

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
СХІДНОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
імені Володимира Даля

**КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ**  
з дисципліни  
**"Будівельна механіка" ч.1**

*(для здобувачів вищої освіти спеціальності 192  
«Будівництво та цивільна інженерія»)  
(Електронне видання)*

**ЗАТВЕРДЖЕНО**  
на засіданні кафедри будівництва,  
урбаністики та просторового планування  
Протокол № 1 від 27.08.2024 р.

Київ 2024

УДК 539.3

Конспект лекцій з дисципліни "Будівельна механіка(для здобувачів вищої освіти спеціальності 192 «Будівництво та цивільна інженерія») (Електронне видання)/ Уклад.: Медвідь І.І. – Київ : вид-во СНУ ім. В. Даля, 2024. – 31с

В методичних вказівках розглядається структурний та кінематичний аналіз стержневих систем. Розрахунок статично визначних стержневих систем. Визначення реакцій у в'язях. Внутрішні сили. Визначення внутрішніх сил методом перерізів.

Статично визначні плоскі ферми. Основні поняття. Аналітичні методи визначення зусиль в елементах ферм. Графічний метод розрахунку плоских ферм.

Статично визначні рами. Основні поняття. Побудова епюр внутрішніх сил. Особливості розрахунку тришарнірних рам, рам з замкнутим контуром.

.

Укладач: І.І.Медвідь – доцент.

Рецензент: Н.І. Білошицька – доцент.

## ЗМІСТ

<b>1. КІНЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ СТРУКТУРИ СПОРУД .....</b>	<b>4</b>
1.1 Приклади рішення задач .....	9
1.2 Завдання для самостійної роботи .....	11
1.3 Питання до самоконтролю знань .....	12
<b>2. МЕТОДИ ВИЗНАЧЕННЯ ЗУСИЛЬ ВІД НЕРУХОМОГО НАВАНТАЖЕННЯ .....</b>	<b>12</b>
<b>3. БАГАТОПРОЛЪОТНІ СТАТИЧНО ВИЗНАЧНІ БАЛКИ .....</b>	<b>16</b>
3.1 Утворення багатопрольотних статично визначних балок .....	16
3.2 Розрахунок шарнірно-консольної балки .....	18
3.3 Завдання для самостійної роботи .....	19
3.4 Питання до самоконтролю знань .....	19
<b>4. ТРИШАРНІРНІ АРКИ .....</b>	<b>19</b>
4.1 Загальні означення .....	19
4.2 Розрахунок тришарнірних арок на нерухоме вертикальне навантаження .....	20
4.3 Особливості розрахунку тришарнірних арок із затяжками .....	23
4.4 Приклади рішення задач приклади рішення задач .....	25
4.5 Питання до самоконтролю знань .....	28
<b>ЛІТЕРАТУРА .....</b>	<b>30</b>

## 1. КІНЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ СТРУКТУРИ СПОРУД

Споруда може сприймати навантаження тільки в тому випадку, коли вона постійно зберігає геометричну форму і положення, які задані їй при зведенні. Змінні системи не в змозі зрівноважити зовнішні сили і під дією прикладених навантажень приходять в рух, міняють свою форму. Природно, що такі системи не можна використовувати в якості споруд.

За допомогою кінематичного аналізу визначається до яких систем змінних чи незмінних відноситься та чи інша споруда. Кінематичний аналіз стосовно споруди можна виконати усвідомивши роль в її роботі окремих елементів, з яких вона зведена.

**Ступенем вільності** довільного тіла або системи тіл називається кількість геометричних параметрів, які можуть змінюватись в часі незалежно один від другого. Тут приймаються до уваги параметри, які визначають положення тіла (системи тіл) на площині чи в просторі.

Положення точки на площині визначається двома параметрами (рис. 1.1.а), тобто ступінь вільності точки на площині дорівнює двом. Щоб визначити положення відрізка на площині, потрібно знати три незалежних параметри (рис. 1.1.б). Якщо на довільній плоскій фігурі провести відрізок, (рис. 1.1.в) то стає очевидним, що і для визначення положення плоскої фігури на площині потрібно знати три незалежних параметри; з цього випливає, що ступінь вільності плоскої фігури на площині дорівнює трьом. Ступінь вільності можна обмежити різними пристроями (в'язями), які зменшують кількість незалежних параметрів руху тіла чи системи тіл.

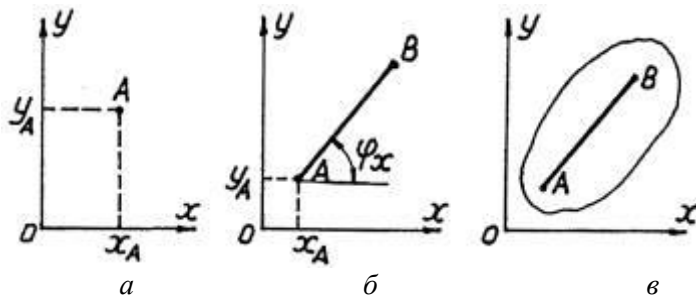


Рис. 1.1 Ступеня свободи на площині:  
а-матеріальна точка; б-стержень; в-тіло

Пристрій, який зменшує ступінь вільності на одиницю, еквівалентний одній кінематичній в'язі. Таким пристроєм є вже розглянута нами шарнірно-рухома опора. Рухомий шарнір еквівалентний одній кінематичній в'язі, тому що не перешкоджає ні взаємному повороту елементів, ні просторовому їх переміщенню.

Нерухомий опорний шарнір накладає на тіло дві в'язі, чим і пояснюється символічне зображення двома опорними стержнями шарнірно-нерухої опори. Шарнір, який з'єднує два плоских тіла, наприклад два стержні, характеризується як пристрій з двома кінематичними в'язями. Для наочного тлумачення сказаного вище стержні 1 і 2 (рис. 1.2.а) з'єднують шарніром С (рис. 1.2.б). Якщо для визначення положення першої системи (а) потрібно знати шість незалежних геометричних параметрів (по три на кожний стержень), то для другої – чотири. При відомому розташуванні в системі  $XOY$  першого стержня – положення другого в довільний момент часу визначається кутом  $\varphi$ . Ступінь вільності за рахунок шарнірного з'єднання двох стержнів зменшилась з шести до чотирьох.

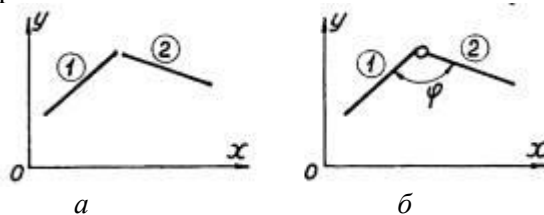


Рис. 1.2 Вплив шарніра:  
а-окремі стержні; б-стержні, з'єднані шарніром

Стержнева система - це сукупність певного числа елементів - стержнів (дисків), з'єднаних між собою відповідним чином в'язями.

Ступінь вільності системи, складеної з дисків, з'єднаних між собою шарнірами, визначається наступним чином. Якщо число дисків позначити  $D$ , а ступінь вільності кожного диска дорівнює трьом, то розміщені на площині диски будуть мати ступінь вільності рівний  $3D$ .

Враховуючи, що кожен простий шарнір, число яких позначимо  $Ш$ , зменшує ступінь вільності на два, а кожен опорний стержень (опорна в'язь, число яких позначимо  $C_0$ ) - на одиницю, то загальна ступінь вільності ( $W$ ) стержневої системи визначиться за формулою:

$$W = 3D - 2Ш - C_0. \quad (1.1)$$

Можливі три якісно різні результати:

$W > 0$  - система змінна, має рух;

$W = 0$  - система має необхідний мінімум в'язей, достатній для забезпечення незмінності і нерухомості;

$W < 0$  - система незмінна, число в'язей перевищує необхідний мінімум. Позначимо число зайвих в'язей  $n$ . Очевидно, що  $n = -W$ , тоді

$$n = C_0 + 2Ш - 3D. \quad (1.2)$$

Для правильного застосування формул (1.1, 1.2) потрібно розрізняти **шарніри прості** - з'єднують два диски, і **кратні** - з'єднують більше двох дисків. Шарнір, з'єднуючий більше двох дисків, обмежує переміщення всіх з'єднаних дисків. Такий шарнір одночасно виконує роль двох в'язей між кожною парою дисків. Кратність визначається числом з'єднаних в шарнірі дисків (стержнів) зменшеним на одиницю.

На рис. 1.3 зображена система зв'язаних шарнірами дисків. Кратність кожного з'єднувального шарніра вказано відповідним підписом ( $Ш = \dots$ ).

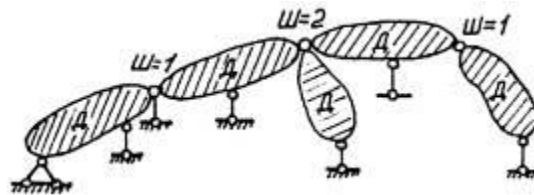


Рис. 1.3 Кратність шарнірного з'єднання

Шарнірне з'єднання диска і опорних стержнів формулами (1.1, 1.2) не враховується.

Умова геометричної незмінності і нерухомості

$$n = -W \geq 0,$$

звідки

$$3D - 2Ш - C_0 \leq 0. \quad (1.3)$$

Ступінь вільності системи складається з ступеня змінності власне системи і ступеня рухомості її відносно основи.

Система, не закріплена до основи, має три ступені рухомості відносно основи.

В задачі 1.  $W = 4$ , тому що до трьох геометричних параметрів, які визначатимуть положення одного з стержнів системи відносно основи, додається параметр її форми - кут між двома суміжними стержнями.

Позначивши змінність системи, від'єднаної від своїх опор, через  $V$ , можна записати:  $V = W - 3$ , звідки, підставляючи вираз  $W$  (при  $C_0 = 0$ ), отримаємо:

$$W = 3D - 2Ш - 3. \quad (1.4)$$

Умова геометричної незмінності системи, від'єднаної від опор, визначається по формулі

$$3Д - 2Ш \leq 3. \quad (1.5)$$

Наведені вище формули справедливі для всіх типів плоских стержневих систем. Однак вони незручні для їх застосування стосовно шарнірно-стержневих систем (ферм), що спричинено великою кількістю шарнірів і різною їх кратністю. Для визначення ступеня вільності шарнірно-стержневих систем позначимо число вузлів системи через  $B$ , число стержнів -  $C$ , а опорних стержнів - через  $C_0$ . Вузол шарнірно-стержневої системи як геометрична точка має два ступені вільності. Кожен стержень системи, що з'єднує вузли, забирає одну ступінь вільності; це ж можна сказати і про кожен опорний стержень, розглядаючи його як окрему в'язь (рис. 1.4). Тоді

$$W = 2B - C - C_0 \quad (1.6)$$

або

$$n = -W = C + C_0 - 2B. \quad (1.7)$$

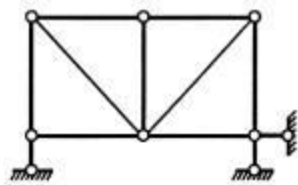


Рис. 1.4 Ферма

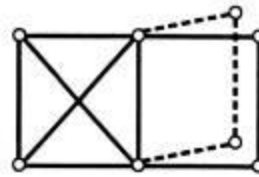


Рис. 1.5 Геометрично змінювана система

З умови геометричної незмінності і нерухомості ( $n = -W \geq 0$ ) маємо

$$2B \leq C + C_0. \quad (1.8)$$

Для системи, відокремленої від своїх опор,  $V = W - 3 = 2B - C - 3$ ; умова геометричної незмінності системи відокремленої від своїх опор, при відсутності зайвих в'язей буде:  $V = 0$ , або  $2B - C = 3$ , звідки

$$C = 2B - 3. \quad (1.9)$$

Аналітична ознака геометричної незмінності  $W \leq 0$ , встановлює залежність між числом дисків і шарнірів (стержнів і вузлів для шарнірно-стержневої системи). Однак необхідно зауважити, що і при виконанні цієї умови в деяких випадках система може характеризуватись як змінна.

Розглянемо систему, зображену на рис. 1.5. Умова 9. виконується, але система змінна (штриховими лініями показано варіант зміни положення стержнів правої частини). Змінність обумовлена неправильним розташуванням стержнів. При цьому ж числі вузлів і стержнів система буде незмінною, якщо один з діагональних елементів лівої частини перемістити в праву (рис. 1.6).

Отже,  $W \leq 0$  необхідна, але недостатня умова геометричної незмінності. Справа в тому, що кінематичні умови виражають тільки кількісну сторону і не розкривають характер взаємного розташування в'язей, яке має суттєве значення для забезпечення геометричної незмінності і нерухомості.

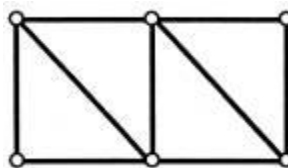


Рис. 1.6 Геометрично незмінна система

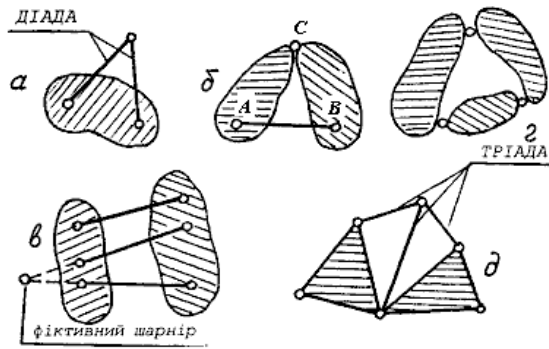


Рис. 1.7 Способи з'єднання дисків:  
 а- діада; б-шарнір і стержень; в- три шарніра; г-три стержені; д- триада

Висновок про незмінність і нерухомість системи можна зробити тільки на основі відповідного аналізу її геометричної структури, для чого потрібно знати принципи утворення геометрично (структурно) незмінних систем. Перерахуємо основні з них.

1. Приєднання до незмінної системи двох стержневої ланки (діади) не змінює ступінь вільності системи (рис. 1.7.а).
2. Два диски можуть бути з'єднані жорстко за допомогою шарніра  $C$  і стержня  $AB$ , вісь якого не проходить через центр шарніра (рис. 1.7.б).
3. Два диски можуть бути з'єднані жорстко трьома стержнями при умові, що вони не перетинаються в одній точці і не будуть паралельними між собою (рис. 1.7.в). Цей принцип може бути зведений до попереднього, так як два стержні завжди можуть бути замінені фіктивним шарніром, розташованими в точці перетину цих стержнів.
4. Три диски можна з'єднати жорстко за допомогою трьох шарнірів при умові, що вони не лежать на одній прямій (рис. 1.7.г).
5. Приєднання до геометричне незмінної системи з одним ступенем вільності три стержневої ланки (тріади), як показано на рис. 1.7.д, еквівалентно накладанню однієї в'язі. В результаті одержуємо структурно незмінну систему.

Всі перераховані принципи можуть бути зведені до одного **шарнірно-стержневого трикутника** - фігури структурно, тобто геометрично незмінної (рис. 1.7.а).

**Миттєва змінність.** Обмеження, обумовлені в принципах утворення незмінних систем, мають певне підґрунтя. Якщо в структурно незмінній системі змінювати довжину стержнів або кут нахилу стержневих елементів в'язей, то можна одержати систему, яка має властивість деякої структурної змінності - миттєвої змінності.

Миттєво змінні системи, як і змінні, не можна використовувати в якості інженерних споруд. Також слід уникати систем, близьких до миттєво змінних. Тому кінематичний аналіз повинен включати перевірку на миттєву змінність.

Для аналізу нескладних систем достатньо знати принцип утворення незмінних систем. Всі винятки з них приводять до миттєво змінних систем.

Розглянемо, наприклад, варіації простої балки, опертої на три опорних стержня. Ця система буде нерухомою і незмінною до тих пір, поки вісь правого опорного стержня не проходить через центр шарніра  $A$  (рис. 1.8.а). Якщо ж цей опорний стержень повернути в горизонтальне положення (рис. 1.8.б), система стане змінною на деяку мить, поки вузол  $B$  не переміститься на нескінченно малу величину по загальній дотичній до дуг 1 і 2. Як тільки це переміщення виконається, три шарніри  $A, B, C$  перестануть знаходитись на одній прямій і система стане незмінною.

Статична ознака миттєвої змінності системи полягає в тому, що в елементах миттєво змінних систем при дії навантажень і навіть без них можуть виникати нескінченно великі зусилля або зусилля невизначеної величини, що можна бачити на прикладі цієї ж балки. Опорна реакція в стержні  $BC$  визначається з рівняння рівноваги  $\sum M_A = 0$ ,  $R_{BC} = \frac{M_A^B}{r}$ , де  $M_A^B$  – сумарний момент

зовнішніх сил відносно точки  $A$ ,  $r$  – плече реакції  $R_{BC}$ . При наближенні стержня  $BC$  до горизонтального положення  $r_{BC} \rightarrow 0$ , і на границі (див рис. 1.8.б)  $r = 0$ . Отже  $R_{BC} = \frac{M_A^B}{0} = \infty$ . При відсутності навантаження  $R_{BC} = [0/0]$ , тобто невизначеність.

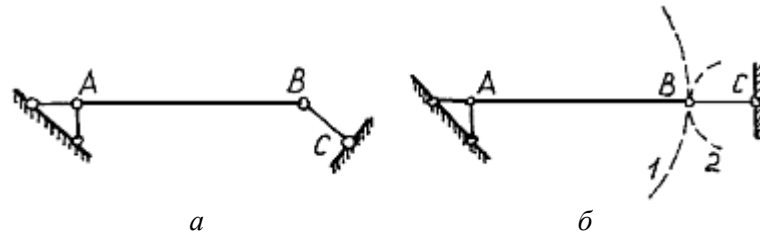


Рис. 1.8 Варіанти розташування шарнірів:  
а- незмінна система; б- миттєво змінна система

На цій ознаці базується статичний спосіб перевірки системи на миттєву змінність, у відповідності з яким визначають зусилля у всіх елементах системи при довільному зовнішньому навантаженні. Якщо вони мають достатньо визначені і скінчені величини, а без навантаження (нульове навантаження) зусилля у всіх елементах дорівнюють нулю і такий нульовий розв'язок є єдиний, то система структурно незмінна.

Розглянемо три стержневих системи, кожна з яких утворена одним диском і трьома опорними стержнями (рис. 1.9,а,б,в). В кожному з трьох випадків маємо геометричне незмінну систему. Для першої системи отримаємо  $W = 0$ ,  $n = 0$ . Для другої системи отримаємо  $W = -2$ ,  $n = 2$ , але в цьому випадку маємо з'єднання шарніром кінців одного і того ж диска, а не двох різних дисків. В третьому випадку можна рахувати, що кінці стержня жорстко з'єднані між собою в перерізі  $I-I$ . Очевидно, що друга система жорсткіша першої, а третя - другої.

Тут під жорсткістю розуміється здатність опиратися деформаціям, які виникають під дією зовнішнього навантаження.

Проаналізуємо шлях перетворення першої системи в третю. Щоб перетворити першу систему в другу, потрібно кінці ламаного стержня з'єднати двома в'язями (шарнір еквівалентний двом в'язям). Шарнірне з'єднання кінців стержня можна показати у вигляді двох стержнів, які перетинаються в одній точці (рис. 1.10,а). Якщо кожен з цих стержнів рахувати диском, то отримаємо  $W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 - 3 = -2$ . Жорстке з'єднання кінців стержня можна моделювати трьома стержнями, як показано на (рис. 1.10,б). В цьому випадку  $D = 4$ ,  $III = 6$ ,  $C_0 = 3$ ,  $W = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 6 - 3 = -3$  або  $n = 3$ .

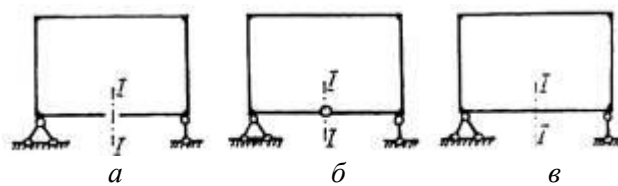


Рис. 1.9 Зміни ступенів свободи:  
а-  $n=0$ ; б-  $n=2$ ; в-  $n=3$

Порівнюючи першу систему з третьою, приходимо до висновку, що замкнутий контур, в порівнянні з розімкнутим, має три зайві в'язі. Це стосується як внутрішніх, так і зовнішніх контурів.

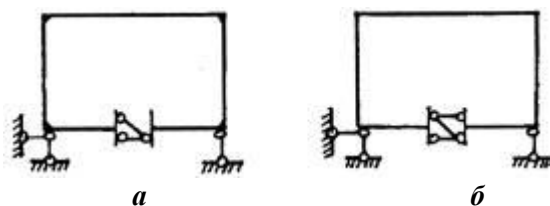


Рис. 1.10 Замкнутий контур:  
а- шарнір; б- жорстке з'єднання

Розглянутий нами замкнутий контур відноситься до внутрішніх. Зовнішні контури утворюються основою і елементами системи (в'язями), з'єднаними основою (землею). Прикладами зовнішніх контурів можуть бути системи, показані на (рис. 1.11,а,б,в).

Якщо загальну кількість замкнутих контурів позначити  $K$  і врахувати, що кожен простий шарнір, введений в замкнутий контур, зменшує число в'язей на одиницю (порівняйте системи на рис. 1.9,а і рис. 1.9,в), то можна отримати формулу для знаходження числа зайвих в'язей стержневої системи:

$$n = 3K - Ш, \quad (1.10)$$

де  $Ш$  - загальна кількість простих шарнірів.

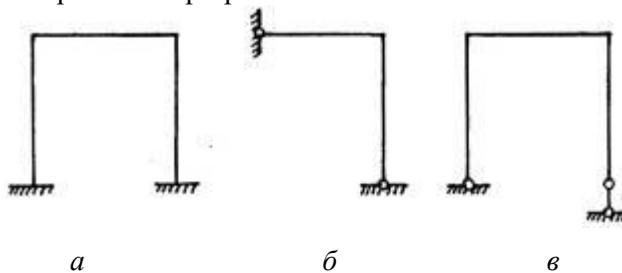


Рис. 1.11 Зовнішній контур:  
а- $n=3$ ; б-  $n=1$ ; в-  $n=0$

Формула (1.10), на погляд автора, є більш прийнятною для проведення структурного аналізу рамних стержневих систем, так як не потребує попереднього розкриття замкнутих контурів, необхідного при використанні формули (1.1), в чому ми переконались, аналізуючи системи, показані на (рис. 1.9,б) і (рис. 1.9,в). З іншої сторони, для геометрично незмінних стержневих систем  $n \geq 0$ . Число зайвих в'язей має геометричний і фізичний зміст, тоді як ступінь вільності є виключно геометричною характеристикою.

### 1.1. Приклади рішення задач

**Приклад 1.** Визначити ступінь вільності системи, зображеної на (рис. 1.12.а).

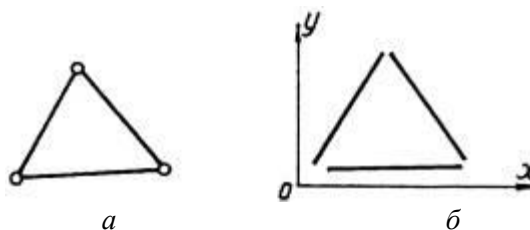


Рис. 1.12 Шарнірний трикутник:  
а- з'єднані диски; б- вільні диски

Якщо умовно роз'єднати шарнірні з'єднання, то для визначення положення трьох стержнів в системі  $XOY$  (рис. 1.12.б) потрібно знати дев'ять геометричних параметрів. Кожен шарнір накладає дві кінематичні в'язі. За рахунок трьох з'єднувальних шарнірів накладено шість кінематичних в'язей.

Ступінь вільності заданої системи дорівнює трьом. З іншої сторони, задана в нашому прикладі система являє собою трикутник, форма якого, як відомо, не може бути змінена без зміни довжин сторін. Цей трикутник можна розглядати як плоске тіло, ступінь вільності якого і дорівнює трьом.

**Приклад 2.** Виконати кінематичний аналіз системи, показаної на (рис. 1.13.а).

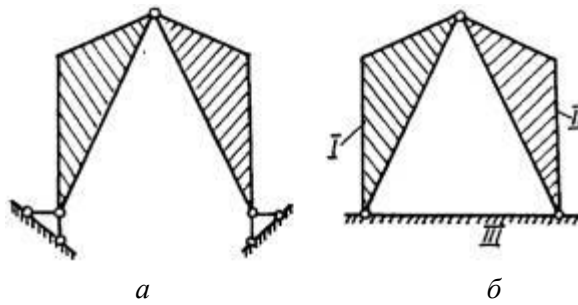


Рис. 1.13 Шарнірний трикутник:  
а,б- різні варіанти зображення одне і того ж з'єднання дисків

За допомогою формули (1.1) визначаємо ступінь вільності системи. Відкинувши всі опорні стержні, знаходимо, що система утворена двома дисками, з'єднаними одним шарніром, тобто  $D = 2$ ,  $III = 1$ . Число опорних стержнів  $C_0 = 4$ , отже,  $W = 3D - 2III - C_0 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 4 = 0$ , тобто система може бути геометрично незмінною і статично визначною. Для аналізу структури системи її опори покажемо у вигляді простих шарнірів, які з'єднують диски 1,2 з третім диском (землею) і, (рис. 1.13.б). Переконаємось, що система відповідає четвертому принципу утворення геометрично незмінних систем - три диски з'єднані між собою трьома шарнірами, які не лежать на одній прямій.

**Приклад 3.** Виконати кінематичний аналіз стержневої системи, показаної на рис. 1.14.

Визначаємо ступінь вільності системи. Число дисків  $D = 4$ , шарнірів  $III = 5$  – по одному у вузлах  $A, C, D$  і два у вузлі  $B$ . Число опорних стержнів  $C_0 = 3$ , отже  $W = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 5 - 3 = -1$ . Система має одну зайву в'язь.

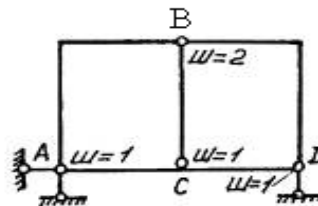


Рис. 1.14 Стержнева система

Розглянемо геометричну структуру системи. Диски  $AB, BD, AD$  з'єднані трьома шарнірами, які не лежать на одній прямій. Стержень  $BC$  є додатковою (зайвою) кінематичною в'яззю. Якщо від'єднати задану систему від опор і за формулою (1.4) визначити ступінь змінності, то одержимо  $W = 3D - 2III - 3 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 5 - 3 = -1$ .

Стержнева система приєднана до землі трьома опорними стержнями, які не перетинаються в одній точці і не паралельні між собою, що відповідає третьому принципу утворення геометрично незмінних систем.

Висновок: система нерухома, геометрично незмінна і статично невизначна, так як має одну в'язь.

Зауважимо, що система має внутрішню статичну невизначеність, тому що кількість опорних стержнів є мінімально необхідною для забезпечення її нерухомості відносно землі.

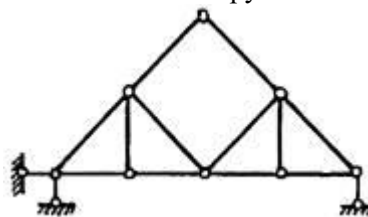


Рис. 1.15 Стержнева система

**Приклад 4.** Дослідити на геометричну змінність шарнірно-стержневу систему, зображену на рис. 1.15.

Враховуючи, що система шарнірно-стержнева, для визначення ступеня вільності використаємо формулу (6). Число вузлів системи  $B = 8$ , число стержнів  $C = 12$ ,  $C_0 = 3$ , отже  $W = 2 \cdot 8 - 12 - 3 = 1$ .

Система має один ступінь вільності, тобто є механізмом і не може бути використана в якості будівельної конструкції.

Причиною геометричної змінності розглянутої системи є невиконання умови (9) при достатній, але мінімально необхідній кількості опорних стержнів, що забезпечують нерухомість системи відносно основи (землі).

Згідно умови (1.9)  $C = 2B - 3 = 2 \cdot 8 - 3 = 13$ , що на один стержень більше ніж маємо в наявності,

Необхідно зауважити, що і при  $V > 0$  стержневі системи разом з основою можуть утворювати геометричне незмінні структури, але у випадках коли виконується умова

$$C_0 \geq V + 3. \quad (1.11)$$

Розглянемо шарнірно-стержневу систему показану на (рис. 1.16). Ця система відрізняється від попередньої наявністю середньої шарнірно-рухомої опори, завдяки чому заштриховані частини (1, 2) утворюють з землею одне ціле - геометричне незмінну систему, до якої приєднана діада (3). В даному випадку

$$V = 1, C_0 = V + 3 = 1 + 3 = 4.$$

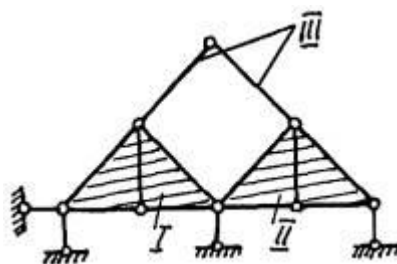


Рис. 1.16 Стержнева система

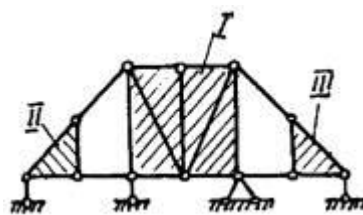


Рис. 1.17 Стержнева система

**Приклад 5.** Дослідити на миттєву змінність шарнірно-стержневу систему, показану на (рис. 1.17).  $B = 12$ ;  $C = 24$ ;  $W = 2 \cdot 12 - 24 = 0$ . Заштриховані частини ферми можна рахувати дисками. Диск I з землею утворюють одне ціле. Диски II, III приєднані до диска I і землі трьома стержнями, які перетинаються в одній точці. Система миттєво змінна. Зауважимо що кінематичний аналіз структури стержневих систем на основі формул (1-5) можна виконувати у випадках відсутності стержнів – елементів замкнутої форми. При наявності останній зв'язок  $n = -W$  губить свій зміст.

## 1.2. Завдання для самостійної роботи

**Задача 1.** Визначити ступінь вільності системи, утвореної чотирма стержнями, зв'язаними шарнірними з'єднаннями в прямокутник (рис. 1.18.а).

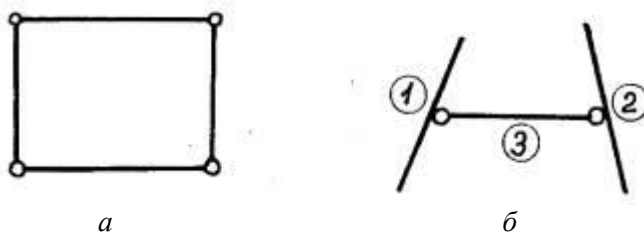


Рис. 1.18 Стержнева система:  
а, б – приклади з'єднання дисків

Щоб розв'язати цю задачу, достатньо уважно прослідкувати за міркуваннями в прикладі 1.

Про властивість шарнірно-рухомої опори накладати одну кінематичну в'язь, вже було сказано. Якщо два плоских тіла (два стержні) з'єднати стержнем, на кінцях якого ідеальні шарніри (рис. 1.18.б), то і в цьому випадку буде накладено одну кінематичну в'язь. На рис. 1.18.б з'єднувальний стержень під номером три. Довести цю властивість пропонується самостійно.

**Задача 2.** Виконати кінематичний аналіз стержневої системи, показаної на рис. 1.19.

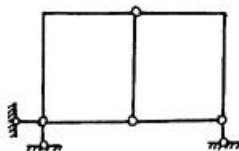


Рис. 1.19 Стержнева система

**Задача 3.** Виконати кінематичний аналіз стержневої системи, зображеної на рис. 1.20.



Рис. 1.20 Стержнева система

### 1.3. Питання до самоконтролю знань

1. Що називають ступенем вільності споруди ?
2. Які системи називаються геометрично незмінними ?
3. Як геометрична незмінність споруди пов'язана з ступенем вільності ?
4. Які статичні ознаки миттєвої змінності споруди ?
5. Чому миттєво змінні системи не застосовуються в спорудах ?

## 2. МЕТОДИ ВИЗНАЧЕННЯ ЗУСИЛЬ ВІД НЕРУХОМОГО НАВАНТАЖЕННЯ.

В загальному випадку в поперечному перерізі стержня при дії навантаження виникають нормальні і дотичні напруження. Рівнодіючу цих напружень у випадку плоского напруженого стану замінюють двома зосередженими силами -  $N$  і  $Q$  і зосередженим моментом  $M$  (рис. 2.1,а). Ці сили і момент називаються внутрішніми зусиллями, а величини  $N$  - поздовжньою,  $Q$  - поперечною силами,  $M$  - згинальним моментом. Внутрішні зусилля в перерізі стержня можуть бути виражені через задане навантаження. Тоді за допомогою формул опору матеріалів легко отримати величину напруження в довільній точці поперечного перерізу. В зв'язку з цим визначення внутрішніх зусиль є однією з основних задач при розрахунку стержневих систем.

В будівельній механіці для визначення зусиль в статично визначних стержневих системах найбільше розповсюдження отримав метод перерізів. Суть цього методу полягає в тому, що після визначення опорних реакцій систему в думці розрізають на дві частини, одну з яких (довільну) відкидають, а її дію на залишену частину замінюють невідомими внутрішніми зусиллями. Розглядаючи рівновагу залишеної частини, знаходимо внутрішні зусилля. Якщо в переріз попадає тільки один елемент, то всі зусилля можуть бути визначені по відомих правилах опору матеріалів.

Так, згинальний момент дорівнює сумі моментів сил, діючих на залишену частину, відносно центра ваги перерізу, поперечна сила - сумі проєкцій цих же сил на нормаль до осі стержня, а поздовжня сила - сумі проєкцій цих же сил на дотичну до осі стержня.

Суми розглядаються алгебраїчні з врахуванням правила знаків, приведеного на (рис. 2.1,б).

В більш складних випадках, коли в переріз попадає не один, а декілька стержнів, записується система рівнянь рівноваги відрізаної частини:

$$\Sigma M = 0, \Sigma X = 0, \Sigma Y = 0. \quad (2.1)$$

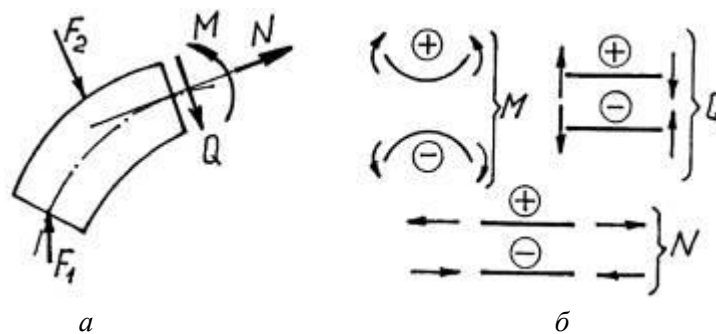


Рис. 2.1 Визначення зусиль в статично визначних стержневих системах:  
а - внутрішні силові фактори; б - правило знаків

Переріз вибирається так, щоб в нього попало не більше трьох невідомих зусиль. В цьому випадку всі вони можуть бути визначеними на основі системи рівнянь (2.1).

Для того, щоб запобігти необхідності спільного розв'язування рівнянь при визначенні зусиль, розроблені спеціальні способи складання рівнянь рівноваги: моментної точки, проєкцій і вирізання вузлів.

Спосіб моментної точки застосовують тоді, коли лінії дії всіх зусиль, діючих в перерізі, крім шуканого, перетинаються в одній точці - т. т. Ця точка називається моментною. Тоді в рівняння суми моментів ( $\Sigma M_m = 0$ ) всіх сил, діючих на відрізану частину, входить тільки одне шукане невідоме зусилля.

Спосіб проєкцій застосовують в тому випадку, коли можна вибрати таку вісь Z, на яку проєктуються в нуль всі зусилля в перерізі, крім шуканого. Тоді умова  $\Sigma Z = 0$  дає рівняння для визначення цього зусилля. Для застосування способу проєкцій всі зусилля, крім шуканого, повинні бути паралельні між собою, тоді вісь Z, приймається перпендикулярною до паралельних зусиль.

В окремому випадку в перерізі можуть діяти сили, лінії дії яких перетинаються в одній точці. Як відомо, для такої системи сил можна скласти тільки дві умови рівноваги

$$\Sigma Z_1 = 0, \Sigma Z_2 = 0, \quad (2.2)$$

тому число невідомих зусиль в такому перерізі не повинно перевищувати двох. Якщо осі  $Z_1$  і  $Z_2$  взяти довільними, то в загальному випадку невідомі зусилля будуть знайдені з розв'язку системи рівнянь (2.2).

Більш прийнятним є підхід, коли осі  $Z_1$  і  $Z_2$  направляти перпендикулярно до невідомих зусиль. Тоді кожне рівняння буде містити одне невідоме зусилля. Описаний випадок розташування зусиль

зустрічається при вирізання вузлів, тому цей варіант в способі проєкцій називають способом вирізання вузлів.

Наприклад, в фермі, зображеній на рис. 2.2.а, для визначення зусилля  $N_{5-4}$  застосуємо метод вирізання вузлів, для чого проведемо переріз. Вісь вибираємо так, щоб вона була перпендикулярною до лінії дії зусилля. Спроєктуємо на неї всі сили:

$$\sum Z_1 = F \cdot \cos \alpha + N_{5-4} \cdot \cos(90^\circ - \alpha - \beta) = 0.$$

Як бачимо, в складене рівняння рівноваги входить тільки одна невідома величина  $N_{5-4}$ . Для визначення зусилля  $N_{5-4}$  потрібно провести вісь перпендикулярно до лінії дії  $N_{5-4}$ . При довільному напрямку осей для визначення зусиль потрібно було б розв'язувати систему двох рівнянь.

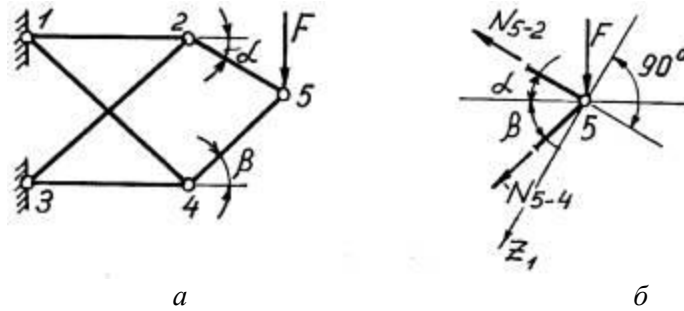


Рис. 2.2 Визначення зусиль:  
а – ферма; б - вузол ферми

Можливість визначення внутрішніх зусиль в перерізах елементів а також реакцій в накладених в'язях з умов рівноваги статички обумовлює належність стержневої системи до статично визначних систем. Застосування згаданих способів визначення внутрішніх зусиль методом перерізів стосовно конкретних стержневих систем ми будемо розглядати в процесі їх вивчення.

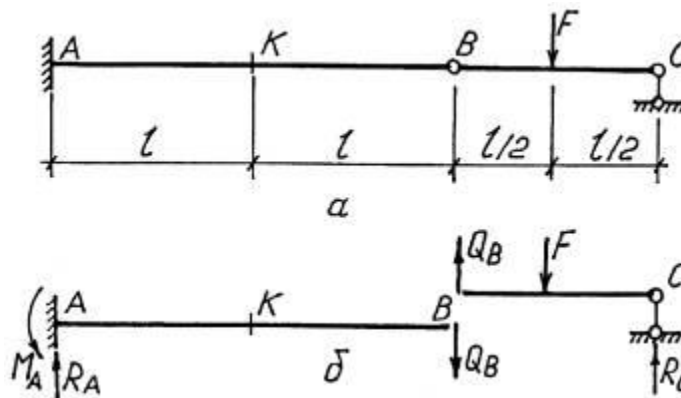


Рис. 2.3 Визначення зусиль:  
а - шарнірно-консольна балка; б - елементи балки

В деяких випадках для спрощення обчислень зручно розтинати систему на частини і попередньо визначити внутрішні зусилля в місцях розтинів. Такий розтин звичайно виконують по шарнірах з метою зменшення числа зусиль на кінцях частин системи (згинаючий момент в шарнірі відсутній).

Наприклад, в шарнірно-консольній балці, показаній на (рис. 2.3.а), розтин на окремі елементи по шарніру (рис. 2.3.б) дає можливість при визначенні зусиль розглядати не всю балку, а її складові частини, що значно спрощує розрахунок (слід врахувати, що поздовжні сили у всіх перерізах балки - нульові).

Дійсно, для визначення зусиль в перерізі  $K$  попередньо знайдемо діючу в елементі  $BC$  поперечну силу  $Q_B$ . З урахуванням симетрії навантаження елемента отримаємо  $Q_B = R_C = \frac{F}{2}$ .

Тепер легко визначити зусилля в перерізі  $K$ :

$$M_K = -Q_B l = -\frac{F \cdot l}{2}; \quad Q_K = Q_B = \frac{F}{2}.$$

Третій приклад - рама (рис. 2.4,а).

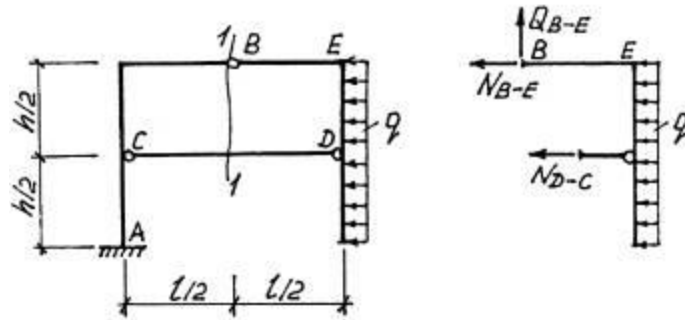


Рис. 2.4 Визначення зусиль:  
а - рама; б - відтята частина

Для визначення зусилля в стержні  $CD$  проведемо переріз  $I-I$ . Розглядаючи праву частину рами, знайдемо суму моментів сил відносно т.  $B$ , через яку проходять лінії дії решти невідомих зусиль  $N_B$  і  $N_A$ :

$$\sum M_B = N_{D-C} \cdot \frac{h}{2} + q \cdot h \cdot \frac{h}{2} = 0,$$

звідки

$$N_{D-C} = -q \cdot h.$$

При розрахунку систем, в яких виникає згин (рам, балок та ін.) будують епюри внутрішніх зусиль. Епюра - це графік зміни відповідного зусилля ( $M$ ,  $Q$  або  $N$ ) вздовж осей елементів споруди. Ординати епюр відкладають перпендикулярно осі стержня. На епюрах  $Q$  і  $N$  необхідно показувати знаки ординат з врахуванням правила знаків, приведеного на рис. 2.1.б. При побудові епюри  $M$  ординати відкладаються так, щоб вони були завжди розташовані на стороні розтягнутого волокна.

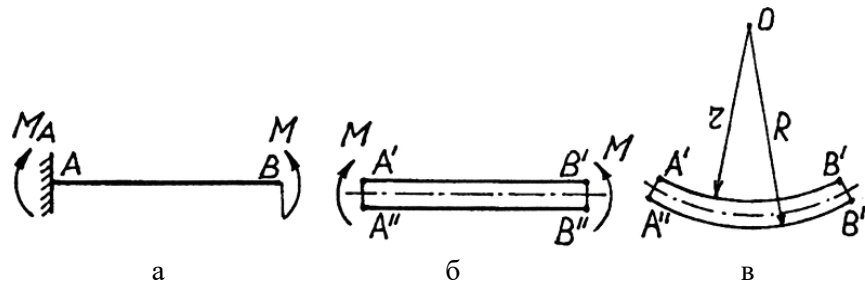


Рис. 2.5 Плоский згин:

а - консольна балка; б - консольна балка з урахуванням розмірів поперечного перерізу; в - деформації балки

Розрахункова схема споруди передбачає зображення тільки осей елементів.

Зрозуміти, що в одному і тому ж елементі можливий розтяг поряд з стиском допоможе нам наступний приклад. До кінця консольної балки прикладемо момент  $M$  (рис. 2.5.а). В опорі  $A$  виникне реактивний момент.

Якщо під дією прикладеного і реактивного моментів стержень  $AB$  показати з врахуванням розмірів перерізу його по довжині вертикальною площиною (рис. 2.5.б), та (рис. 2.5.в) буде геометричним записом його деформації. Очевидно, що при одному і тому ж центрі кривизни  $O$ ,  $r <$

$R$ , а значить довжина кривої  $A'B'$  буде менша довжини кривої  $A''B''$ . До деформації (згину) довжини прямих  $A'B' \setminus A''B''$  були однаковими. Так як лінією  $A'B'$  символізується верхнє волокно, а  $A''B''$  - нижнє, то зрозумілим є те, що верхнє волокно стиснулось, а нижнє розтягнулось. Лінія, показана штрих-пунктирною, як відомо з опору матеріалів, довжини своєї не міняє і називається нейтральною віссю.

### 3. БАГАТОПРОЛЬОТНІ СТАТИЧНО ВИЗНАЧНІ БАЛКИ.

#### 3.1. Утворення багатопрольотних статично визначних балок.

Балки відносяться до найбільш розповсюджених конструктивних елементів споруд. Серед статично визначних балочних систем важливе місце займають багатопрольотні шарнірно-консольні балки.

Порівнюючи між собою статично визначні однопрольотні балки (рис. 3.1,а) і нерозрізну балку (рис. 3.1,б) під дією розподіленого і зосередженого навантажень, можна зробити висновок, що нерозрізна балка більш економічна. Дійсно, завдяки наявності опорних моментів найбільші значення згинальних моментів в нерозрізній балці, як правило, менші, чим в однопрольотних. А саме моменти визначають розміри поперечних перерізів балки.

В той же час нерозрізна балка має певні недоліки. Вона є статично невизначною і тому в ній можуть виникати додаткові зусилля при неточності виготовлення, нерівномірному осіданні опор і при нерівномірному нагріванні чи охолодженні. Якщо врахування цих особливостей веде до суттєвого збільшення витрат на зведення споруди, балку роблять статично визначною.

Поставимо в якому-небудь перерізі нерозрізної балки шарнір. Тоді її ступінь статичної невизначеності зменшується на одиницю. Якщо при цьому шарнір помістити в перерізі з нульовим згинальним моментом, наприклад  $K$  (рис. 3.1.в), то розподіл згинальних моментів залишається таким же, як у вихідній балці.

Якщо кількість шарнірів прийняти рівною ступеню статичної невизначеності вихідної нерозрізної балки, то ступінь вільності отриманої балки буде рівна нулю. Така балка з шарнірами в прольотах є багатопрольотною статично визначною балкою (рис. 3.1.г). Інакше її називають шарнірно-консольною балкою. Відзначимо, що для статично визначної балки відпадає необхідність в задоволенні умов сумісності деформацій. Завдяки чому при постійному навантаженні з'являється можливість переміщенням шарнірів досягти навіть кращого розподілу згинальних моментів в порівнянні з нерозрізною балкою.

При проектуванні шарнірно-консольної балки необхідно вирішити питання про число шарнірів і їх розташування.

Число шарнірів отримаємо з умови статичної визначеності балки. Враховуючи, що в балці кількість дисків завжди на одиницю більше числа з'єднувальних шарнірів, умову  $W = 0$  можна записати:

$$W = 3(III + 1) - 2III - C_0 = 0,$$

звідки

$$III = C_0 - 3. \quad (3.1)$$

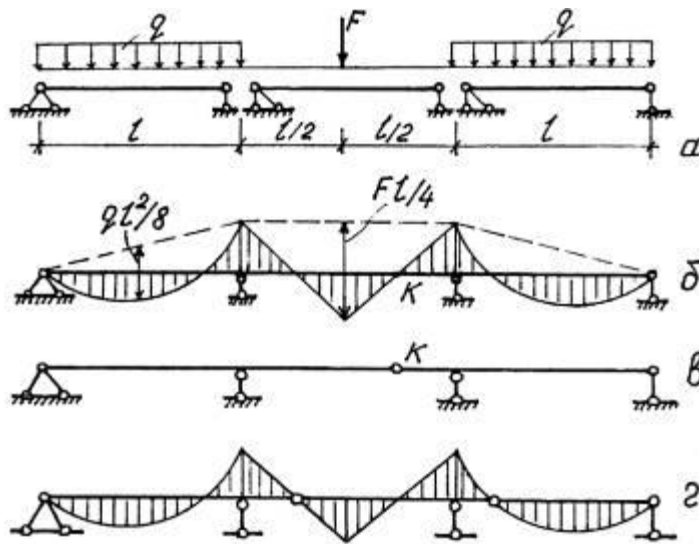


Рис. 3.1 Утворення багатопрольотних статично визначних балок:  
 а - однопрольотні балки; б - нерозрізна балка; в - статично невизначена балка з шарніром; г - багатопрольотна статично визначна балка

При розстановці шарнірів по прольотах необхідно виконати вимогу геометричної незмінності. З урахуванням уніфікації окремих елементів балки в більшості застосовують два основних варіанти розстановки шарнірів, показаних на рис. 3.2,а,б, хоча можливі і інші, наприклад, на рис. 3.2,в.

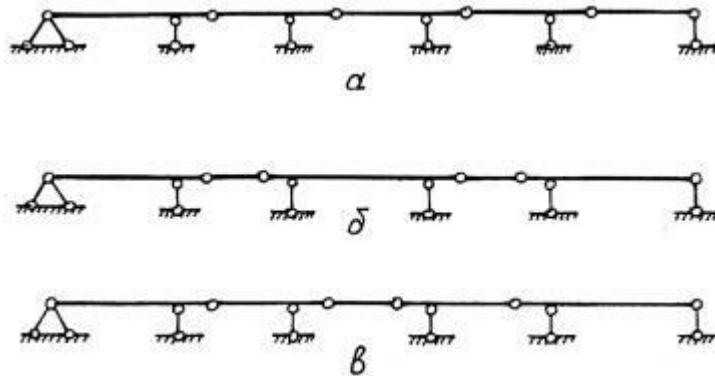


Рис. 3.2 Розстановці шарнірів:  
 а – один шарнір в прольоті; б - два шарніра через прольот; два шарніра в прольоті

Для забезпечення геометричної незмінності розташування шарнірів повинно задовольняти наступним вимогам:

- в кожному прольоті не може бути більше двох шарнірів;
- в суміжних прольотах не може знаходитись по два шарніри;
- прольоти без шарнірів не можуть знаходитись поряд;
- в крайньому прольоті при крайній шарнірній опорі не може бути більше одного шарніра;
- в крайньому прольоті при крайній защемлюючий нерухомій опорі повинен бути хоча б один шарнір.

Як правило, віддаль від шарніра до найближчої опори приймається в межах від 1/7 до 1/4 величини прольоту по умові раціонального розподілу згинальних моментів.

Шарніри ділять багатопрольотну балку на окремі елементи. Серед них виділяють основні і другорядні. Основними називають ті елементи, які залишаються геометрично незмінними при

видаленні суміжних елементів. Решту елементів називають другорядними. При видаленні суміжних елементів вони стають змінними за рахунок недостатньої кількості опорних в'язей.

### 3.2. Розрахунок шарнірно-консольної балки.

Розрахунок шарнірно-консольної балки (рис. 3.3.а) можна виконати розтинанням її на окремі елементи, як це було показано в главі 1. Але в більшості випадків поступають інакше: будують схему взаємодії елементів - поверхову схему балки, умовно заміняючи шарніри шарнірно-нерухомими опорами (рис. 3.3.б). Така заміна не змінює кінематичну схему споруди, так як і шарнір і шарнірно-нерухома опора мають дві в'язі. Для побудови поверхової схеми послідовно, наприклад зліва направо, зображають окремі елементи, розташовуючи черговий елемент вище, якщо попередній елемент геометрично незмінний, і нижче, якщо попередній елемент змінний.

На поверховій схемі кожен елемент являє собою однопрольотну балку, сприймаючу прикладене навантаження і тиск від вище лежачих елементів. Тиск рівний реакції у відповідній умовній опорі вище лежачого елемента і зворотній за напрямком.

Розпочавши з верхнього елемента і, рухаючись зверху вниз по поверховій схемі, можна послідовно розрахувати всі елементи (рис. 3.3,в), і побудувати результуючі епюри  $M$  і  $Q$ , (рис. 3.3,г).

Відзначимо, що елемент ( $III_2 - III_3$ ) в зображенні на поверховій схемі (рис. 3.3,б) має дві шарнірно-нерухомі опори. Але по суті одна з цих опор має можливість переміщатись разом з з'єднаними елементами по горизонталі. Крім того горизонтальні в'язі грають роль тільки при визначенні поздовжніх сил, а цей розрахунок може бути виконаний без розтину балки на елементи. Аналогічно пояснюється уявна відсутність горизонтальної в'язі в елементі  $III_3 - Д$ .

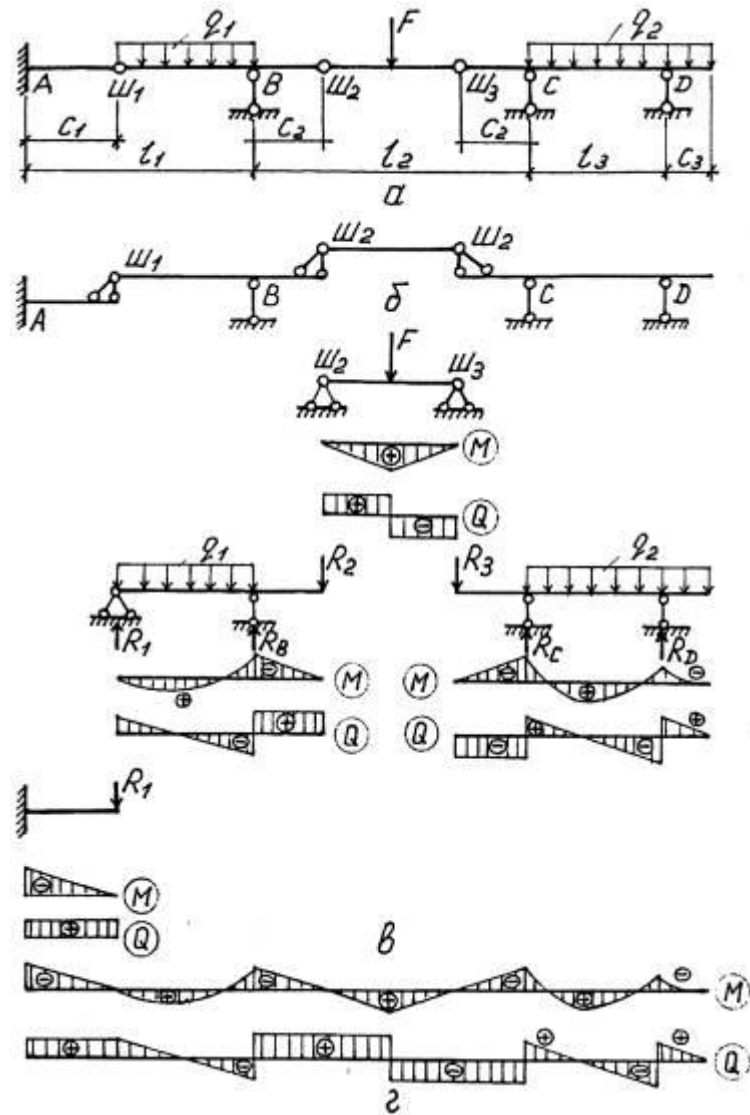


Рис. 3.3 Розрахунок шарнірно-консольної балки:  
 а – багатопрольотна балка; б- поверхова схема; в, г - епюри

### 3.3. Завдання для самостійної роботи

**Задача 1.** Побудувати епюри  $M$  і  $Q$ , в шарнірно-консольній балці від заданого нерухомого навантаження (рис. 3.4.а) при  $l = 4$  м,

$$F_1 = 8 \text{ кН}, F_2 = 16 \text{ кН}, q = 2 \text{ кН/м}, M = 30 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Попередньо перевіримо виконання для заданої розрахункової схеми умови (3.1). Балка має п'ять опорних в'язей ( $C_0 = 5$ ). Число з'єднувальних шарнірів, визначене за формулою (3.1),  $III = 5 - 3 = 2$  дорівнює їх кількості в розрахунковій схемі.

Поверхова схема взаємодії показана на рис. 3.4,б.

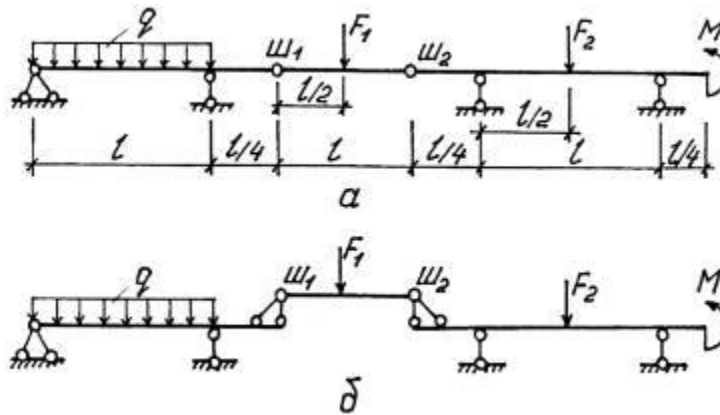


Рис. 3.4 До задачі 1:

а - шарнірно-консольна балка; б – повкрхова схема

### 3.4 Питання до самоконтролю знань

1. В чому суть методу перерізів для визначення зусиль в статично визначних системах ?
2. Для чого застосовується при визначенні зусиль розчленування системи на окремі частини по шарнірах ?
3. Що являє собою багатопрольотна статично визначна балка ?
4. Як можна визначити число з'єднувальних шарнірів у багатопрольотній статично визначній балці ?
5. Який порядок розрахунку багатопрольотної балки на нерухоме навантаження ?

## 4. ТРИШАРНІРНІ АРКИ.

### 4.1. Загальні означення.

**Аркою** називається розпирна система, яка має форму кривого бруса, оберненого випуклістю в напрямку дії основного навантаження. Тришарнірна арка являє собою статично визначну розпирну систему, утворену двома піварками, з'єднаними між собою і з основою шарнірами. Точки обпирання арки називаються п'ятами, а точку найбільш віддалену від п'ят (з'єднувальний шарнір С) - замком (рис. 4.1).

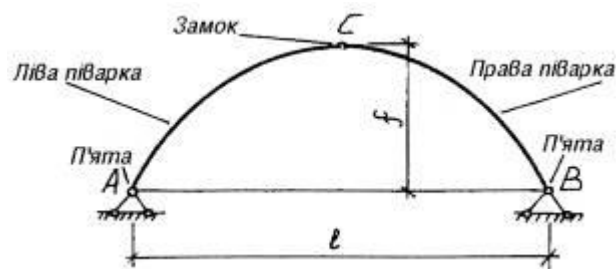


Рис. 4.1 Арка

Для тришарнірних арок з опорами на одному рівні характерними величинами є довжина  $l$  - віддаль між опорами і  $f$  - найкоротша віддаль від лінії з'єднуючої опори до замка, яку називають стрілою підйому арки.

Координати осі арки  $y = f(x)$ , кут нахилу дотичної до осі арки  $\varphi$ , а також  $\sin\varphi$  і  $\cos\varphi$  можуть бути визначеними по наступних формулах, якщо початок координат розташувати в точці А (рис. 4.2), вісь  $OX$  направити в праву сторону, вісь  $OY$  - вверх:

а) вісь - квадратна парабола:

$$y = 4fx(l - x) \cdot l^2; \quad tg\varphi = y' = 4f \frac{l-2x}{l^2};$$

$$\cos \phi = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\phi}}; \quad \sin \phi = \cos \phi \cdot tg\phi; \quad (4.1)$$

б) вісь - коло:

$$y = \sqrt{R^2 - \left(\frac{l}{2} - x\right)^2} - R + f; \quad R = \frac{f}{2} + \frac{l^2}{8f};$$

$$\sin \phi = \frac{l-2x}{2R}; \quad \cos \phi = \frac{y+R-f}{R}, \quad (4.2)$$

де  $R$  - радіус кола.

Арки відносяться до розпірних систем, тому що в їх опорах при вертикальному навантаженні з'являються горизонтальні складові опорних реакцій. Ці складові називаються розпором.

Розпір викликає в перерізі момент, протилежний за знаком моменту вертикальних сил. За рахунок цього згинальні моменти в арці зменшуються в порівнянні з згинальними моментами в балці. Походження терміну «розпір» пов'язано з тим, що він відповідає тим силам, котрі діють на опорні пристрої, намагаючись розсунути («розперти») їх в горизонтальному напрямку.

Внаслідок кривизни осі арки і наявності розпору в її перерізах виникають значні поздовжні сили. По суті, в порівнянні з балкою деформація згину в арці частково замінюється деформацією стиску. Ця обставина робить арку більш економічного, особливо при великих прольотах.

Відношення стріли підйому до прольоту арки називають пологістю арки. При  $\frac{f}{l} < \frac{1}{4}$  арки рахують пологими.

Арку, вісь якої накреслена по параболі, називають параболічною. У випадку, коли форма осі прийнята по дузі кола, арку називають круговою (циркульною).

#### 4.2. Розрахунок тришарнірних арок на нерухоме вертикальне навантаження.

Попередньо розглянемо визначення опорних реакцій. Для арки з опорами на одному рівні опорні реакції розкладаються на вертикальні і горизонтальні складові (рис. 4.2.а). З умови  $\sum X = H_A - H_B = 0$  випливає, що горизонтальні складові опорних реакцій арки при вертикальному навантаженні рівні між собою:

$$H_A = H_B = H. \quad (4.3)$$

Величина  $H$  називається розпором.

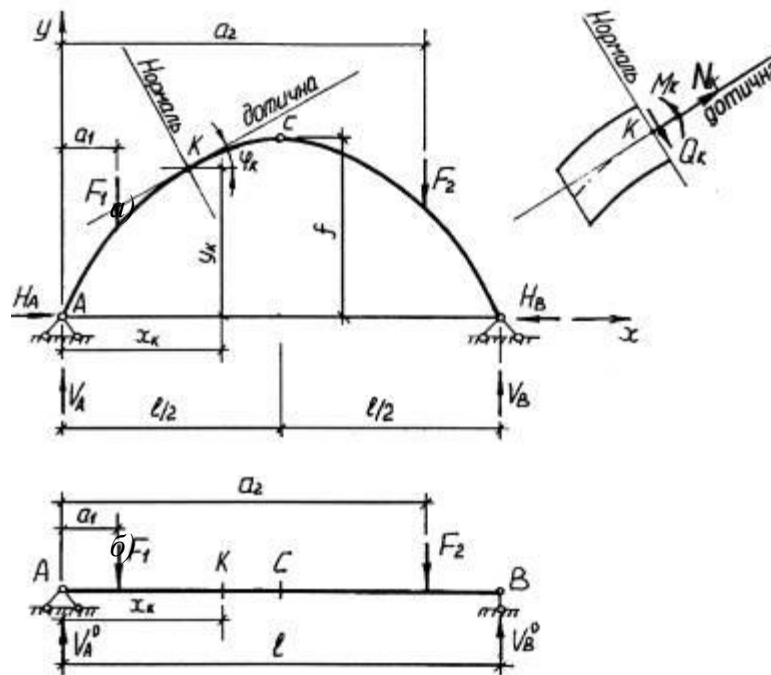
Для визначення вертикальних складових реакцій використовують ті ж рівняння, що й для балки на двох опорах:

$$\sum m_A = -F_1 a_1 - F_2 a_2 + V_B l = 0, \quad (4.4)$$

звідки 
$$V_B = \frac{(F_1 \cdot a_1 + F_2 \cdot a_2)}{l} = V_B^0;$$

$$\sum m_B = F_1(l - a_1) + F_2(l - a_2) - V_A l = 0. \quad (4.5)$$

звідки 
$$V_A = \frac{F_1(l - a_1) + F_2(l - a_2)}{l} = V_A^0.$$



в)

Рис. 4.2 Розрахунок тришарнірних арок

Реакції  $V_A$  і  $V_B$  повністю відповідають за величиною і напрямком опорним реакціям однопрольотної балки того ж прольоту, при тому ж навантаженні. Тому ці реакції називають балочними.

Для визначення розпору використовують умову рівності нулю згинального моменту в з'єднувальному шарнірі  $C$ . Цей момент можна записувати для лівих або правих сил:

$$\sum M_C^{AC} = 0 \text{ або } \sum M_C^{BC} = 0. \quad (4.6)$$

Наприклад, розглядаючи ліві сили, знаходимо

$$\sum m_C^{AC} = V_A \cdot \frac{l}{2} - F_1 \left( \frac{l}{2} - a_1 \right) - Hf = 0. \quad (4.7)$$

Звернемо увагу на те, що перші два члени лівої частини (4.7) являють собою балочний згинальний момент  $M_C^0$  в перерізі  $C$  (рис. 4.2.б). Таким чином, отримуємо наступну залежність:

$$H = \frac{M_C^0}{f}. \quad (4.8)$$

Звідси випливає, що розпір зменшується при збільшенні стріли підйому.

Розглянемо визначення внутрішніх зусиль в довільному перерізі  $K$  з координатами  $x_K$  і  $y_K$  (рис. 4.2,а). Розташування цих зусиль в перерізі показано на (рис. 4.2,в).

Запишемо вираз згинаючого моменту в перерізі  $K$ , розглядаючи частину арки, яка знаходиться зліва від перерізу:

$$M_K = V_A \cdot x_K - F_1(x_K - a_1) - H y_K$$

або, з врахування введеного поняття балочного згинального моменту

$$M_K^0 = V_A \cdot x_K - F_1(x_K - a_1)$$

отримуємо

$$M_K = M_K^0 - Hy_K. \quad (4.9)$$

Для визначення поперечної і поздовжньої сил в перерізі К запишемо суму проєкцій, наприклад, лівих сил відповідно на нормаль і на дотичну до осі арки. Кут нахилу дотичної до осі арки в т. К позначимо  $\varphi_K$ .

$$\begin{aligned} Q_K &= (V_A - F_1) \cos \varphi_K - H \sin \varphi_K; \\ N_K &= -(V_A - F_1) \sin \varphi_K - H \cos \varphi_K. \end{aligned}$$

В приведених рівняннях вираз, взятий в скобки, являє собою поперечну силу в перерізі К балки (рис. 4.2.б). Її називають балочною поперечною силою і позначають  $Q_K^0$ . Тоді вирази для поперечної і поздовжньої сил запишуться в такому вигляді:

$$Q_K = Q_K^0 \cos \varphi_K - H \sin \varphi_K, \quad (4.10)$$

$$N_K = -Q_K^0 \sin \varphi_K - H \cos \varphi_K. \quad (4.11)$$

Аналізуючи вираз (4.11) приходимо до висновку, що при дії вертикального навантаження поздовжні сили в перерізах арки завжди стискаючі.

Як видно з приведених вище формул, в арці порівняно з балкою суттєво зменшуються згинальний момент і поперечна сила, що є результатом впливу розпору.

Нормальні напруження в крайніх точках перерізу арки, симетричного відносно нейтральної осі, визначаються двохчленною формулою позацентрового стиску:

$$\sigma = \pm \frac{M}{W} + \frac{N}{A}. \quad (4.12)$$

Напруження у верхній точці перерізу

$$\sigma_1 = -\frac{M}{W} + \frac{N}{A}, \quad (4.13)$$

в нижній точці перерізу

$$\sigma_2 = +\frac{M}{W} + \frac{N}{A}. \quad (4.14)$$

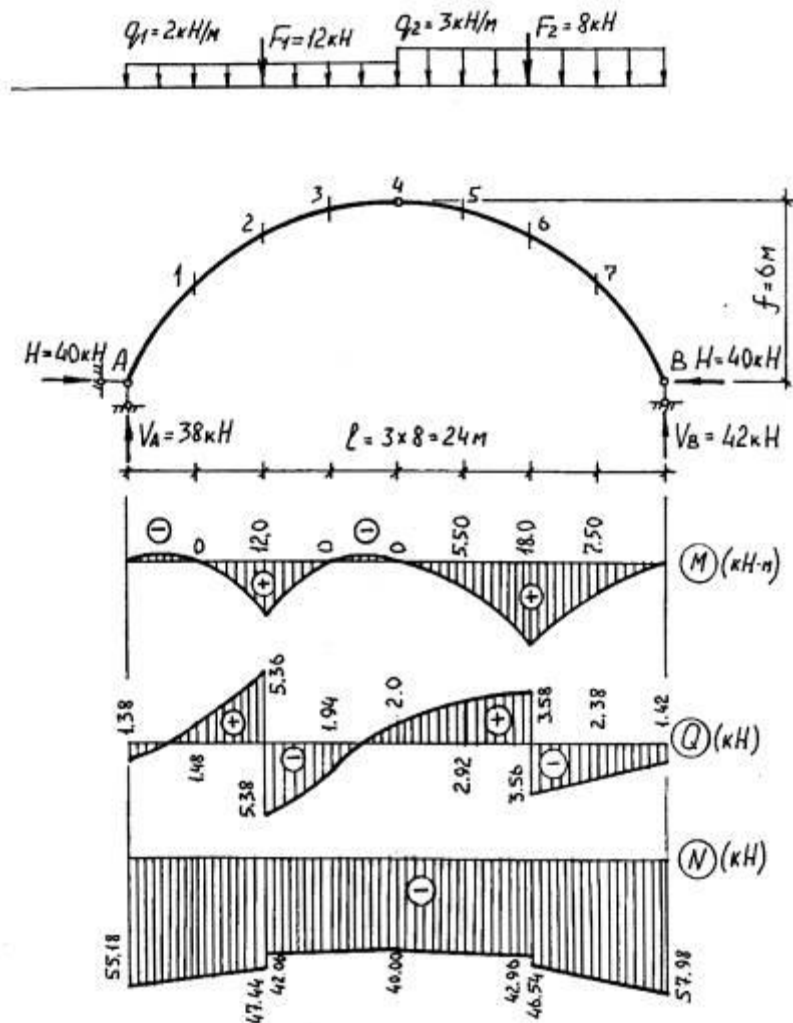


Рис. 4.3 Епюри внутрішніх зусиль

При побудові епюри внутрішніх зусиль в арці виходять з того, що  $M$ ,  $Q$  і  $N$  міняються по нелінійних законах (4.9), (4.10) і (4.11). У зв'язку з цим вісь арки розбивають на ділянки, обчислюють в отриманих точках величини  $M$ ,  $Q$ ,  $N$ , відкладаючи їх від горизонтальних осей і з'єднуючи їх плавними кривими. Обчислення ординат епюр зручно виконувати в табличній формі.

#### 4.3. Особливості розрахунку тришарнірних арок із затяжками.

Наявність в арках розпору обумовлює необхідність зведення масивних опор для сприйняття великих горизонтальних зусиль. У тих випадках, коли зведення таких опор стає неекономічним (при слабких ґрунтах, в покриттях споруд) застосовують арки з затяжками. Виконуючи роль горизонтальної в'язі затяжка забезпечує нерухомість опор арки. При цьому затяжка може розташовуватись вище рівня п'ят (підвищена затяжка). Зусилля в затяжці по суті являє собою розпір звичайної арки.

Розглянемо розрахунок арки з затяжкою (рис. 4.4). У відповідності з опорними в'язями, ця арка є балочною системою, реакції при вертикальному навантаженні вертикальні і визначаються так, як і в простій двоопорній балці.

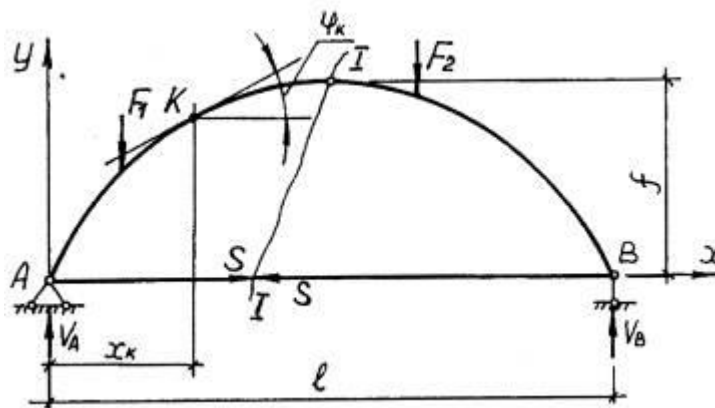


Рис. 4.4 Арка із затяжкою

Функцію розпору в арці з затяжкою, як вже завважувалось, виконує зусилля в затяжці. Для його визначення проведемо переріз I-I, який проходить через з'єднувальний шарнір С. Користуючись одним з рівнянь (4.6), знайдемо зусилля

$$S = \frac{M_C^0}{f}. \quad (4.15)$$

З отриманого виразу випливає, що зусилля в затяжці, розташованій на рівні опор, дійсно відповідає розпору арки без затяжки.

При обчисленні внутрішніх зусиль в такій арці можна користуватись формулами (4.9), (4.10), (4.11), формально замінюючи в них  $H$  на  $S$ :

$$\left. \begin{aligned} M_K &= M_K^0 - S y_K \\ Q_K &= Q_K^0 \cos \phi_K - S \sin \phi_K \\ N_K &= -Q_K^0 \sin \phi_K - S \cos \phi_K \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

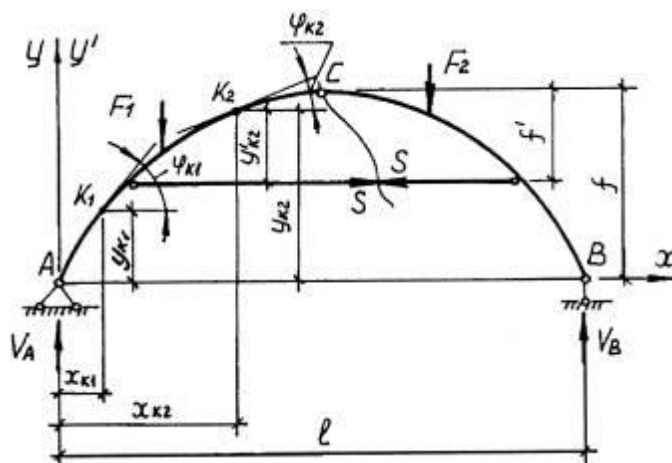


Рис. 4. Арки з підвищеною затяжкою

При розрахунку арки з підвищеною затяжкою (рис. 4.5) слід мати на увазі, що частина арки, розташована нижче затяжки, працює як брус малої кривизни. Приведемо основні розрахункові формули:

$$S = \frac{M_c^0}{f'}; \quad (4.17)$$

зусилля в перерізах нижче затяжки

$$\left. \begin{aligned} M_{K_1} &= M_K^0 \\ Q_{K_1} &= Q_{K_1}^0 \cos \phi_{K_1} \\ N_{K_1} &= -Q_{K_1}^0 \sin \phi_{K_1} \end{aligned} \right\}; \quad (4.18)$$

зусилля в перерізах вище затяжки

$$\left. \begin{aligned} M_{K_1} &= M_{K_1}^0 - S y'_{K_2} \\ Q_{K_2} &= Q_{K_2}^0 \cos \phi_{K_2} - S \sin \phi_{K_2} \\ N_{K_2} &= -Q_{K_2}^0 \sin \phi_{K_2} - S \cos \phi_{K_2} \end{aligned} \right\}; \quad (4.19)$$

де

$$y'_{K_2} = y_{K_2} - (f - f'). \quad (4.20)$$

#### 4.4. Приклади рішення задач

**Приклад 1.** Виконати розрахунок тришарнірної арки в формі квадратної параболи, поперечний переріз арки прийняти прямокутним з розмірами  $b = 1$  м і  $h = 1,5$  м.

Для визначення координат осі арки і відповідних тригонометричних функцій використовуємо формули (4.1). арку розбиваємо на 8 частин з горизонтальними проекціями осі, рівними 3 м. На (рис. 4.6) показані епюри  $M$  і  $Q$  для простої балки того ж прольоту при заданому навантаженні.

Розпір 
$$H = \frac{M_c^0}{f} = \frac{240}{6} = 40 \text{ кН.}$$

Нормальні напруження визначимо в перерізі 6, де згинальний момент  $M = 18,0$  кН·м (максимальний), а  $N = -46,54$  кН.

При заданих геометричних розмірах:  $A = 1 \cdot 1,5 = 1,5 \text{ м}^2$ ;  $W = b \cdot h^2 / 6 = 1 \cdot 1,5^2 / 6 = 0,375 \text{ м}^3$ . Напруження у верхній точці перерізу  $\sigma_1 = -18 \cdot 10^3 / 0,375 - 46,54 \cdot 10^3 / 1,5 = -79 \cdot 10^3 \text{ Па} = -79 \text{ кПа}$ , в нижній точці перерізу  $\sigma_2 = 18 \cdot 10^3 / 0,375 - 46,54 \cdot 10^3 / 1,5 = 17 \cdot 10^3 \text{ Па} = 17 \text{ кПа}$ .

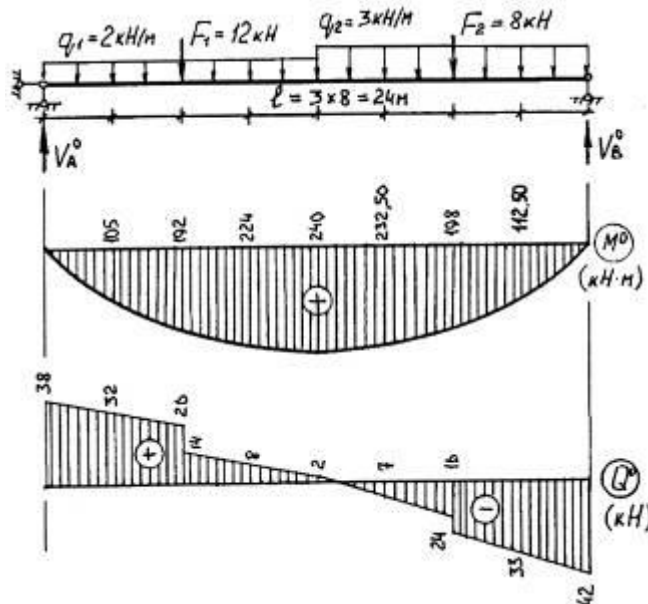


Рис. 4.6 Епюри

**Приклад 2.** Побудувати епюри  $M$ ,  $Q$ ,  $N$  для параболічної арки з затяжкою, показану на рис. 4.7.

Для визначення координат осі арки зусиль  $M$ ,  $Q$ ,  $N$  використовуємо формули (4.1), (4.17), (4.18), (4.19), (4.20). Вертикальні опорні реакції визначаємо з рівнянь  $\sum M_A=0$  і  $\sum M_B=0$ . Арку розбиваємо на вісім частин з проєкціями осі, рівними 6м. Крім того крайні ділянки осі арки розділяємо точкою приєднання затяжки.

Зусилля в затяжці 
$$S = \frac{M_C^0}{f'} = \frac{312}{8-2} = 52 \text{ кН.}$$

Розрахункова схема арки, задане навантаження і отримані в результаті розрахунку епюри  $M$ ,  $Q$ ,  $N$  приведені на рис. 4.7.

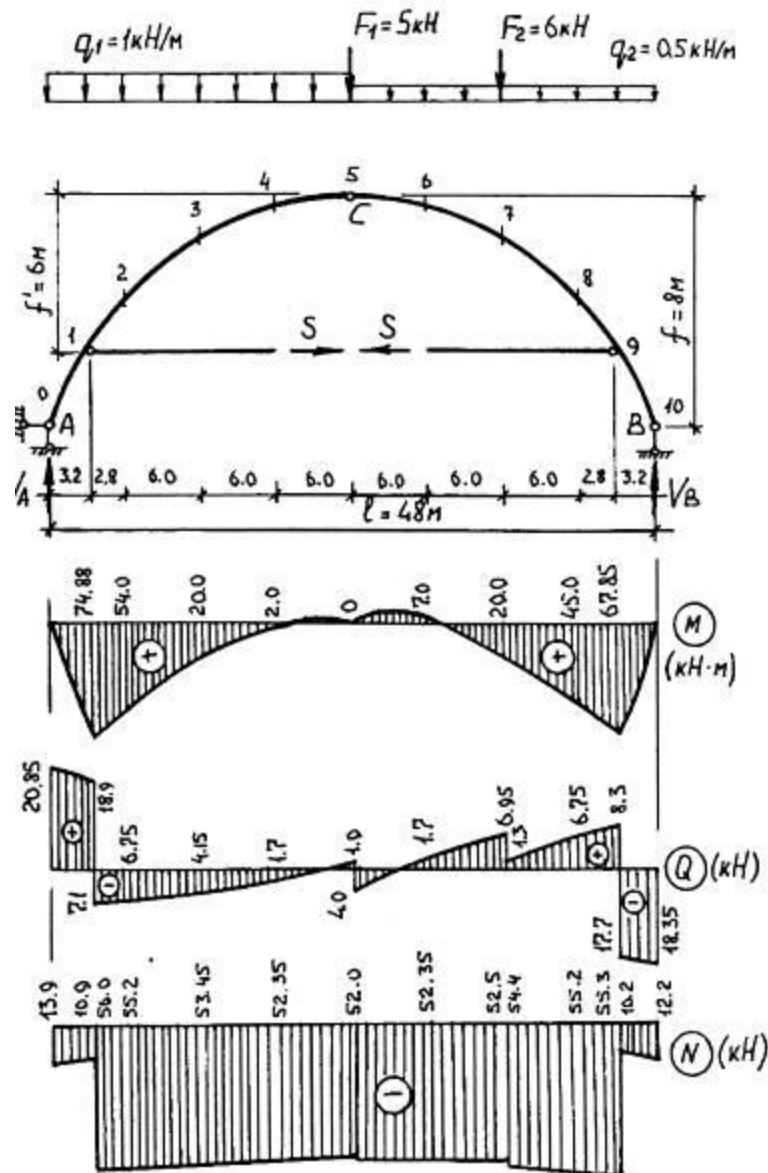


Рис. 4.7 Розрахунок арки

Після побудови епюр  $M$ ,  $Q$ ,  $N$  необхідно перевірити відповідність епюр розрахунковій схемі, заданому навантаженню і їх взаємній ув'язці. При цьому:

1) на епюрі  $M$  повинні бути рівними нулю моменти на опорах і в з'єднувальному шарнірі  $C$ ; в точках дії зосереджених сил, а в тришарнірній арці з затяжкою і в точках приєднання затяжки повинні бути переломи на епюрі  $M$ ;

2) на епюрі  $Q$  в точках дії вертикальних зосереджених сил повинні бути скачки, рівні  $F_i \cdot \cos \varphi$ , а в точках приєднання затяжки - скачки  $H \cdot \sin \varphi$ ;

3) додатні ділянки епюри  $Q$  повинні відповідати зростаючим ділянкам на епюрі  $M$ , від'ємні ділянки епюри  $Q$  - спадним ділянкам на епюрі  $M$ ; на епюрі  $Q$  - точки з ординатами, рівними нулю - екстремальним (максимальним або мінімальним) величинам на епюрі  $M$ ;

4) на епюрі  $N$  в точках дії зосереджених вертикальних сил повинні бути скачки  $F_i \cdot \sin \varphi$ , а в точках приєднання затяжки -  $H \cos \varphi$ .

**Приклад 3.** Для арки при рівномірно розподіленому постійному по довжині вертикальному навантаженні інтенсивністю  $q$  (рис. 4.8) знайти раціональну вісь.

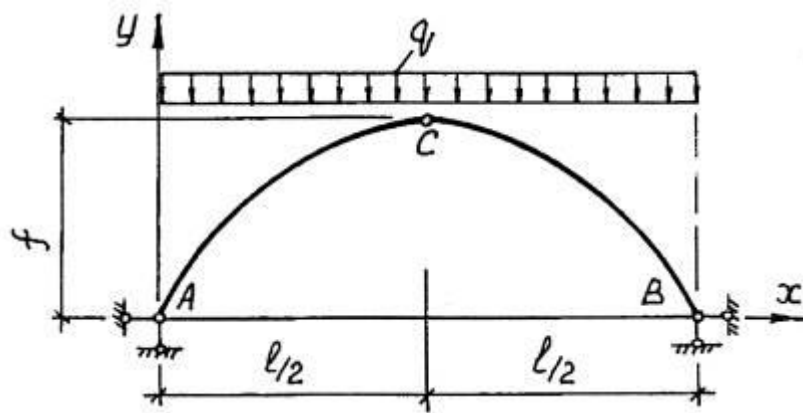


Рис. 4,8 Арка

Рівняння раціональної осі арки отримаємо з умови:

$$M_x = M_x^0 - H \cdot y = 0; M_x^0 = V_A x - \frac{qx^2}{2} = ql \frac{x}{2} - \frac{qx^2}{2};$$

$$H = \frac{M_C^0}{f} = \frac{gl^2}{8f}; M_x = \frac{gx}{2}(l-x) - y \frac{gl^2}{8f} = 0,$$

звідки

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l-x). \quad (4.21)$$

Таким чином, при дії рівномірно розподіленого вертикального навантаження раціональна вісь арки має форму квадратної параболи.

**Приклад 4.** Для арки при дії гідростатичного тиску (рис. 4.9) знайти раціональну вісь.

Гідростатичний тиск в розрахунковій схемі арки зображений у вигляді розподіленого навантаження, інтенсивність якого змінюється по закону трикутника.

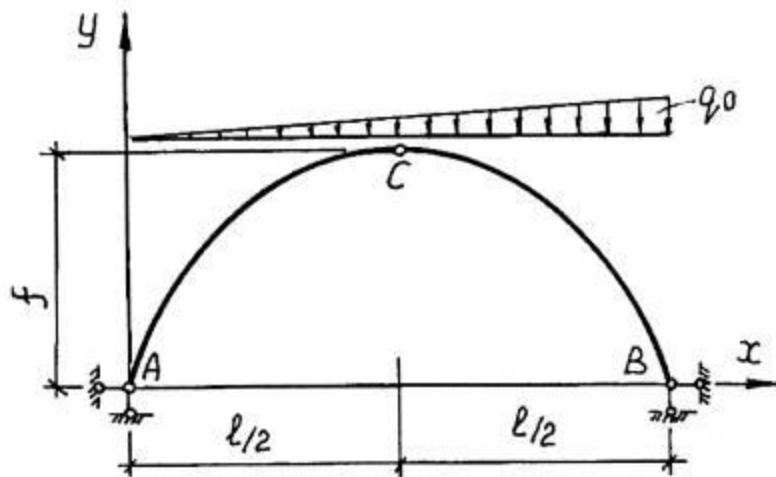


Рис. 4.9 Арка

Рівняння закону зміни навантаження має вигляд  $q_x = q_0 \frac{x}{l}$ , опорні реакції  $V_A$  і  $V_B$  визначимо з умов

$$\sum M_A = 0; \sum M_B = 0 \text{ і отримаємо: } V_A = q_0 \frac{l}{6}; V_B = q_0 \frac{l}{3},$$

$$M_C^0 = \frac{g_0 l}{6} \frac{l}{2} - \frac{1}{2} \frac{g_0}{2} \frac{l}{2} \frac{l}{6} = \frac{g_0 l^2}{16};$$

$$H = \frac{M_C^0}{F} = \frac{q_0 l^2}{16F}.$$

По умові прикладу:

$$M = M_x^0 - Hy; \quad y = \frac{M_x^0}{H};$$

$$M_x^0 = \frac{g_0 l}{6} x - \frac{1}{2} \frac{g_0 x}{l} x \frac{x}{2} = \frac{g_0 x}{6} \left( l - \frac{x^2}{l} \right),$$

звідки

$$y = \frac{8}{3} \frac{f}{l^2} x \left( l - \frac{x^2}{l} \right), \quad (4,22)$$

тобто отримано рівняння кубічної параболи.

Поняття раціональної осі має зміст тільки при розрахунку на постійне навантаження. При завантаженні арки тимчасовими навантаженнями згинальні моменти в загальному випадку вже не будуть нульовими.

#### 4.5. Питання до самоконтролю знань

1. Які системи називаються розпірними ?
2. Назвіть основні елементи тришарнірної арки.
3. Приведіть типи тришарнірних арок.
4. Як залежить розпір арки при дії вертикального навантаження від її стріли підйому ?
5. Як записуються вирази для визначення згинального моменту, поперечної і поздовжньої сили в перерізі арки від вертикального навантаження ?
6. Чим відрізняються зусилля в арці від балочних зусиль?
7. В чому полягає особливість розрахунку арки із затяжкою?
8. Що таке раціональна форма осі арки?
9. В чому полягає особливість визначення реакцій і зусиль у тришарнірних арках при дії довільно направленою навантаження?

## ЛІТЕРАТУРА

1. Строительная механика. Под ред. Бутенко Ю.И.-К. - Вища школа, 1989.
2. Смирнов А.Ф., Александров А.В., Лашенников Б.Я., Шапошников Н.Н. Строительная механика. Стержневые системы. - М.: Стройиздат, 1981.
3. Смирнов А.Ф., Александров А.В., Лашенников Б.Я., Шапошников Н.Н. Строительная механика. - М.: Стройиздат, 1984.
4. Дарков А.В., Шапошников Н.Н. Строительная механика. - М.: Высш. шк., 1986.-608 с.
5. Строительная механика. Руководство к практическим занятиям. Под ред. Ю.И. Бутенко. - К.: Вища школа, 1984.
6. Бутенко Ю.И. Строительная механика. К., Вища школа, 1989.
7. Клейн Г.Г. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики. М.: Высшая школа, 1980.
8. Дорошук Г.П., Трач В.М. Будівельна механіка / Навчальний посібник. -К.: ІЗМН, 1996, - 520с.

Навчальне видання

**КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ**  
**з дисципліни**  
**"Будівельна механіка" ч.1**

*(для здобувачів вищої освіти спеціальності 192  
«Будівництво та цивільна інженерія»)  
(Електронне видання)*

Укладач:

Медвідь Іван Іванович

Оригінал - макет

І.І.Медвідь

Підписано до друку \_\_\_\_\_

Формат 60×84  $\frac{1}{16}$ . Папір типограф. Гарнітура *Times*.

Друк офсетний. Умов. друк. арк. \_\_\_\_\_. Обл.-вид.арк. \_\_\_\_\_.

Тираж \_\_\_\_ прим. Вид. № \_\_\_\_\_. Замовл. № \_\_\_\_\_. Ціна договірна.

**Видавництво Східноукраїнського національного університету  
імені Володимира Даля**

Свідоцтво про реєстрацію: серія ДК № 1620 від 18.12.03 р.

Адреса університета: вул. Іоанна Павла 2, 17

м. Київ, 01042, Україна

e-mail: vidavnictvoSNU.ua@gmail.com.