilon_{rz} \\ \upsilon = \sqrt{\upsilon_{ax}{}^2 + \upsilon_{ay}{}^2 + \upsilon_{az}{}^2} \end{aligned}\right\} \qquad (2.52)$$

Іноді треба знайти відносну швидкість точки, коли відомі її переносна та абсолютна швидкості, або навпаки, треба знайти переносну швидкість, коли відомі її відносна та абсолютна швидкості.

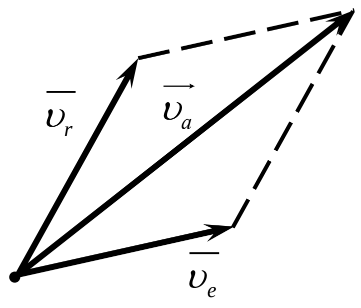


Рис.2.27

З формули (2.50) маємо:

$$\left.\begin{aligned} \overline{\upsilon_r} = \overline{\upsilon_a} - \overline{\upsilon_e} = \overline{\upsilon_a} + \left(-\overline{\upsilon_e}\right), \\ \overline{\upsilon_e} = \overline{\upsilon_a} + (-\overline{\upsilon_r}). \end{aligned}\right\} \qquad (2.53)$$

Величина відносної швидкості може бути визначена за формулою (рис.2.28):

$$\upsilon_r = \sqrt{\upsilon_a{}^2 + \upsilon_e{}^2 - 2\upsilon_a \cdot \upsilon_e \cdot \cos\left(\overline{\upsilon_a}, \overline{\upsilon_e}\right)}. \qquad (2.54)$$

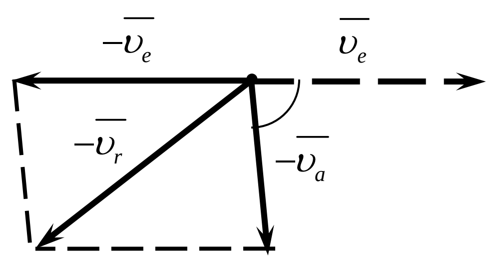


Рис.2.28

За аналогічною формулою можна визначити і переносну швидкість. Цей спосіб називають «способом зупинки руху».

2.4.1.2. Додавання прискорень в складному русі

Теорема Коріоліса:

Абсолютне прискорення точки дорівнює геометричній сумі трьох прискорень – переносного, відносного і коріолісова (поворотного).

Для визначення абсолютного прискорення точки *M* (рис.2.26) продиференціюємо за часом рівняння 2.49).

$$\overline{W_a} = \frac{d\overline{\upsilon_a}}{dt} = \frac{d^2\overline{r_0}}{dt^2} + \left(x\frac{d^2\bar{i}}{dt^2} + y\frac{d^2\bar{j}}{dt^2} + z\frac{d^2\bar{k}}{dt^2} \right) + \left(\frac{d^2x}{dt^2}\bar{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\bar{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\bar{k} \right) +$$
$$+2\left(\frac{dx}{dt}\frac{d\bar{i}}{dt} + \frac{dy}{dt}\frac{d\bar{j}}{dt} + \frac{dz}{dt}\frac{d\bar{k}}{dt} \right). \qquad (2.55)$$

Перший доданок в правій частині отриманого рівняння являє собою прискорення центра *O* рухомої системи координат відносно нерухомої системи відліку.

Другий доданок є другою похідною від радіуса-вектора $\overline{\rho}$, в припущенні, що координати точки *M* відносно до осей $Oxyz$ сталі. Отже другий доданок – це прискорення відносно центра *O* рухомої системи відліку тієї її точки, з якою в даний час збігається точка *M*. Тому перший і другий доданки разом дають прискорення відносно нерухомої системи відліку тієї точки рухомого тригранника, з якою в даний момент збігається точка *M*. А це і є прискорення переносного руху точки *M* - $\vec{W}_e$.

Третій доданок відповідає другій похідній від радіуса-вектора $\overline{\rho}$ в припущенні, що орти $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ рухомої системи відліку сталі величини, напрями яких не змінюються. З цього виходить, що третій доданок визначає прискорення точки M по відношенню до рухомих координат і таким чином є відносним прискоренням $\overrightarrow{W_r}$.

З'ясуємо фізичний зміст четвертого доданку рівняння (2.55). За формулою Ейлера вектор лінійної швидкості точки тіла, що обертається з кутовою швидкістю ω,

$$\vec{\upsilon} = \vec{\omega} \times \vec{r},$$

де $\vec{r}$ - радіус-вектор точки.

Оскільки $\vec{\upsilon} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$, то

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}.$$

Очевидно, що похідні за часом від одиничних векторів $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ рухомої системи відліку також можна розглядати як векторні добутки вектора переносної кутової швидкості на ці орти:

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \overrightarrow{\omega_e} \times \vec{i}; \quad \frac{d\vec{j}}{dt} = \overrightarrow{\omega_e} \times \vec{j}; \quad \frac{d\vec{k}}{dt} = \overrightarrow{\omega_e} \times \vec{k}.$$

З урахуванням отриманих співвідношень четвертий доданок набуває вигляду:

$$2\overline{\omega_e} \times \left(\frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{d\ y}{dt}\bar{j} + \frac{d\ z}{dt}\bar{k} \right) = 2\overline{\omega_e} \times \left(\upsilon_x \bar{i} + \upsilon_y \bar{j} + \upsilon_z \bar{k} \right) = 2\overline{\omega_e} \times \overline{\upsilon_r},$$

де $\vec{\upsilon}_r$ - вектор відносної швидкості точки *M*.

Кінцевий вираз визначає прискорення Коріоліса, яке позначають через $\overrightarrow{W_K}$:

$$\overrightarrow{W_K} = 2\overline{\omega_e} \times \overline{\upsilon_r}. \qquad (2.56)$$

Таким чином, абсолютне прискорення точки в її складному русі дається рівнянням:

$$\overrightarrow{W_a} = \overrightarrow{W_e} + \overrightarrow{W_r} + \overrightarrow{W_K}, \qquad (2.57)$$

що і потрібно було довести.

Виникнення прискорення Коріоліса має своїм джерелом додаткове обертання у випадку, коли переносний рух не є чисто поступальним. Воно характеризує зміну відносної швидкості точки в переносному русі і зміну переносної швидкості точки у відносному русі. Тому коріолісове прискорення іноді називають поворотним.

Модуль коріолісова прискорення визначають за формулою:

$$W_K = 2\omega_e \cdot \upsilon_r \cdot \sin\left(\overline{\omega_e}, \overline{\upsilon_r}\right) \tag{2.58}$$

З рівності (2.57) виходить, що коріолісове прискорення дорівнює нулю в таких випадках:

1. $\omega_e = 0$, тобто переносний рух є поступальним, або миттєво-поступальним;
2. $\overline{\omega_e} \parallel \overline{\upsilon_r}$ ($\sin\left(\overline{\omega_e}, \overline{\upsilon_r}\right) = 0$ або $\sin\left(\overline{\omega_e}, \overline{\upsilon_r}\right) = 180^0$);
3. $\overline{\upsilon_r} = 0$.

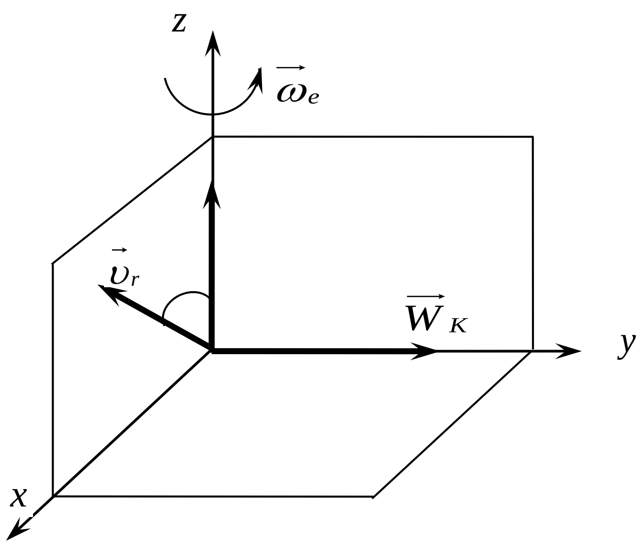


Рис.2.29. а

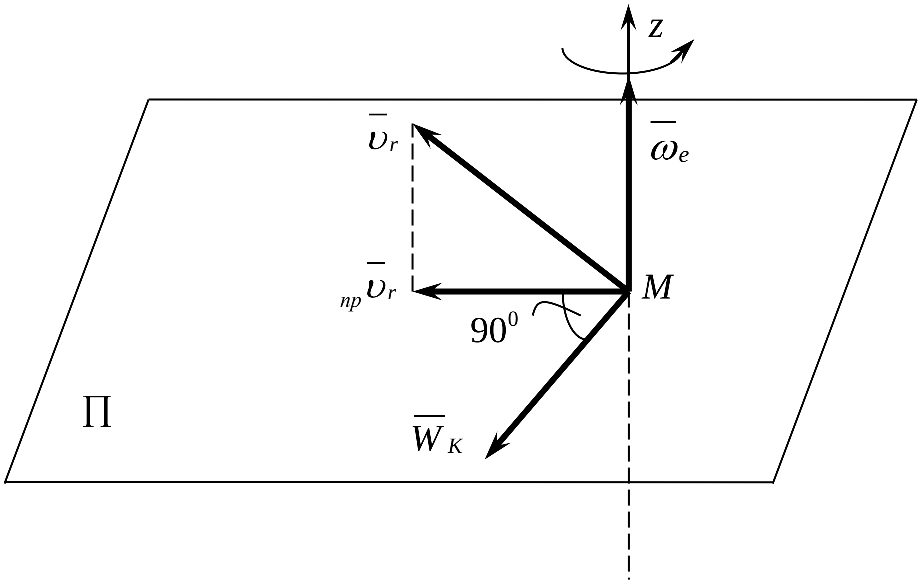


Рис.2.29. б

Напрям коріолісова прискорення визначається за загальним правилом векторного множення: вектор $\overrightarrow{W_K}$ напрямлений перпендикулярно до площини, в якій лежать вектори $\vec{\omega}_e$ і $\vec{\upsilon}_r$, в той бік, звідкіля найкоротше суміщення $\vec{\omega}_e$ з $\vec{\upsilon}_r$ можна бачити як таке, що відбувається проти руху годинникової стрілки (рис.2.29.а).

Часто для визначення напряму коріолісова прискорення зручно використовувати правило Жуковського, згідно з яким потрібно спроектувати вектор відносної швидкості $\vec{\upsilon}_r$ точки на площину, перпендикулярну до осі переносного обертання (тобто перпендикулярну до вектора $\vec{\omega}_e$), і отриману проекцію $\vec{\upsilon}_r$ повернути на кут 90^0 у цій же площині в бік переносного обертання (рис. 2.29.б).

В самому загальному випадку, коли абсолютний, переносний і відносний рухи точки є криволінійними, абсолютне, переносне і відносне прискорення її доцільно подати у вигляді сум нормальних і дотичних складових. Тоді рівняння (2.57) набуває вигляду:

$$\overrightarrow{W_a}^n + \overrightarrow{W_a}^\tau = \overrightarrow{W_e}^n + \overrightarrow{W_e}^\tau + \overrightarrow{W_r}^n + \overrightarrow{W_r}^\tau + \overrightarrow{W_K}, \tag{2.59}$$

При розв’язанні практичних задач кінематики складного руху точки потрібно векторні рівняння (2.57) або (2.59) замінити алгебраїчними, використовуючи метод проекцій.

В прямокутній системі координат *Oxyz* у відповідності до рівняння (2.57) отримаємо:

$$\left.\begin{aligned} W_{ax} &= W_{ex} + W_{rx} + W_{Kx}; \\ W_{ay} &= W_{ey} + W_{ry} + W_{Ky}; \\ W_{az} &= W_{ez} + W_{rz} + W_{Kz}, \end{aligned}\right\} \qquad (2.60)$$

і відповідно з рівнянням (2.59):

$$\left.\begin{aligned} W_{ax}{}^{n} + W_{ax}{}^{\tau} &= W_{ex}{}^{n} + W_{ex}{}^{\tau} + W_{rx}{}^{n} + W_{rx}{}^{\tau} + W_{Kx}; \\ W_{ay}{}^{n} + W_{ay}{}^{\tau} &= W_{ey}{}^{n} + W_{ey}{}^{\tau} + W_{ry}{}^{n} + W_{ry}{}^{\tau} + W_{Ky}; \\ W_{az}{}^{n} + W_{az}{}^{\tau} &= W_{ez}{}^{n} + W_{ez}{}^{\tau} + W_{rz}{}^{n} + W_{rz}{}^{\tau} + W_{Kz}. \end{aligned}\right\}. \qquad (2.61)$$

З наведених алгебраїчних систем рівнянь (2.60) і (2.61) визначають потрібні невідомі.

Питання для самоконтролю

1. Дайте визначення відносного, переносного і абсолютного рухів, а також відповідних швидкостей і прискорень цих рухів.
2. Якою математичною залежністю пов’язані між собою абсолютна, відносна і переносна швидкості?
3. За якою формулою визначається модуль абсолютної швидкості точки при відомих величинах відносної і переносної швидкостей?
4. Як визначається модуль відносної (переносної) швидкості точки при відомих значеннях абсолютної і переносної (відносної) швидкостей?
5. За якою загальною формулою визначається вектор абсолютного прискорення?
6. Які причини появи коріолісова прискорення; як визначити величину і напрям коріолісова прискорення?
7. При яких умовах коріолісове прискорення точки відсутнє?

8. Точка рівномірно рухається вздовж радіуса диска, який, в свою чергу, рівномірно обертається навколо осі, що проходить через центр диска перпендикулярно до його площини. Запишіть в загальному вигляді формулу, за якою визначається модуль коріолісова прискорення. Як залежить величина прискорення Коріоліса від положення точки на диску?
9. Точка рухається по ободу диска, що обертається навколо нерухомої осі, яка проходить через його центр перпендикулярно до площини диска. Чи може одна із складових абсолютного прискорення точки бути напрямленою по радіусу від центра диска? Якщо так, то при яких умовах?
10. Визначити величину і напрям абсолютного прискорення точки, що рухається зі сталою швидкістю υ вздовж твірної циліндра радіуса R, який рівномірно обертається навколо своєї центральної осі з кутовою швидкістю ω.

2.4.2. Додавання рухів твердого тіла

В багатьох питаннях техніки доводиться зустрічатися з випадками, коли тверде тіло бере участь в кількох рухах. По аналогії із складним рухом точки під складним рухом тіла будемо розуміти рух, який одночасно здійснюється в основній (нерухомій) системі відліку і в системі відліку, що рухається відносно основної системи.

2.4.2.1. Додавання двох поступальних рухів

Якщо відносний і переносний рухи тіла поступальні, то абсолютний рух тіла є також поступальним. Швидкість цього руху

$$\overline{\upsilon_a} = \overline{\upsilon_r} + \overline{\upsilon_e}\,.$$

Приклад: рух ножа косарки.

2.4.2.2. Додавання обертального руху, який відбувається перпендикулярно до осі обертання, з поступальним

У цьому випадку рух тіла буде плоскопаралельним, тобто еквівалентний абсолютний рух є обертальним відносно миттєвої осі обертання, що проходить через МЦШ, з кутовою швидкістю, яка дорівнює кутовій швидкості відносного обертання.

2.4.2.3. Додавання обертань навколо осей, що перетинаються

Розглянемо тверде тіло, яке рухається так, що деяка його вісь Oz обертається з кутовою швидкістю $\overline{\omega_1}$ відносно нерухомої у просторі осі Oz^*, а саме тіло, до того ж обертається навколо рухомої осі Oz з кутовою швидкістю $\overline{\omega_2}$ (рис.2.30).

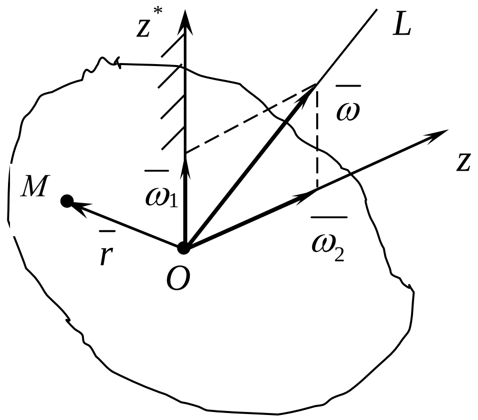


Рис.2.30

Точка O перетину осей Oz^* і Oz при такому русі залишається нерухомою. Будемо вважати переносним рухом обертання тіла разом з віссю Oz навколо осі Oz^*, тоді відносний рух – це власне обертання тіла відносно осі Oz. Тобто $\overline{\omega_1} = \overline{\omega}_e$, $\overline{\omega}_2 = \overline{\omega}_r$.

Абсолютна лінійна швидкість певної точки M тіла відповідно до теореми додавання швидкостей (з урахуванням формули Ейлера) буде дорівнювати:

$$\overline{\upsilon}_a = \overline{\upsilon}_e + \overline{\upsilon}_r = \overline{\omega}_e \times \overline{r} + \overline{\omega}_r \times \overline{r} = \left(\overline{\omega}_e + \overline{\omega}_r\right) \times \overline{r},$$

де $\bar{r}$ - радіус-вектор точки M відносно нерухомого центра O.

З другого боку можна записати, що

$$\bar{\upsilon}_a = \bar{\omega}_a \times \bar{r}.$$

З порівняння двох виразів визначення абсолютної швидкості $\bar{\upsilon}_a$ виходить, що кутова швидкість результуючого (абсолютного) руху

$$\overline{\omega_a} = \bar{\omega}_e + \overline{\omega_r}. \tag{2.62}$$

Отже:

сукупність двох обертань тіла відносно певних осей, які перетинаються, зводиться до результуючого (абсолютного) обертання з кутовою швидкістю, що дорівнює геометричній сумі кутових швидкостей переносного і відносного рухів.

Цей висновок справедливий і в разі додавання обертань відносно паралельний осей.

2.4.2.4. Додавання двох обертальних рухів навколо паралельних осей

Розглянемо три випадки, що зустрічаються при додаванні обертань твердого тіла навколо паралельних осей.

1. Тіло А (рис.2.31 *а*).в переносному і відносному рухах обертається навколо паралельних осей у тому самому напрямі. Оскільки $\vec{\omega}_e \square \vec{\omega}_r$, то вектроне рівняння (2.62) може бути змінено алгебраїчним рівнянням, яке з урахуванням напрямів обертань має вигляд:

$$\omega_a = \omega_e + \omega_r. \tag{2.63}$$

Положення миттєвої осі обертання тіла *A* визначиться положенням його абсолютного МЦШ P, що лежить на прямій P_eP_r, яка з’єднує миттєві центри швидкостей тіла в його переносному (P_e) і відносному (P_r) рухах і ділить її на відрізки, обернено пропорційні кутовим швидкостям ω_e переносного і ω_r відносного обертань. Тобто,

$$\frac{P_eP}{PP_r} = \frac{\omega_r}{\omega_e}. \tag{2.64}$$

Дійсно, $\upsilon_{Pa} = \upsilon_{Pe} - \upsilon_{P2} = 0$ звідкіля $\omega_e P_e P = \omega_r P_r P$.

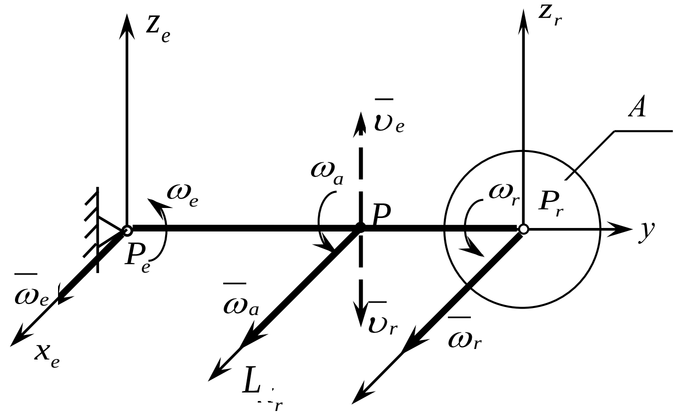


Рис.2.31 а

2. Обертання тіла *A* в переносному і відносному рухах відбувається в протилежних напрямах, причому $\omega_e \neq \omega_r$ (рис.2.31б).

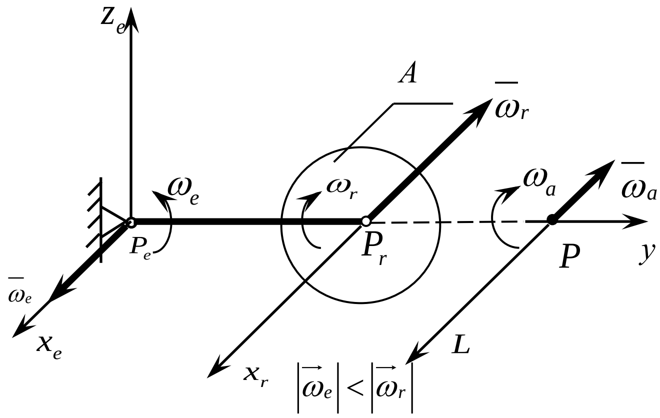


Рис.2.31 б

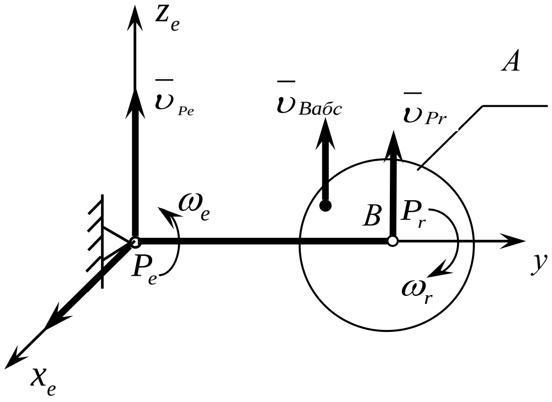


Рис.2.31 в

Модуль абсолютної кутової швидкості визначається рівнянням

$$\omega_a = \omega_e - \omega_r .$$

З цього виходить, що абсолютний рух тіла буде обертанням навколо миттєвої осі, паралельній даним, в напрямі того складового руху, якому відповідає більша за модулем кутова швидкість.

Абсолютний МЦШ *P* знаходиться на продовженні прямої $P_e P_r$ за віссю з більшою кутовою швидкістю. Його положення на вказаній прямій також визначається зі співвідношення (2.64).

3. Обертання тіла навколо паралельних осей в протилежних напрямах, причому $\overline{\omega}_R = -\overline{\omega}_e$ (рис.2.31 *в*).

Тоді рівняння (2.63) набуває вигляду:

$$\omega_a = \omega_e - \omega_R = 0 ,$$

і абсолютний рух тіла буде поступальним або миттєво-поступальним.

Дійсно, лінійна швидкість точки P_e $\upsilon_{Pe} = \omega_r \cdot P_e P_r$, а точки P_r - $\upsilon_{\Pr} = \omega_e \cdot P_e P_r$. Оскільки $\omega_e = \omega_r$, то ці швидкості рівні за величиною і напрямлені в один бік (рис.2.31 *в*), тобто $\overline{\upsilon}_{Pe} = \overline{\upsilon}_{Pr}$.

Для будь-якої точки *B* тіла, що знаходиться на довільній відстані h від осі z_e, будемо мати:

$$\upsilon_{Be} = \omega_e \cdot h , \qquad \upsilon_{Br} = \omega_r (P_e P_r - h) \quad \text{і}$$

$$\upsilon_{Ba\delta c} = \omega_e h + \omega_r (P_e P_r - h) = \omega_r \cdot P_e P_r .$$

Таким чином, величину абсолютної швидкості окремих точок тіла можна визначити за формулою:

$$\upsilon_a = \omega_r \cdot P_e P_r = \omega_e \cdot P_e P_r . \tag{2.65}$$

Сукупність обертань з кутовими швидкостями $\overline{\omega}_r = -\overline{\omega}_e$ називають парою обертань або парою кутових швидкостей по аналогії з парою сил.

Прикладом пари обертань є рух педалі велосипедного колеса по відношенню до рами велосипеда: за один оберт кривошипа педаль також здійснює повний оберт навколо своєї осі, але в протилежному напрямі.

ЛІТЕРАТУРА

1. М.А.Павловський. Теоретична механіка. Київ, 2002
2. М.Б.Яскілка. Збірник завдань для розрахунково-графічних робіт з теоретичної механіки. Київ, Вищ.шк., 1999
3. Глонь О. А. Основи теоретичної механіки / О. А. Глонь. – К., 1997.
4. Подлєсний, С.В. Розв’язання задач з теоретичної механіки. Статика/ С.В.Подлєсний та ін. – Краматорськ: ДДМА, 2004. – 200 с. – ISBN 5-7763-13-02-3
5. Подлєсний, С.В. Розв’язання задач з теоретичної механіки. Кінематика/ С.В.Подлєсний та ін. – Краматорськ: ДДМА, 2006. – 200 с. – ISBN 966-379-096-2
6. Водолазська, О.Г. Збірник завдань для самостійної роботи та контролю знань студентів з теоретичної механіки. Кінематика і статика/ О.Г.Водолазська та ін. – Краматорськ: ДДМА, 2004 –Ч.1.– 128с. – ISBN 966-7851-29-Х
7. Шпачук В. П. Теоретична механіка: навчально-методичний посібник для студентів технічних спеціальностей / В. П. Шпачук, М. С. Золотов, О. І. Рубаненко, А. О. Гарбуз. – Харків : ХДАМГ, 2007