

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
СХІДНОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені Володимира Даля

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
з дисципліни
"Будівельна механіка" ч.3

*(для здобувачів вищої освіти спеціальності 192
«Будівництво та цивільна інженерія»)
(Електронне видання)*

ЗАТВЕРДЖЕНО
на засіданні кафедри будівництва,
урбаністики та просторового планування
Протокол № 8 від 18.02.2025 р.

Київ 2025

УДК 539.3

Конспект лекцій з дисципліни "Будівельна механіка ч.3(для здобувачів вищої освіти спеціальності 192 «Будівництво та цивільна інженерія») (Електронне видання)/ Уклад.: Медвідь І.І. – Київ : вид-во СНУ ім. В. Даля, 2025. – 21с

В методичних вказівках розглядається структурний та кінематичний аналіз стержневих систем. Розрахунок статично визначних стержневих систем. Визначення реакцій у в'язях. Внутрішні сили. Визначення внутрішніх сил методом перерізів.

Статично визначні плоскі ферми. Основні поняття. Аналітичні методи визначення зусиль в елементах ферм. Графічний метод розрахунку плоских ферм.

Статично визначні рами. Основні поняття. Побудова епюр внутрішніх сил. Особливості розрахунку тришарнірних рам, рам з замкнутим контуром.

Основні теореми будівельної механіки. Робота зовнішніх сил. Робота внутрішніх сил. Визначення переміщень в пружних системах при силовому навантаженні. Формула Мора.

Укладач: І.І.Медвідь – доцент.

Рецензент: Н.І. Білошицька – доцент.

ЗМІСТ

7 ТЕОРІЯ ПЕРЕМІЩЕНЬ	4
7.1 Основні теореми для пружних систем. Визначення переміщень	4
7.2 Робота зовнішніх сил. Узагальнені сили і узагальнені переміщення	4
7.3 Робота внутрішніх сил	5
7.4 Теореми про взаємність	7
7.5 Обчислення переміщень по методу Мора	8
7.6 Визначення переміщень від температурної дії	11
7.7 Переміщення від осадки опор	12
7.8 Приклади рішення задач	13
7.9 Питання до самоконтролю знань	19
ЛИТЕРАТУРА	20

7. ТЕОРІЯ ПЕРЕМІЩЕНЬ.

7.1. Основні теореми для пружних систем. Визначення переміщень.

Довільна споруда під дією зовнішніх факторів деформується, змінюючи свою початкову форму і приймаючи форму рівноваги, при якій вплив зовнішньої дії врівноважується внутрішніми силами опору. Для розрахунку статично невизначених систем, а також для перевірки жорсткості і стійкості конструкції необхідно вміти визначати переміщення, викликані деформацією її елементів.

Зовнішні деформації системи супроводяться лінійними переміщеннями її окремих точок, зміною відносного положення поперечних перерізів, а також кутівими переміщеннями між її елементами. Переміщенням даної точки споруди називається зміна її координати в результаті деформації споруди.

Найбільш загальними методами визначення переміщень в пружних системах є енергетичні, базовані на дослідженні потенціальної енергії системи.

Одним з методів визначення переміщень в лінійно деформованих системах є метод Мора, який і буде розглянуто в цій главі.

Вивід формул для визначення переміщень по методу Мора може бути зроблений на основі *принципу можливих переміщень*. Цей принцип являється універсальним законом механіки, він, зокрема, застосовується при доведенні основних енергетичних теорем для пружних систем.

Принцип можливих переміщень формулюється слідуєчим чином. Якщо система знаходиться в рівновазі, то сума робіт всіх зовнішніх і внутрішніх сил системи на любых можливих переміщеннях рівна нулю.

Якщо роботу зовнішніх сил позначити W , а роботу внутрішніх сил U , то принцип можливих переміщень можна виразити формулою

$$W + U = 0. \quad (7.1)$$

Можливим переміщенням є довільне нескінченно мале переміщення, якому не перешкоджають накладені на систему в'язі. Можливі переміщення відраховуються від стану рівноваги системи. При цьому в силу їх малості припускається, що умови рівноваги системи не порушуються, тобто зусилля не змінюються.

Розглянемо спочатку визначення роботи зовнішніх і внутрішніх сил і деякі теореми для пружних систем.

7.2. Робота зовнішніх сил. Узагальнені сили і узагальнені переміщення.

Як відомо, робота обчислюється як добуток постійного по величині силового фактора на переміщення в напрямку цього фактора. Наприклад, робота сили F рівна добутку цієї сили на шлях, пройдений в напрямку сили; робота моменту (пари сил) - добутку моменту на кут повороту в напрямку цього моменту. Для загальності міркувань в будівельній механіці застосовують поняття узагальненої сили і узагальненого переміщення.

Узагальненою силою називають будь-яку силу або групу сил (пару сил, рівномірно розподілене навантаження, дві сили, розтягуючі або стискаючі стержень, та інші комбінації навантажень).

Узагальненим переміщенням називають таке переміщення, на якому відповідна узагальнена сила виконує роботу, тобто це множник при узагальненій силі у виразі роботи.

Узагальнену силу позначають буквою F , а узагальнене переміщення - Δ з двома індексами: перший вказує точку і напрямок переміщення (цей індекс відповідає індексу узагальненої сили, діючої в напрямку даного переміщення), другий індекс вказує причину, яка визвала дане переміщення (сила, температурна дія, зміщення опор та ін.).

При розв'язку ряду задач замість дійсного навантаження вводять одиничні сили або моменти. Переміщення від цих навантажень позначають δ з тими ж індексами, що і переміщення від довільних по величині навантажень.

Як і раніше, будемо розглядати тільки лінійно деформовані системи, для яких залежність між переміщеннями і навантаженнями має лінійний характер. Для таких систем справедливі співвідношення:

$$\Delta_{ik} = \delta_{ik} \mathbf{F}_k; \quad (7.2)$$

$$\Delta_{iF} = \delta_{i1} \mathbf{F}_1 + \delta_{i2} \mathbf{F}_2 + \delta_{i3} \mathbf{F}_3 + \dots \quad (7.3)$$

Роботу зовнішніх (внутрішніх) сил на можливих переміщеннях називають **можливою роботою** зовнішніх (внутрішніх) сил. Для лінійно деформованих систем при обчисленні робіт у виразі (7.1) замість нескінченно малих можливих переміщень можуть розглядатися малі скінчені переміщення. Зокрема, в силу довільності можливих переміщень їми можуть бути переміщення, викликані будь-якою силою або групою сил.

Розглянемо деяку пружну систему (рис. 7.1), навантажену статично прикладеною силою \mathbf{F}_1 . Статичний характер завантаження припускає повільне зростання значення сили від нуля так, що прискорення точок системи малі і силами інерції можна знехтувати. В результаті навантаження система деформується і точка прикладання сили переміщається в напрямку сили на величину Δ_{11} . Залежність між силою і переміщенням при статичному завантаженні виражається на графіку прямою лінією (рис.7.2). Робота, виконувана силою \mathbf{F}_1 , відповідає площі заштрихованої частини графіка

$$W_{11} = \frac{1}{2} F_1 \Delta_{11} \quad (7.4)$$

і називається дійсною роботою сили \mathbf{F}_1 .

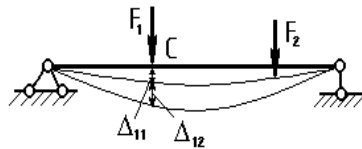


Рис. 7.1 Схема переміщень

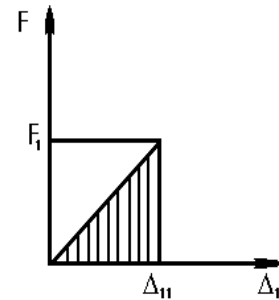


Рис. 7.2 Діаграма F_1 - Δ_1

Якщо до системи прикласти додаткову силу \mathbf{F}_2 , то точка прикладання сили \mathbf{F}_1 отримає додаткові переміщення Δ_{12} . Сила \mathbf{F}_1 при цьому залишається постійною і виконує роботу

$$W_{12} = F_1 \Delta_{12}. \quad (7.5)$$

Переміщення Δ_{12} може розглядатись в якості можливого переміщення точки C . Тоді робота W_{12} буде являтися **можливою роботою сили \mathbf{F}_1** .

Порівнюючи вирази (7.4) і (7.5), бачимо, що дійсна робота сили відрізняється від можливої роботи коефіцієнтом $1/2$.

7.3. Робота внутрішніх сил.

Для визначення роботи внутрішніх сил розглянемо ту ж балку на рис. 7.1. Так як система припускається лінійно деформованою, то для визначення зусиль і переміщень в ній можна скористатись принципом незалежності дії сил. Для цього розглянемо два стани балки (рис. 7.3): в першому діє сила \mathbf{F}_1 , а в другому - сила \mathbf{F}_2 .

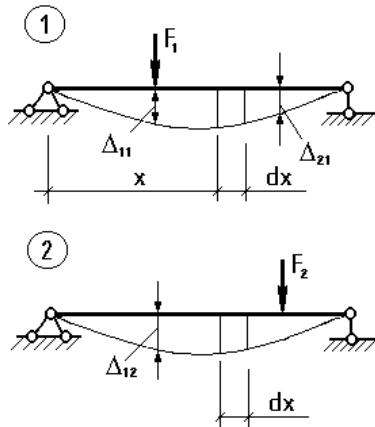


Рис. 7.3 Можливі стани

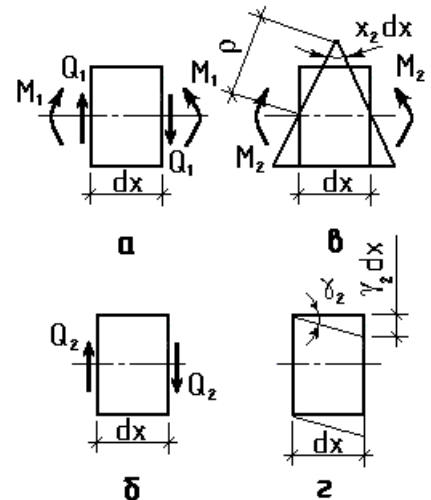


Рис. 7.4 Елемент балки:

а, б - внутрішні зусилля; в, г - деформації

Виділимо в балці на віддалі x від лівої опори елемент довжиною dx . В першому стані по гранях елемента діють внутрішні зусилля M_1 і Q_1 (рис. 7.4, а), в другому - M_2 і Q_2 (рис. 7.4,б). Це зусилля в межах елемента можна рахувати постійним.

Дія зусиль M_2 в другому стані викликає викривлення осі елемента так, що кривизна осі рівна X_2 , а кут між її гранями складає $X_2 dx$ (рис. 7.4, в). Поперечні сили Q_2 викликають зсув (рис. 7.4,г) так, що величина взаємного зміщення граней складає $Y_2 dx$.

Тепер неважко записати можливу роботу внутрішніх сил елемента в першому стані на переміщеннях другого стану:

$$dU_{12} = -M_1 X_2 dx - Q_1 Y_2 dx. \quad (7.6)$$

Знак «мінус» пояснюється тим, що зусилля M_1 і Q_1 є зовнішніми по відношенню до елемента, а внутрішні зусилля направлені назустріч їм, тобто в сторону зворотню переміщенням $X_2 dx$ і $Y_2 dx$. Деформації X_2 і Y_2 визначаються відомими з опору матеріалів формулами

$$X_2 = \frac{1}{\rho} = \frac{M_2}{EI}, \quad \gamma_2 = \mu \frac{Q_2}{GA}, \quad (7.7)$$

де $\mu = A \int (S_x / J_{x_B})^2 dA$ - коефіцієнт, враховуючий нерівномірність розподілу дотичних напружень і залежний від форми поперечного перерізу.

Підставляючи вираз для X_2 і Y_2 в (7.6), проінтегруємо обидві частини рівняння по всій довжині балки. В результаті отримаємо можливу роботу U_{12} :

$$U_{12} = - \int_{(l)} \frac{M_1 M_2}{EI} dx - \int_{(l)} \mu \frac{Q_1 Q_2}{GA} dx \quad (7.8)$$

В загальному випадку деформації плоскої системи в рівнянні (7.8) додається робота поздовжніх сил N_1 . При цьому слід врахувати, що осі системи можуть мати переломи і розгалуження, а функції внутрішніх сил - розриви. Тому, замінивши перемінну x перемінною s , пробігаючою осі системи, розіб'ємо інтеграл на суму інтегралів. Тоді можлива робота внутрішніх сил запишеться так:

$$U_{12} = - \sum \int_{(l)} \frac{M_1 M_2}{EI} ds - \sum \int_{(l)} \mu \frac{Q_1 Q_2}{GA} ds - \sum \int_{(l)} \mu \frac{N_1 N_2}{EA} ds. \quad (7.9)$$

По аналогії з (7.9) можна записати дійсну роботу внутрішніх сил першого стану U_{11} з врахуванням того, що деформації в цьому випадку визначаються зусиллями M_1 , Q_1 , N_1 і лінійно зростають при збільшенні навантаження:

$$U_{12} = -\frac{1}{2} \int \phi_{(l)} \frac{M_1^2 ds}{EI} - \frac{1}{2} \int \phi_{(l)} \mu \frac{Q_1^2 ds}{GA} - \frac{1}{2} \int \phi_{(l)} \mu \frac{N_1^2 ds}{EA}. \quad (7.10)$$

Надалі знак **(I)** в інтегралах, позначаючий, що інтегрування виконується по всій довжині кожної ділянки системи, будемо опускати.

7.4. Теорема про взаємність.

Розглянемо два стани пружної системи (рис. 7.3). Переміщення другого стану є можливими переміщеннями цієї системи. Тоді на основі принципу можливих переміщень отримуємо

$$W_{12} = F_1 \Delta_{12} = -U_{12} = \int \phi \frac{M_1 M_2 ds}{EI} + \int \phi \mu \frac{Q_1 Q_2 ds}{GA} + \int \phi \mu \frac{N_1 N_2 ds}{EA}. \quad (7.11)$$

Так як поздовжні сили в балці рівні нулю, то третій доданок у виразі роботи внутрішніх сил перетворюється в нуль.

З іншої сторони, переміщення першого стану також можуть розглядатися в якості можливих переміщень для сил другого стану.

Тоді

$$\begin{aligned} W_{21} &= F_2 \Delta_{21} = -U_{21} = \\ &= \int \phi \frac{M_2 M_1 ds}{EI} + \int \phi \mu \frac{Q_2 Q_1 ds}{GA} + \int \phi \mu \frac{N_2 N_1 ds}{EA}. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Праві частини виразів (7.11) і (7.12) відрізняються тільки порядком запису співмножників - внутрішніх зусиль, отже, $U_{12}=U_{21}$, $W_{12}=W_{21}$.

В загальному випадку система може мати декілька станів, відповідаючих різним навантаженням. Тоді для любых двох станів з номерами **i** і **k** справедливі співвідношення

$$U_{ik}=U_{ki}, W_{ik}=W_{ki}. \quad (7.13)$$

Ці рівності виражають **теорему про взаємність робіт (теорему Бетті)**, яка може бути сформульована так: *робота зовнішніх (внутрішніх) сил i-го стану системи на переміщеннях (деформаціях) k-го стану рівна роботі зовнішніх (внутрішніх) сил k-го стану тієї ж системи на переміщеннях (деформаціях) i-го стану.*

З теореми про взаємність робіт витікає ряд окремих теорем. Розглянемо випадок, коли пружна система завантажена одиничними силами $F_i=1$ і $F_k=1$. Застосовуючи до цих двох станів системи теорему про взаємність робіт і стандартні позначення переміщень, отримаємо рівність $F_i \cdot \delta_{ik}=F_k \cdot \delta_{ki}$, звідки

$$\delta_{ik}=\delta_{ki}. \quad (7.14)$$

Це рівняння виражає **теорему про взаємність переміщень (теорему Максвелла)**: *переміщення точки прикладання i-ї сили по її напрямку, викликане дією k-ї одиничної сили, рівне переміщенню точки прикладання k-ї сили по її напрямку, викликаному дією i-ї одиничної сили.*

Розглянемо тепер два стани пружної системи (рис. 7.5), в кожному з яких задано по одиничному переміщенню відповідно **i**-й і **k**-й в'язі. При цьому в решті в'язей статично невизначної системи виникають реакції, відповідно рівні в **k**-й в'язі **i**-го стану r_{ki} , в **i**-й в'язі **k**-го стану r_{ik} .

Ці реакції є зовнішніми силами і виконують роботу $W_{ik}=r_{ki} \Delta_k$, $W_{ki}=r_{ik} \Delta_i$. По напрямку решти реакцій переміщення відсутні, тому їх робота рівна нулю. На основі теореми про взаємність робіт отримуємо

або

$$\mathbf{r}_{ki}\Delta_k = \mathbf{r}_{ik}\Delta_i,$$

$$\mathbf{r}_{ik} = \mathbf{r}_{ki}. \quad (7.15)$$

Таким чином, *реакція i-ї в'язі, викликана одиничним переміщенням k-ї в'язі, рівна реакції в k-й в'язі, викликаний одиничним переміщенням i-ї в'язі (теорема про взаємність реакцій).*

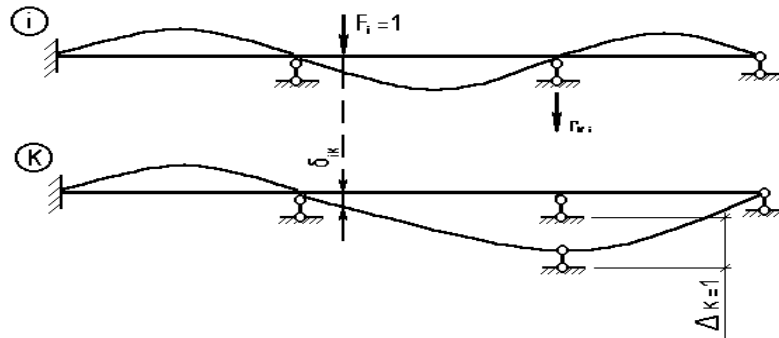


Рис. 7.5 Стани пружної системи

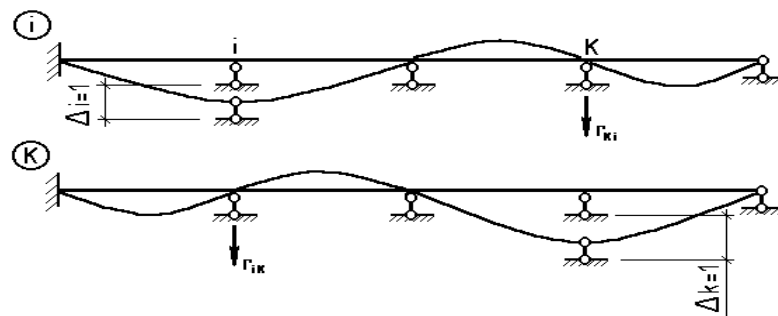


Рис. 7.6 Стани пружної системи

Нарешті окремий випадок теореми про взаємність робіт отримаємо при порівнянні двох станів системи, коли в одному з них прикладена одинична сила $F_i=1$, а в другому задано одиничне переміщення k -ї в'язі (рис. 7.6)

Так як в i -му стані в'язі залишаються нерухомими, то робота сил стану k рівна нулю: $W_{ki}=0$. Тоді повинна бути нульовою і робота W_{ik} :

звідки

$$W_{ik} = F_i \delta_{ik} + \mathbf{r}_{ki}\Delta_k = 0,$$

$$\delta_{ik} = -\mathbf{r}_{ki}. \quad (7.16)$$

Ця рівність є виразом *теореми про взаємність реакцій і переміщень: переміщення точки прикладання i-ї сили по її напрямку, викликане одиничним переміщенням k-ї в'язі, рівне по величині і протележне за знаком реакції в k-й в'язі, викликаний i-ю одиничною силою.*

Розглянуті теореми про взаємність знаходять широке застосування в розрахунках статично невизначених систем.

7.5. Обчислення переміщень по методу Мора.

Нехай потрібно визначити переміщення Δ_i деякої точки споруди від дії заданого навантаження (рис. 7.7,а). Розглянемо два стани цієї споруди:

- перший - дійсний стан при дії заданого навантаження (рис. 7.7,а);
- другий - допоміжний, або одиничний, стан в якому по напрямку шуканого переміщення прикладена одинична узагальнена сила (рис. 7.7,б).

Робота одиничної сили на переміщеннях заданого стану $W_{iF}=1 \cdot \Delta_i$ по теоремі Бетті рівна роботі W_{Fi} заданих сил на переміщеннях одиничного стану. Приймаючи до уваги, що $W_{Fi}=-U_{Fi}$, отримаємо на основі (7.9)

$$\Delta_i = \sum \oint \frac{M\bar{M}_i ds}{EI} + \sum \oint \mu \frac{Q\bar{Q}_i ds}{GA} + \sum \oint \mu \frac{N\bar{N}_i ds}{EA}, \quad (7.17)$$

де M, Q, N - зусилля від заданого навантаження; M_i, Q_i, N_i - зусилля від одиничної сили в допоміжному стані.

Формулу (7.17) називають **формулою Мора**. З її допомогою можна визначити переміщення від навантаження в плоскій системі. Для цього:

- 1) визначають зусилля M, Q, N від заданого навантаження;
- 2) по напрямку шуканого переміщення прикладають одиничну узагальнену силу;
- 3) знаходять зусилля M_i, Q_i, N_i від одиничної сили;
- 4) вираз зусиль підставляють в праву частину (7.17) і інтегруванням вздовж осей всіх елементів споруди визначають шукане переміщення.

В окремих випадках формула Мора приймає більш простий вигляд. Так при розрахунку ферм, в стержнях яких виникають тільки поздовжні сили, перші два інтеграли тотожно дорівнюють нулю. Тоді, розбиваючи останній інтеграл на суму інтегралів для окремих стержнів, отримуємо

$$\Delta_i = \sum_{k=1}^n \int (N\bar{N}_i ds / EA)_k, \quad (7.18)$$

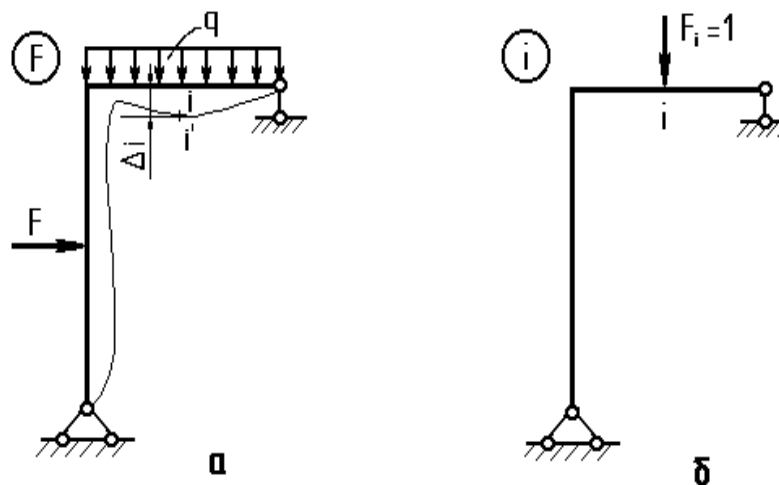


Рис. 7.7. Стани пружної системи:
а – заданий; б - одиничний

або з врахуванням постійності зусиль і жорсткостей в межах кожного стержня,

$$\Delta_i = \sum_{K=1}^n \int \left(\frac{N\bar{N}_i ds}{EA} \right)_K. \quad (7.19)$$

Тут сума розповсюджується на всі стержні, n - число стержнів.

На розрахунок систем з переважаючим згином - балок і рам - вплив поперечних і поздовжніх деформацій на переміщення точок незначний. Тому для таких систем враховують тільки перший інтеграл виразу (7.17), тобто

$$\Delta_i = \sum \int \frac{M\bar{M}_i ds}{EI}. \quad (7.20)$$

Якщо розбити систему на ділянки постійної жорсткості, то

$$\Delta_i = \sum \frac{1}{EI} \int M \bar{M}_i ds. \quad (7.21)$$

В деяких випадках обчислення інтегралу $\int M \bar{M}_i ds$ можна спростити. Наприклад, якщо на ділянці постійної жорсткості одна з епюр згинальних моментів прямолінійна, то інтеграл можна обчислити по **правилу Верещагіна**.

Для цього продовжимо лінійну епюру \bar{M}_i до перетину з віссю i в цій точці виберемо початок координат. На віддалі s ординати криволінійної і лінійної епюр відповідно рівні M і y . Виразимо y через кут нахилу α лінійної епюри: $y = s \cdot \operatorname{tg} \alpha$ і підставимо в інтеграл. Тоді

$$\int M \bar{M}_i ds = \int M_s \operatorname{tg} \alpha ds$$

або, виносячи $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{const}$, отримаєм

$$\int M \bar{M}_i ds = \operatorname{tg} \alpha \int M_s ds \quad (7.22)$$

Інтеграл в правій частині виразу (7.22) являє собою статичний момент S_z епюри M і координати S_0 її центра ваги. Статичний момент можна отримати інакше:

$$S_z = \int M_s ds = \omega s_0.$$

Підставляючи цю рівність в (7.22) отримаємо $\int M \bar{M}_i ds = \operatorname{tg} \alpha \cdot \omega s_0$. Але $s_0 \operatorname{tg} \alpha = y_0$, де y_0 - ордината лінійної епюри \bar{M}_i під центром ваги епюри M . Тоді приходимо до такої рівності:

$$\int M \bar{M}_i ds = \omega \cdot y_0. \quad (7.23)$$

Таким чином, інтеграл $\int M \bar{M}_i ds$ рівний добутку площі ω криволінійної епюри на розташовану під її центром ваги ординату y_0 прямолінійної епюри.

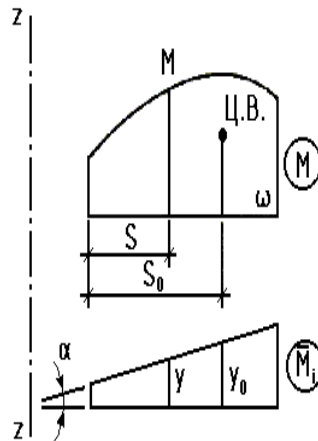


Рис. 7.8 До правила Верещагіна

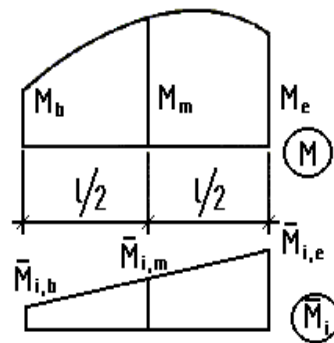


Рис. 7.9 До формули Сімсона

Таке обчислення інтеграла називають перемноженням епюр по правилу Верещагіна. Результат перемноження додатний, якщо обидві епюри, що перемножаються, M і \bar{M}_i розташовані з однієї сторони від осі (одного знаку), і від'ємний при розташуванні епюр по різні сторони осі.

Правило Верещагіна зручно застосовувати в тих випадках, коли площа і положення центра ваги криволінійної епюри знаходяться достатньо просто. В загальному випадку більш раціонально скористатись **формулою Сімсона** для числового інтегрування. У відповідності з цією формулою визначений інтеграл від функції $\phi(s)$ на відрізку $0 < s < l$ можна наближено знайти наступним чином:

$$\int \phi(s) ds \approx \frac{l}{6} \left[\phi(0) + 4\phi\left(\frac{l}{2}\right) + \phi(l) \right]. \quad (7.24)$$

Ця формула основана на заміні підінтегральної функції квадратною параболою, тому вираз (7.24) дає точний результат.

Застосовуючи формулу Сімпсона для перемноження двох епюр на ділянці постійної жорсткості, отримуємо:

$$\int M\bar{M}_i ds = \frac{l}{6}(M_b\bar{M}_{i,b} + 4M_m M_{i,e} + M_e M_{i,e}). \quad (7.25)$$

Тут індекси **в**, **м**, **е** позначають початок, середину і кінець ділянки довжиною l .

Як показує аналіз, формула (7.25) точна і у випадку, коли підінтегральна функція $M\bar{M}_i$ -кубічна парабола. Таким чином, в більшості практично зустрічаючихся епюр, коли одна з них лінійна, а друга парабола не більше другого степеня (при $q = \text{const}$), формула (7.24) дає точне значення інтеграла. В решті випадків застосування формули Сімпсона вимагає розбивання епюр на ділянки достатньо малої довжини.

7.6. Визначення переміщень від температурної дії.

Метод Мора може бути поширений на випадок, коли причиною переміщень в присутній системі являється зміна температури її елементів. Будемо рахувати, що переріз елементів (рис. 7.10,а) має вертикальну вісь симетрії і температура по висоті перерізу елементів мінється по лінійному закону. В цьому випадку зсуви від температурної дії відсутні. Приймаючи до уваги, що $\frac{M}{EI} ds$ являє собою взаємний кут повороту граней нескінченно малого елемента стержня $d\phi$, а $\frac{Nds}{EA}$ зміна довжини цього елемента (ϵds), формулу (7.17) запишемо так:

$$\Delta_{it} = \sum \bar{M}_i d\phi + \sum \bar{N}_i \epsilon ds. \quad (7.26)$$

Нехай зміна температури нижнього волокна стержня становить t_1 , а верхнього - t_2 (рис.7.10,б). Відповідні деформації елемента стержня довжиною ds при умові нерухомості його лівого кінця показані на рис. 7.10,в. Зміна температури нейтрального шару

$$t_0 = \frac{t_1|y_2| + t_2|y_1|}{h} \quad (7.27)$$

По рис. 7.10,в знаходимо $\epsilon ds = \alpha t_0 ds$.

$$d\phi = \frac{dt_1 ds - \alpha t_2 ds}{h} = \frac{\alpha(t_1 - t_2)}{h} ds. \quad (7.28)$$

Підставляючи вираз (7.28) у (7.26), отримуємо формулу Мора для температурних переміщень:

$$\Delta_{it} = \int \alpha \frac{t_1 - t_2}{h} \bar{M}_i ds + \int \alpha t_0 \bar{N}_i ds. \quad (7.29)$$

Якщо систему можна розбити на ділянки, в межах кожної з яких α , h , t_1 і t_2 постійні, то формула (7.29) набуває вигляду

$$\Delta_{it} = \int \alpha \frac{t_1 - t_2}{h} \bar{M}_i ds + \alpha t_0 \int \bar{N}_1 ds. \quad (7.30)$$

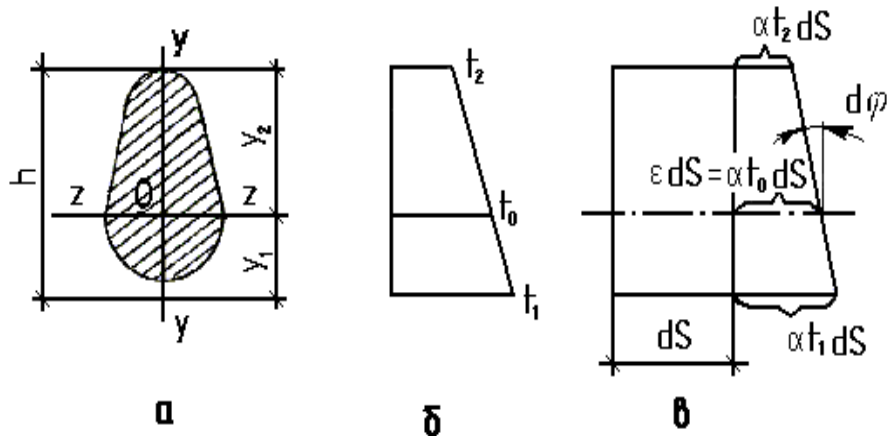


Рис.7.10 Визначення переміщень від температурної дії:
 а - поперечний переріз; б – температура; в - деформації

Тут інтеграли являють собою площі епюр M_i і N_i на окремих ділянках:

$$\omega_m = \int \bar{M}_1 ds, \quad \omega_n = \int \bar{N}_i ds. \quad (7.31)$$

Для перерізу з двома осями симетрії (вертикальною і горизонтальною)

$$|y_1| = |y_2| = \frac{h}{2}; \quad t_0 = \frac{t_1 - t_2}{2}$$

$$\Delta_{ti} = \sum \alpha \frac{t_1 - t_2}{2} \omega_{\bar{M}} + \sum \alpha \frac{t_1 - t_2}{2} \omega_{\bar{N}}. \quad (7.32)$$

При виводі формули (7.29) за t_1 прийнято зміну температури нижніх волокон, тобто тих волокон, які розтягнуті додатнім моментом. При цьому в формулах (7.31), (7.32) площі епюр повинні бути взятими зі своїми знаками.

7.7. Переміщення від осадки опор.

При зміщеннях опор (осадках) статично визначна споруда займає нове положення (рис.7.11) так, що її елементи не деформуються. Тоді переміщення точок споруди можна визначити з геометричних співвідношень - кінематичний метод. Наприклад, вертикальне переміщення т. **К** на рис. 7.11,а складає

$$\Delta_K = c_1 + l \operatorname{tg} c_3,$$

або, в силу малості переміщень

$$\Delta_K \approx c_1 + l c_3. \quad (7.33)$$

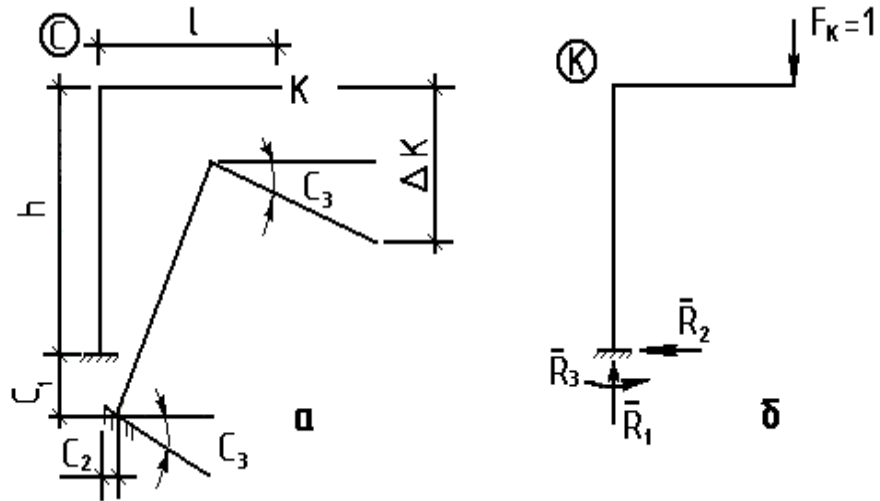


Рис. 7.11 Переміщення від осадки опор
а – переміщення; б – одиничний стан

В більш складних випадках для визначення переміщень зручно застосовувати статичний метод, оснований на використанні принципу можливих переміщень.

Покажемо застосування статичного методу на прикладі визначення вертикального переміщення т.К (рис.7.11,б). Для цього прикладемо по напрямку шуканого переміщення одиничну узагальнену силу F_k (рис. 7.11,б). Виникаючі при цьому реакції в опорних в'язях позначимо R_1, R_2, R_3 .

Так як при зміщеннях опор елементи споруди (рис. 7.11,а) не деформуються, то можлива робота внутрішніх сил одиничного стану (рис.7.11,б) на цих переміщеннях рівна нулю: $U_{k_c}=0$. Тоді на основі принципу можливих переміщень отримуємо

$$U_{k_c} + W_{k_c} = W_{k_c} = -\bar{R}_1 C_1 - \bar{R}_2 C_2 - \bar{R}_3 C_3 + F_k \Delta_k = 0,$$

звідки при $F_k=1$

$$\Delta_k = \sum \bar{R}_i C_i. \quad (7.34)$$

При використанні формули (7.34) слід враховувати, що добуток одиничної реакції \bar{R}_i на відповідне зміщення опорної в'язі c_i буде додатнім, якщо реакція і це зміщення мають протилежні напрямки і навпаки.

7.8. Приклади рішення задач

Приклад 1. Визначити вертикальне, горизонтальне переміщення і кут повороту перерізу незакріпленого кінця Г- подібної рами (рис. 7.12,а), якщо $EJ_p/EJ_c=2$, $q=2\text{кН/м}$, $F=8\text{кН}$.

Епюра згинальних моментів M_F (рис. 7.12,б) побудована для заданої рами в третій главі.

Для визначення лінійних вертикального і горизонтального переміщень в точці С прикладаємо одиничні сили $F_i=1$ і $F_j=1$ відповідно. Епюри згинальних моментів від дії названих одиничних сил показані на рис. 7.12,в,г.

Величини шуканих переміщень визначимо обчисленням інтеграла Мора для трьох ділянок рами (AD; DB; BC) рис. 7.12,б. Зауважимо, що при перемноженні епюр ділянкою рахується відрізок стержня, для якого ординати епюри згинальних моментів визначаються однією і тією ж функцією. На вантажній епюрі ділянки позначимо римськими цифрами 1, 2, 3.

Вертикальне переміщення точки С:

$$\Delta_C^B = \Delta_{iF} = \sum \int \frac{\bar{M}_i M_F}{EI} ds = \frac{3}{6EI} (-3 \cdot 15 - 4 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 9) + \frac{1}{EI} \cdot 9 \cdot 3 \cdot 3 + \frac{3}{6 \cdot 2EI} (9 \cdot 3 + 4 \cdot 2.25 \cdot 1.5 + 0 \cdot 0) = \frac{64.125}{EI}.$$

Горизонтальне переміщення точки С:

$$\Delta_C^r = \Delta_{jF} = \sum \int \frac{\bar{M}_j M_F}{EI} ds = \frac{3}{6EI} (15 \cdot 6 + 4 \cdot 3 \cdot 4.5 - 9 \cdot 3) - \frac{1}{EI} \cdot 9 \cdot 3 \cdot 1.5 = \frac{19.5}{EI}.$$

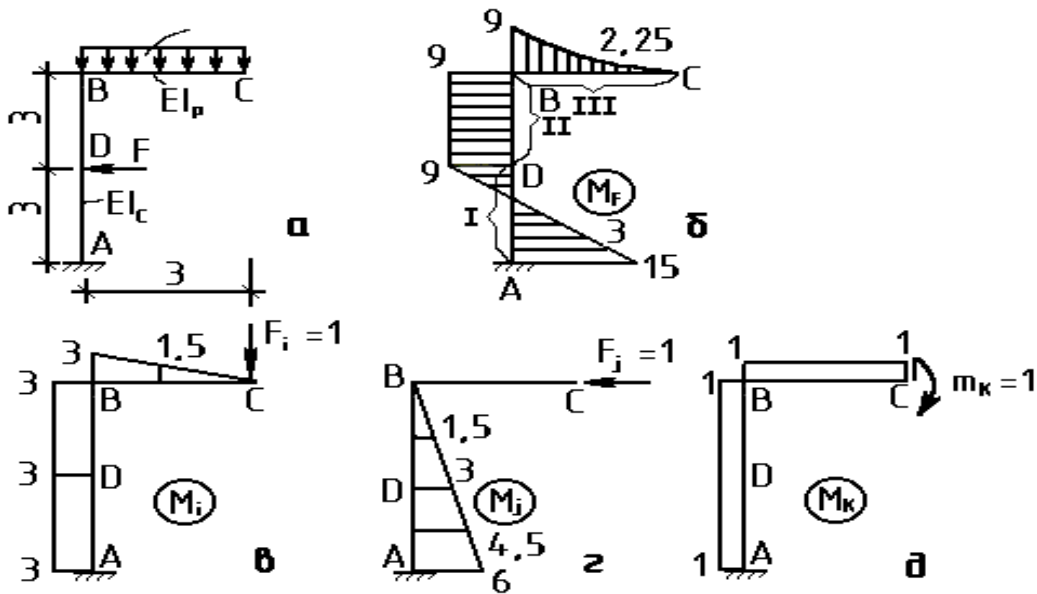


Рис. 7.12 Г- подібна рама:
а – рама; б - еюра моментів; в, г, д – одиничні стани

В обох випадках при обчисленні інтеграла Мора для другої ділянки використана формула Верещагіна. для решти ділянок застосовано формулу Сімсона.

На рис. 7.12,в зображені одиничний стан і відповідна йому еюра згинальних моментів для визначення кута повороту заданого перерізу. Величина кутового переміщення

$$\Delta\phi = \Delta_{KF} = \sum \int \frac{\bar{M}_K M_F}{EI} ds = \frac{3}{6EI} (-1 \cdot 15 - 4 \cdot 13 + 1 \cdot 9) + \frac{1}{EI} \cdot 9 \cdot 3 \cdot 1 + \frac{3}{6 \cdot 2EI} (9 \cdot 1 + 4 \cdot 2.25 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = \frac{20.5}{EI}.$$

При обчисленні переміщень в розглядуваному прикладі ми отримали додатні результати. Це говорить про те, що напрямки переміщень співпали з напрямками одиничних зусиль ($\bar{F}_i, \bar{F}_j, \bar{m}_k$), прикладених в одиничних станах.

Приклад 2. Вирахувати прогин середнього вузла нижнього пояса ферми (рис. 7.13), якщо площі поперечних перерізів A_1 вертикальних і похилих стержнів в два рази менші площ A_2 гори горизонтальних стержнів; $F=12\text{кН}$, $EA_1=200\text{МН}$.

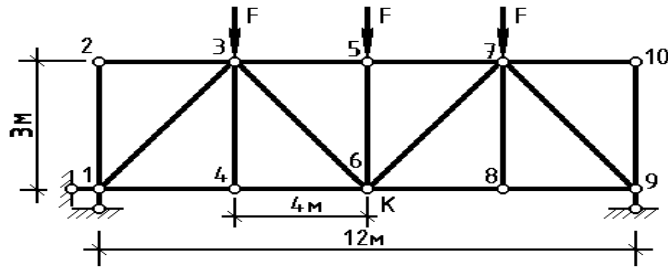


Рис. 7.13 Ферма

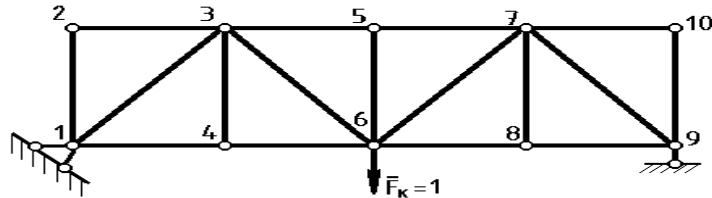


Рис. 7.14 Одиничний стан

Для визначення переміщення використаємо другий інтеграл формули Мора, який враховує вплив поздовжніх сил. Визначивши зусилля в елементах ферми від заданого навантаження і від вертикальної узагальненої сили, прикладеної у вузлі К (рис. 7.13 і рис. 7.14 відповідно; табл. 7.1), отримаємо:

Таблиця 7.1.

Стержень	N_F	N_K
1 - 2; 9 - 10	0	0
1 - 3; 7 - 9	$-2,5F$	$-5/6$
2 - 3; 7 - 10	0	0
1 - 4; 8 - 9	$2F$	$2/3$
3 - 4; 7 - 8	0	0
3 - 6; 6 - 7	$5F/6$	$5/6$
4 - 6; 6 - 8	$2F$	$2/3$
3 - 5; 5 - 7	$-8F/3$	$-4/3$
5 - 6	$-F$	0

$$\Delta_{KF} = \frac{1}{EA_1} \sum N_K N_F \cdot l \cdot \frac{A_1}{A} = \frac{1}{EA_1} \left(2 \cdot \frac{5}{6} \cdot 2,5F \cdot 5 \cdot \frac{A_1}{A_1} + 2 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} F \cdot 5 \frac{A_1}{A_1} + 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{8}{3} F \cdot 4 \cdot \frac{A_1}{A_2} + 4 \cdot 2F \cdot 4 \cdot \frac{A_1}{A_2} \right) = \frac{474F}{9EA_1} = \frac{474 \cdot 12 \cdot 10^3}{9 \cdot 200 \cdot 10^6} \text{ м} = 3,16 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

Приклад 3. Визначити на яку величину зміститься стріла підйому арки з затяжкою (рис. 7.15,а), якщо при виготовленні затяжки вона була зроблена на 0,03м коротшою ніж передбачалось проектом, тобто коротшою за l. По проекту $f=l/8$.

Для визначення вертикального переміщення шарніра С (що і є зміною f) прикладемо в ньому вертикальну зосереджену одиничну силу (рис. 7.15,б) і від її дії вираховуємо зусилля в затяжці - розпір.

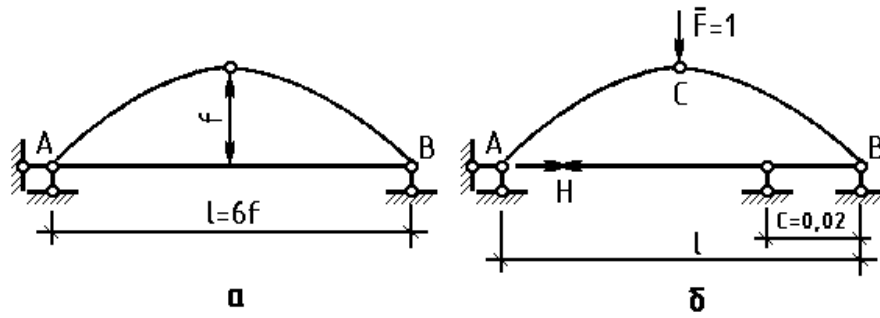


Рис. 7.15 До прикладу 3:
а – арка; б – одиничний стан

Як відомо, він дорівнює $H = M_c^0 / f = l / 4f$. Використовуючи формулу (7.34), отримуємо $\Delta f = -H \cdot c = -[l / (4F)] \cdot 0,03 = -0,0075l / F = -0,0075 \cdot 8 = -0,06 \text{ м}$.

Знак мінус перед добутком співмножників H і c поставлено тому, що розпір і переміщення опори мають один напрямок. Від'ємний результат вказує на те, що шарнір C підніметься (зміститься в сторону, протилежну прикладеній одиничній силі).

Приклад 4. Вирахувати горизонтальне переміщення ригеля і кут повороту на опорі B тришарнірної рами (рис. 7.16,а) якщо жорсткість всіх стержнів однакова $J = 100 \text{ МН} \cdot \text{м}^2$, $q = 30 \text{ кН/м}$, $l = 6 \text{ м}$, $h = 4 \text{ м}$.

Як і в попередньому прикладі для визначення переміщень будемо використовувати перший інтеграл формули Мора. Вантажна еюра згинальних моментів M_F показана на рис. 7.16,б. Відповідні одиничні стани і одиничні еюри згинальних моментів, зображені на рис. 7.16,в і рис. 7.16,г.

Горизонтальне переміщення ригеля:

$$\Delta_{iF} = \sum \int \frac{\bar{M}_i M_F}{EI} ds = \frac{4}{6EI} (0 \cdot 0 + 4 \cdot 120 \cdot 1 + 2 \cdot 120) + \frac{3}{6 \cdot 2EI} (2 \cdot 120 + 4 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 120) + \frac{1}{EI} \cdot 0,5 \cdot 4 \cdot 120 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{1280}{EI} = \frac{1280 \cdot 10^3}{100 \cdot 10^6} = 1,28 \cdot 10^{-2}.$$

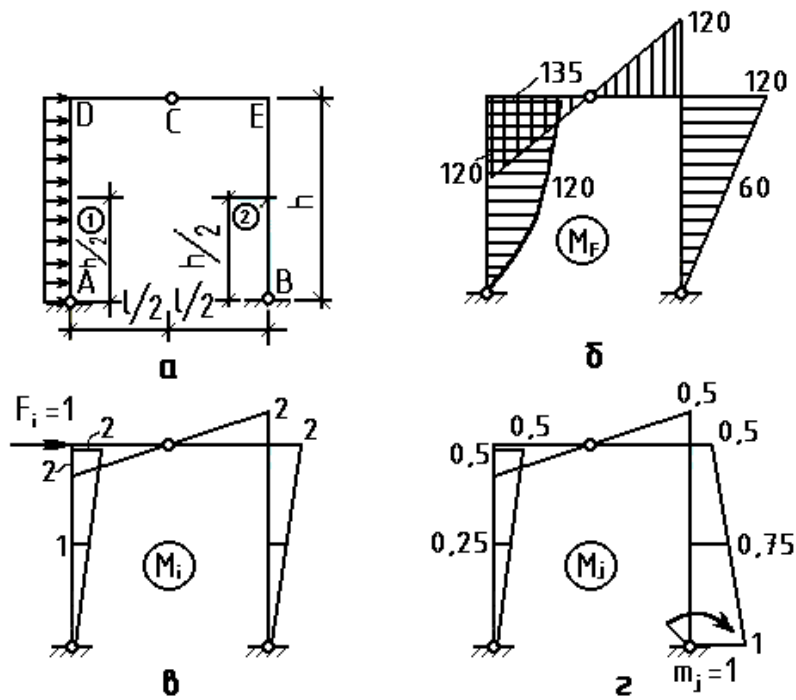


Рис. 7.16 До прикладу 4:
а – рама; б - епюра моментів; в, г – одиничні епюри

Кут повороту перерізу **B**:

$$\Delta\phi_B = \Delta_{Jf} = \sum \int \frac{\bar{M}_J M_F}{EI} ds = \frac{4}{6EI} (0 \cdot 0 + 4 \cdot 0.25 \cdot 120 + 0.5 \cdot 120) + \frac{6}{6EI} (0.5 \cdot 120 + 4 \cdot 0 \cdot 0 + 0.5 \cdot 120) + \frac{4}{6EI} = \frac{400}{EI} = \frac{400 \cdot 10^3}{100 \cdot 10^6} = 4,10 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

При обчисленні величин переміщень ділянки перемноження епюр в обох випадках розглядувались у слідуючій послідовності: AD, DE, BE.

Приклад 5. Визначити вертикальне переміщення опори **B** в рамі, зображеній на рис. 7.17,а, від заданої зміни температур, якщо $\alpha=10^{-5}$ град $^{-1}$, $h=0,1l$ (l - довжина стержня.)

Попередньо вирахуємо $h, t_0 = \frac{(t_1+t_2)}{2}$, $\Delta t = t_1 - t_2$ для кожної ділянки рами. Для стержня **AC**: $t_0=-5^\circ$, $\Delta t=10^\circ$, $h=0,4$ м; для **CD**: $t_0=10^\circ$, $\Delta t=40^\circ$, $h=0,3$ м; для **DB**: $t_0=-15^\circ$, $h=0,2$ м, $\Delta t=10^\circ$.

Будуємо одиничні епюри згинальних моментів і поздовжніх сил від одиничної вертикальної сили прикладеної в точці **B**. Вони приведені на рис. 7.17,б,в.

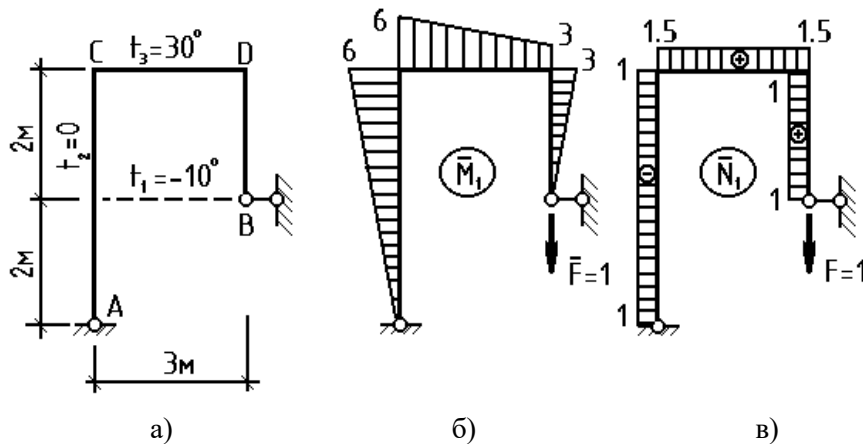


Рис. 7.17 До прикладу 5:
а – рама; б, в – одиничні епюри

Використовуючи формулу для визначення температурних переміщень, знаходимо шукане переміщення:

$$\Delta_{Bt} = \alpha \left(\frac{10}{0.4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 + \frac{40}{0.3} \cdot \frac{6+3}{2} \cdot 3 - \frac{10}{0.2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 \right) = 1985\alpha = 1985 \cdot 10^{-5} = 1,985 \cdot 10^{-2}.$$

Оскільки результат додатний, то опора В опуститься по напрямку прикладеної одиничної сили.

Вирішити самотийно наступні задачі:

Задача 1. Визначити вертикальне переміщення точки D шарнірно - консольної балки (рис.7.18) від заданого зміщення опори А, якщо $c_1=2\text{см}$, $c_2=4\text{см}$, $c_3=0,01$ рад.

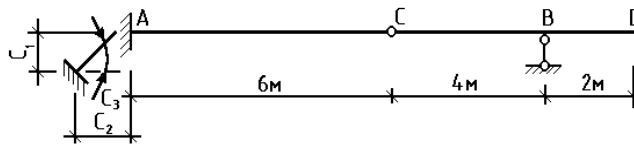


Рис. 7.18 До задачі 1

При розв'язуванні поставленої задачі задані значення c необхідно підставляти в формулу (7.34) вираженими в метрах і радіанах, якщо при визначенні реакцій розміри елементів системи вимірюються в метрах, а також пам'ятати правило знаків при коритсуванні згаданою формулою.

Задача 2. Визначити взаємне лінійне переміщення і взаємний кут повороту перерізів 1 і 2 тришарнірної рами, розглянутої у прикладі 6 (рис. 7.19,а)

Щоб розв'язати поставлену задачу потрібно побудувати епюри згинальних моментів для одиничних стержнів, зображених на рис. 7.20,а,б.

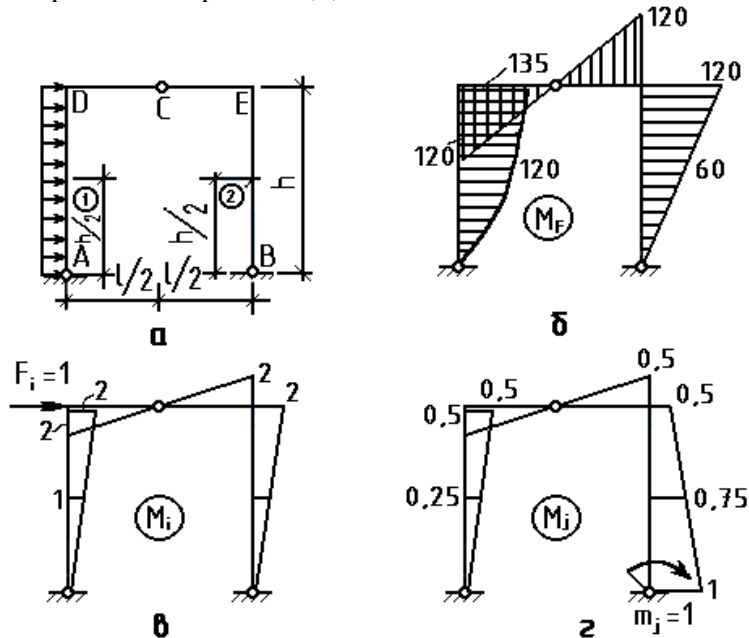


Рис. 7.19 До задачі 2:
а – рама; б – грузова епюра ; в,г - одиничні епюри

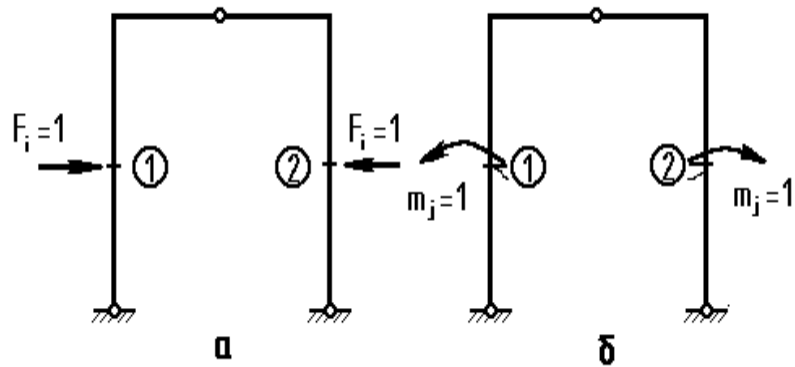


Рис. 7.20 До задачі 2:
а, б – одиничні стани

7.9. Питання до самоконтролю знань

1. Для яких цілей необхідно визначати переміщення? Що називається переміщенням ?
2. Що таке можливе переміщення ?
3. Що розуміють під узагальненою силою і узагальненим переміщенням?
4. Як залежить переміщення від навантаження в лінійно деформованих системах?
5. Як визначається дійсна робота зовнішніх сил ?
6. В чому різниця між дійсною і можливою роботою ?
7. Як визначається можлива робота внутрішніх сил ?
8. Як формулюється теорема Бетті про взаємність робіт ?
9. Сформулюйте теорему про взаємність переміщень; теорему про взаємність реакцій; теорему про взаємність реакцій; теорему про взаємність переміщень і реакцій ?
10. Як записується формула Мора ?
11. Які два стани системи необхідно розглядати при визначенні переміщень за формулою Мора ?
12. Якого вигляду набуває формула Мора для систем з переважаючим згином і якого для ферм ?
13. Яким чином обчислюється інтеграл Мора ?
14. Коли можна застосовувати правило Верещагіна ? Формулу Сімпсона ?

ЛИТЕРАТУРА

1. Строительная механика. Под ред. Бутенко Ю.И.-К. - Вища школа, 1989.
2. Смирнов А.Ф., Александров А.В., Лашенников Б.Я., Шапошников Н.Н. Строительная механика. Стержневые системы. - М.: Стройиздат, 1981.
3. Смирнов А.Ф., Александров А.В., Лашенников Б.Я., Шапошников Н.Н. Строительная механика. - М.: Стройиздат, 1984.
4. Дарков А.В., Шапошников Н.Н. Строительная механика. - М.: Высш. шк., 1986.-608 с.
5. Строительная механика. Руководство к практическим занятиям. Под ред. Ю.И. Бутенко. - К.: Вища школа, 1984.
1. Бутенко Ю.И. Строительная механика. К., Вища школа, 1989.
2. Клейн Г.Г. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики. М.: Высшая школа, 1980.
3. Дорошук Г.П., Трач В.М. Будівельна механіка / Навчальний посібник. -К.: ІЗМН, 1996, - 520с.

Навчальне видання

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
з дисципліни
"Будівельна механіка" ч.3

(для здобувачів вищої освіти спеціальності 192
«Будівництво та цивільна інженерія»)
(Електронне видання)

Укладач:

Медвідь Іван Іванович

Оригінал - макет

І.І.Медвідь

Підписано до друку _____

Формат $60 \times 84 \frac{1}{16}$. Папір типограф. Гарнітура *Times*.

Друк офсетний. Умов. друк. арк. _____. Обл.-вид.арк. _____.

Тираж ____ прим. Вид. № _____. Замовл. № _____. Ціна договірна.

**Видавництво Східноукраїнського національного університету
імені Володимира Даля**

Свідоцтво про реєстрацію: серія ДК № 1620 від 18.12.03 р.

Адреса університета: вул. Іоанна Павла 2, 17

м. Київ, 01042, Україна

e-mail: vidavnictvoSNU.ua@gmail.com.