МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
СХІДНОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені ВОЛОДИМИРА ДАЛЯ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

з дисципліни

"МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ І ОПТИМІЗАЦІЯ ЕЛЕКТРОННИХ СИСТЕМ "

(для здобувачів вищої освіти спеціальностей 172 «Телекомунікації та радіотехніка»,171 «Електроніка»)

(електронне видання)

З А Т В Е Р Д Ж Е Н О
на засіданні кафедри
електронних апаратів
Протокол №6 від 29.02.2024

м.Київ, 2024

УДК 681.3

Конспект лекцій з дисципліни «Методи математичного моделювання і оптимізації електронних систем» (для здобувачів вищої освіти спеціальності 172 «Телекомунікації та радіотехніка», 171 «Електроніка») (електронне видання) /Уклад. Ж.Г. Самойлова.-Київ: вид-во- СНУ ім.В. Даля, 2024. – 94 с.

В курсі лекцій з дисципліни «Методи математичного моделювання і оптимізації електронних систем» розглянуто застосування математичного апарату для опрацювання математичних моделей різних систем, процесів і явищ при розв'язуванні теоретичних і практичних задач у професійній діяльності, а також при дослідженні закономірностей, яким підпорядковуються реальні процеси в сфері електроніки. Конспект лекцій може бути використаний студентами при підготовці к заняттям.

Укладач: . Ж.Г. Самойлова, к.т.н., доц.

Рецензент: . М.Г. Лорія, д.т.н., проф.

Зміст

Вступ

Конструкторська технологія загалом є цілеспрямований процес, що полягає у створенні об'єкта, відповідного технічним завданням. При цьому виникає низка проблем:

1. Повністю формалізувати і запрограмувати творчий процес розробки електронної апаратури (ЕА) в даний час не вдається, тому пошук та розробка виробу супроводжується отриманням великої кількості проміжних варіантів, з яких вибирається найкращий. Головну роль відіграє досвід розробника, його інтуїція та здоровий глузд. Звідси виникають елементи суб'єктивізму, що породжують можливість відходу оптимальних варіантів.

2. Кількість інформації, використовуваної розробки ЕА, зростає, звідси випливає проблема величезної трудомісткості, пов'язана з відбором і пошуком потрібної інформації.

3. Нова технологія має бути економічно виправданою, тобто приносити економічний ефект. За сучасних темпів розвитку техніки ефективність нової розробки має бути не менш ніж на 20-25% вищою за стару.

4. У процесі проектування ЕА зустрічаються труднощі суто математичні, пов'язані з великими труднощами опису різноманіття зв'язків у конструкції та процесів, які у ній. Тому вирішення завдань на основі математичних методів завжди містить ряд ідеалізацій і спрощень, які спотворюють результат математичних рішень. Тому значна частина завдань вирішується з урахуванням евристичних методів, використовують досвід, знання, інтуїцію розробника.

На вирішенні цих проблем зосереджено основні зусилля розробника.

Оскільки при розробці ЕА бере участь безліч людей, які використовують інформацію та засоби автоматизації проектування, то можна сказати, що люди, інформація та технічні засоби утворюють єдину організаційну систему, що має спільну мету: розробити ЕА відповідно до технічного завдання та мінімальних витрат. Для ефективного вирішення завдань конструювання треба володіти знаннями про методи аналітичного дослідження та управління системою. З цією метою використовуються математичні апарати дослідження операцій.

Метою дослідження операцій є кількісне обґрунтування застосовуваних рішень щодо керування у системі.

1. Основні принципи дослідження операцій

1. Основні етапи операційного дослідження.
2. Типові класи завдань дослідження операцій.

При всьому різноманітті змісту конкретних робіт з вивчення операцій кожне операційне дослідження проходить такі основні етапи:

1) Постановка задачі;
2) Побудова математичної моделі;
3) Знаходження рішення;
4) Перевірка та коригування моделі;
5) Реалізація знайденого рішення практично.

Розглянемо ці етапи докладніше.

Етап постановки задачі. Спочатку завдання формулюється з погляду замовника. Під час аналізу системи завдання поступово уточнюється. Проводиться ретельне вивчення об'єкта, що досліджується, вивчаються фактори, що впливають на результати дослідження процесу. Виділяється сукупність суттєвих чинників, уточнюється остаточно змістовна (словесна) постановка завдання.

Етап побудови математичної моделі здійснюється на основі змістовної постановки задачі (процес формалізації постановки задачі). У випадку завдання формулюється як завдання оптимізації, тобто знаходження мінімуму (максимуму)

$$\min(\max)\ (Q(x,y)); g_j(x,y) \le b_j;\ j=1\ldots m, \tag{1}$$

де $Q(x,y)$– цільова функція;

x - вектор керованих змінних;

y - вектор некерованих змінних;

g_j - функція обмеження;

b_j - величина обмежень.

Етап знаходження рішення. Залежно від виду цільової функції та обмежень використовуються ті чи інші методи теорії оптимізації (теорії математичного програмування):

• лінійне програмування (якщо Q і g_j- лінійні функції щодо змінної x);

• нелінійне програмування (якщо Q чи (і) g_j– нелінійні функції);

• динамічне програмування (якщо цільова функція має спеціальну структуру, будучи або адитивною $Q(x,y) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x,y)$, або мультиплікативною $Q(x,y) = \prod_{i=1}^{m} f_i(x,y)$;

• стохастичне програмування (коли вектор увипадковий);

• дискретне програмування (якщо змінну x накладено умова дискретності, наприклад, цілісності);

• евристичне програмування – група методів, в основі яких лежать деякі евристичні прийоми. Ця група методів найчастіше застосовується, коли застосування інших методів утруднене або неможливе через величезний обсяг обчислень.

Найбільш простими та розвиненими є методи лінійного програмування.

Етап перевірки та коригування моделі. Модель лише частково відображає процес, тому потрібна перевірка адекватності моделі та реального процесу. Перевірку проводять порівнянням передбаченої поведінки з фактичним за зміни значень некерованих змінних. Якщо величина відхилення виявляється більш допустимою, $\varepsilon(y) \geq \varepsilon_{\text{дод}}$, то це означає, що втрачені головні фактори та взаємозв'язки і потрібно провести коригування моделі.

Етап реалізації знайденого рішення. Це окреме самостійне завдання. Отримане математичне рішення одягають в змістовну форму і представляють замовнику у вигляді інструкцій та рекомендацій.

2. Класифікація методів математичного моделювання

Математичне моделювання дозволяє інженеру-досліднику експериментувати з об'єктами у тих випадках, коли на реальному об'єкті це здійснити практично неможливо чи недоцільно. Сутність моделювання полягає у заміні вихідного технологічного об'єкта його математичною моделлю та подальшому вивченні. Цей метод пізнання, конструювання, проектування об'єкта поєднує у собі переваги як теорії, і експерименту. Робота не з самим об'єктом (явленням, процесом), а з його моделлю дозволяє відносно швидко і без істотних витрат досліджувати його властивості та поведінку у різних ситуаціях. Імітаційні експерименти з моделями об'єктів дозволяють досить глибоко вивчати об'єкти із найменшими витратами.

Основними видами моделей, що використовуються в інженерній діяльності, є матеріальні (фізичні) та ідеальні моделі. При матеріальному моделюванні дослідження об'єкта виконується із застосуванням його матеріального аналога, який відтворює основні фізичні, геометричні, функціональні та динамічні характеристики. До цих аналогів належать різні макети, скульптури, зменшені моделі літаків та кораблів, лабораторні установки.

Ідеальне моделювання ґрунтується не на матеріалізованій аналогії об'єкта і є первинним по відношенню до фізичного. Спочатку формується у свідомості людини ідеальна модель, та на її основі будується матеріальна.

Основними видами матеріального моделювання є натурне та аналогове. При натурному моделюванні реальному об'єкту ставлять у відповідність його збільшений або зменшений аналог, який дозволяє виконати дослідження із застосуванням наступного перенесення властивостей явищ, що вивчаються з моделі на об'єкт. Метод натурного моделювання найбільше широко використовується в суднобудуванні, авіабудуванні, автомобілебудуванні та інших областях. Наприклад, при створенні нової конструкції літака істотного значення набуває експеримент з натурною моделлю, що випробовується в аеродинамічній трубі.

В основу аналогового моделювання покладено збіг математичних описів різних об'єктів. При певних припущеннях аналогічними вважаються процеси передачі тепла в тілі, дифузії домішок та інших.

Ідеальне моделювання ділиться на два основні типи: інтуїтивне та наукове. Наприклад, інтуїтивна модель навколишнього світу може розглядати життєвий досвід будь-якої людини. Ідеальне моделювання ґрунтується на інтуїтивному уявленні про об'єкт дослідження, що не піддається формалізації або не потребує її.

Наукове моделювання є логічно обґрунтованим моделюванням, що використовує мінімальну кількість припущень, взятих як гіпотези на основі спостережень за досліджуваним об'єктом.

Спостерігаючи за об'єктом, дослідник формує уявний образ об'єкта, ідеальну модель, яка називається когнітивною (що сприяє пізнанню). Подання когнітивної моделі природною мовою називається змістовною моделлю.

За функціональною ознакою та цілями змістовні моделі поділяються на описові, пояснювальні та прогностичні. Описовою моделлю є будь-який опис об'єкта. Пояснювальна модель здійснює отримання відповіді питанням: чому щось відбувається? Прогностична модель визначає майбутню поведінку об'єкта.

Концептуальна модель - це змістовна модель, при формулюванні якої використовуються поняття та уявлення предметних галузей знання, що займаються вивченням об'єкта моделювання. Концептуальні моделі поділяються на логіко-семантичні, структурно-функціональні та причинно-наслідкові.

Логіко-семантичною моделлю є опис об'єкта із застосуванням термінів та визначень, які відповідають предметній галузі знань, що включає логічно несуперечливі факти. При структурно-функціональному моделюванні об'єкт описується як цілісна система, яку розбивають на окремі елементи або підсистеми.

Причинно-наслідкова модель застосовується для пояснення та прогнозування поведінки об'єкта. Ця модель орієнтована на встановлення основних взаємозв'язків між складовими елементами досліджуваного об'єкта; встановлення, як зміна одних чинників впливає на стан компонентів моделі; визначення того, яким чином працюватиме модель в цілому і чи адекватно вона описуватиме динаміку важливих для дослідника параметрів.

Формальні моделі є представленням концептуальних моделей з використанням однієї чи кількох формальних мов (наприклад, мов математичних теорій, універсальної мови моделювання (UML) чи алгоритмічних мов).

Когнітивна, змістовна та формальна моделі утворюють три взаємопов'язані рівні моделювання.

3. Модель системи

Система – об'єкт, що складається з деякої безлічі елементів, взаємодіючих один з одним таким чином, що знання поведінки кожного з елементів ще не дозволяє зробити висновки про поведінку всієї системи загалом.

Модель (від лат. modulus – «захід, аналог, зразок») – це спрощене уявлення системи явищ та/або процесів, що у ній протікають.

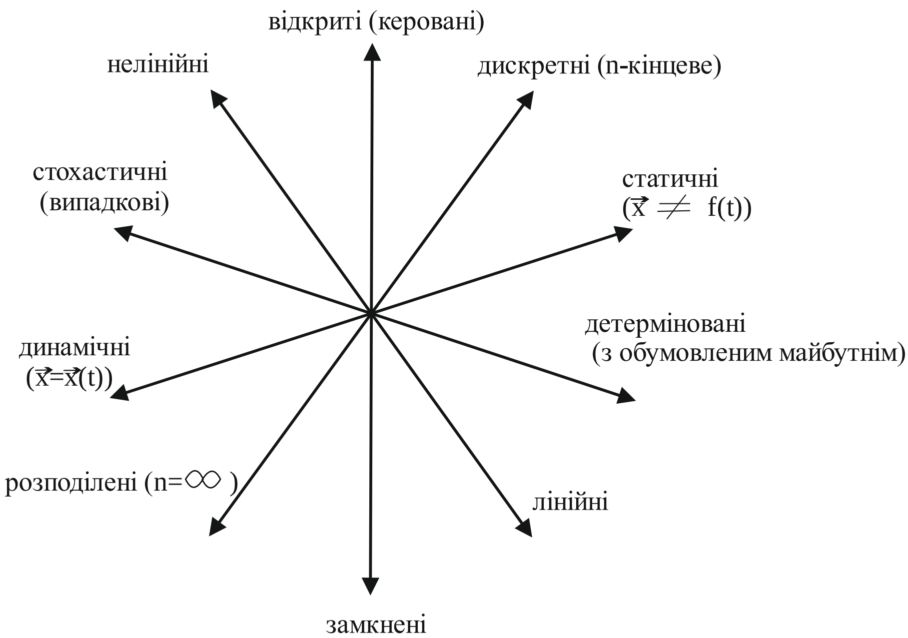


Рисунок 1. Приклад класифікації моделей системи (дихотомічний підхід)

4. Математичне моделювання

Одним із видів знакового моделювання виступає математичне моделювання.

Математичним моделюванням є наукове знакове формальне моделювання, у якому опис об'єкта здійснюється з використанням мови математики, а дослідження моделі здійснюється з допомогою будь-яких математичних методів.

Переваги математичного моделювання в порівнянні з натурним експериментом полягають у наступному:

- економічність (збереження ресурсів реальної системи);
- можливість моделювання нереалізованих у природі об'єктів (на етапах проектування);
- можливість виконання режимів, небезпечних або важковідтворюваних у реальних умовах;
- простота багатоаспектного аналізу;
- можливість виявлення загальних закономірностей;
- універсальність технічного та програмного забезпечення виконуваної роботи (комп'ютери, системи програмування та пакети прикладних програм широкого призначення).

Будь-яка математична модель, орієнтована на проведення наукових досліджень, дає можливість за вихідними даними встановити значення, що цікавлять дослідника, параметрів модельованого явища або об'єкта.

Під математичною моделлю розуміється будь-який оператор A, який дає можливість за наявними значеннями вхідних параметрів X визначити вихідні значення параметрів об'єкта моделювання Y:

$$A: X\text{-->}Y,\ X_e Q_x,\ Y_g Q_y, \qquad (2)$$

де Q_x і Q_y - безлічі допустимих значень вхідних і вихідних параметрів для об'єкта, що моделюється. Залежно від об'єкта, що моделюється, елементами множин O_x і Q_y є будь - які математичні об'єкти (числа, вектори, тензори, функції, множини та інші). Оператором виступає як деяка функція, що зв'язує вхідні та вихідні значення, так і відображення, що є символічним записом системи алгебраїчних, диференціальних, інтегродиференціальних або інтегральних рівнянь.

З розвитком обчислювальної техніки поширені інформаційні моделі, що є автоматизованими: довідники, виконані з допомогою систем управління базами даних.

Широкий розвиток методів математичного моделювання та областей їх застосування призвело до появи великої кількості моделей різного типу.

Математичні моделі поділяються на класи в залежності від таких факторів:

- складності об'єкта моделювання (прості та об'єкт-система);

- оператора моделі (алгоритм, алгебраїчні, звичайні диференціальні рівняння, диференціальні рівняння у приватних похідних та інші);

- вхідних та вихідних параметрів (класифікація представлена на рисунку 1);

- способу дослідження моделі (аналітичні (алгебраїчні, наближені), алгоритмічні (чисельні, імітаційні));

- цілей моделювання. Вирізняють дескриптивні моделі, призначені для визначення законів зміни параметрів моделі; оптимізаційні моделі, які використовуються для визначення оптимальних (найкращих) з точки зору деякого критерію параметрів процесу, що моделюється, або для пошуку оптимального (найкращого) режиму управління процесом; управлінські моделі, що використовуються для прийняття ефективних управлінських рішень у різних сферах діяльності.

5. Класифікація аналітичних методів математичного моделювання

Аналітичні методи реалізації моделі дають з меншими обчислювальними витратами досліджувати властивості об'єкта, застосовуючи широко розвинені математичні методи аналізу аналітичних функцій.

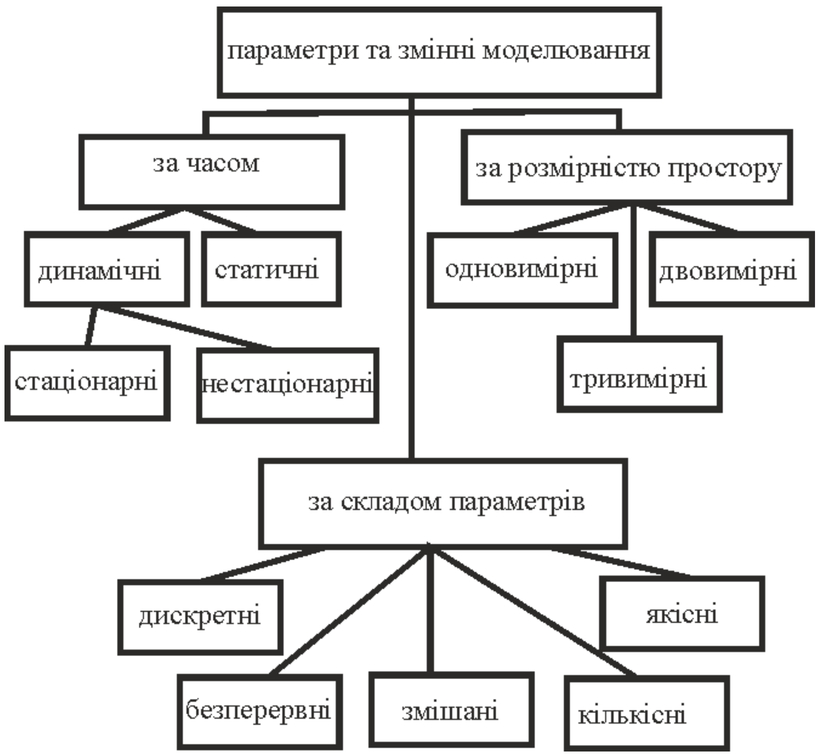


Рисунок 2. Класифікація математичних моделей за параметрами

Останнім часом величезний інтерес до аналітичних методів при реалізації моделей обумовлений появою пакетів математичних обчислень (Derive, MatLab, Mathcad, Maple, Mathe-matica, Scientific Workplace та інших). Число розв'язуваних завдань цими пакетами постійно зростає (елементарна математика, символьні операції з поліномами, похідними та інтегралами, з векторами та матрицями, завдання теорії поля та векторного аналізу, метод кінцевих елементів та інші). Використання даних програмних засобів дозволяє спростити процедуру отримання аналітичного рішення, і подальший аналіз отриманого рішення з допомогою різних візуалізаторів.

Проте існуючі математичні методи дають можливість отримати аналітичні рішення лише щодо нескладних математичних моделей у невеликому діапазоні значень параметрів. У багатьох випадках при дослідженні моделей необхідно застосовувати алгоритмічні підходи, що дають змогу отримати лише наближені значення параметрів, що шукаються.

При чисельному моделюванні набір математичних співвідношень моделі замінюється кінцевим аналогом, що досягається дискретизацією вихідних співвідношень, саме переходом від функцій безперервного до функцій дискретного аргументу. Після дискретизації вихідної задачі здійснюється побудова обчислювального алгоритму, що дозволяє за кінцеве число кроків отримати розв'язання дискретної задачі. Ступінь наближення визначених за допомогою чисельного методу параметрів моделі залежить як від похибок самого методу, пов'язаних із заміною моделі її дискретним аналогом, так і від помилок округлення, що з'являються при реалізації будь-яких розрахунків на комп'ютері. Важливою вимогою до обчислювального алгоритму є необхідність отримання рішення задачі з певною точністю за кінцеве число кроків.

Наразі коло питань, що стосуються розробки та застосування чисельних методів, а також створення на їх основі обчислювальних алгоритмів, виділилося в окремий розділ - обчислювальну математику.

Якщо в разі чисельного моделювання дискретизації піддавалася отримана система математичних співвідношень, то в разі імітаційного моделювання на окремі елементи розбивається сам об'єкт дослідження. У такому випадку система математичних співвідношень для об'єкта системи в цілому не записується, а замінюється деяким алгоритмом, що моделює її поведінку та враховує взаємодію один з одним моделей окремих елементів системи. Моделі окремих елементів можуть бути як аналітичними, так і алгебраїчними.

Алгоритмічні моделі, що застосовують як чисельний, і імітаційний підхід, не дають можливість отримати розв'язання завдання в аналітичному вигляді, що ускладнює процес аналізу результатів моделювання. Важливою перевагою алгоритмічних моделей є відсутність принципових обмежень на складність моделі, що дає можливість використовувати їх для дослідження систем довільної складності. Застосування математичної моделі, отриманої алгоритмічними методами, подібно до виконання експериментів з реальним об'єктом, тільки замість реального експерименту з об'єктом здійснюється обчислювальний експеримент з його моделлю.

6. Види моделювання

Моделювання на стадії експерименту відбувається при виявленні залежностей результату від найістотніших факторів. Це дозволяє узагальнити результат експериментування як деякої математичної формули.

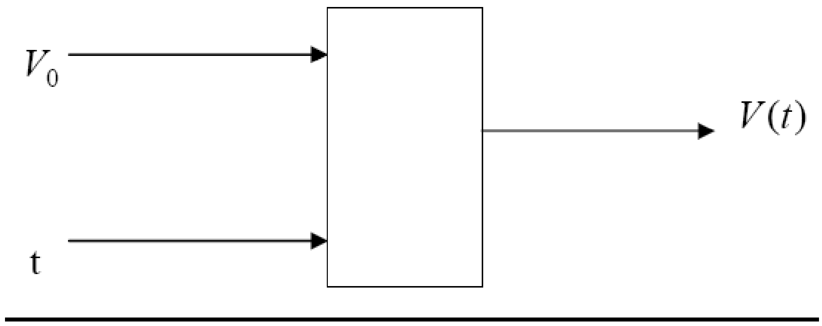


Рисунок 3. Модель "чорна скринька"

Фізичне моделювання у заміні вивчення об'єкта чи явища його еквівалентним аналогом, які мають схожу фізичну природу (опис коливань в LC-контурі з урахуванням описи коливань математичного маятника).

Аналітичне моделювання – використання низки припущень та спрощень (дифузія з нескінченного джерела).

Чисельне моделювання - отримання необхідних кількісних даних про поведінку систем або пристроїв будь-яким відповідним чисельним методом (методи Ейлера або Рунг Кутта).

7. Основні математичні моделі

Вектор стану - впорядкований набір змінних, що однозначно і без надлишку описують стан системи в будь-який момент її спостереження.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \vec{x} \in R^n \tag{3}$$

Фазовий простір - це багато всіх можливих значень вектора станів системи

1.Модель статичної замкнутої автономної системи:

$$\vec{f}(\vec{x})=0 \tag{4}$$

x − вектор стану; f(x) – сукупність скалярних рівнянь зв'язків (векторна функція векторного аргументу).

2. Динамічна замкнута автономна система

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}) \tag{5}$$

3. Модель динамічної замкнутої системи

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\overrightarrow{x}, t) \tag{6}$$

4. Модель динамічної керованої системи

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\overrightarrow{x}, \vec{u}, t) \tag{7}$$

5. Регульована динамічна система

$$\begin{cases} \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}, \vec{u}, t) \\ \frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{g}(\vec{x}, \vec{u}, t) \end{cases} \tag{8}$$

g (x, u, t) - рівняння зв'язків суб'єкта управління (регулятора).

6. Модель лінійної динамічної керованої системи

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \hat{A}(t) \cdot \vec{x} + \hat{B}(t) \cdot \vec{u} \tag{9}$$

7. Модель стохастичної динамічної системи

$$\frac{d\vec{\xi}}{dt} = \hat{f}\left(\vec{\xi}, t\right) \cdot \vec{x} + \vec{\eta}(t) \qquad (10)$$

η – вектор малих випадкових обурень; ξ(t) - вектор обуреного стану системи

8. Диференційне рівняння

Диференціальне рівняння у приватних похідних (ДРПП):

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, U, \frac{\partial U}{\partial x_1}, \frac{\partial U}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial U}{\partial x_n}, \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}, \dots\right) = 0 \qquad (11)$$

тут U - залежна змінна (функція), x_i - незалежні змінні

Порядком рівняння називається порядок старшої приватної похідної.

Квазилінійне рівняння — лінійне рівняння щодо всіх старших похідних від невідомої функції.

Лінійне рівняння — лінійне рівняння щодо функції та всіх її приватних похідних.

Теоретично диференціальних рівнянь, початкові і граничні умови - це доповнення до основного диференціального рівняння (звичайному чи приватних похідних), що задає його поведінка у початковий час чи кордоні аналізованої області відповідно.

9. Початкові умови

Початкові умови (ПУ) — умови, що визначають значення шуканої функції (і можливо, деяких її похідних) за одного значення незалежної змінної (наприклад, у початковий момент часу, тобто при t = 0).

Якщо в рівнянні присутня тільки перша похідна за часом (як у рівнянні теплопровідності), достатньо задати одну початкову умову, наприклад, розподіл температури в початковий момент.

Якщо ж у рівнянні є друга похідна за часом (хвильове рівняння), то необхідні два НУ, наприклад, положення струни в початковий момент і швидкість руху її точок.

10.Граничні умови

Граничні умови (ГУ) — умови, що визначають значення шуканої функції (і, можливо, деяких її похідних) межі просторової області, всередині якої шукається рішення (при різних значеннях незалежних змінних).

ГУ бувають трьох типів:

- задаються значення функції на кордоні - завдання Діріхле,

- задаються значення похідної функції нормалі до кордону - завдання Неймана,

- задаються умови Робена:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_G + kU_G = F \tag{12}$$

змішане граничне завдання.

Завдання математичної фізики описують реальні фізичні процеси, тому їх постановка повинна задовольняти наступним природним вимогам:

— рішення має існувати у якомусь класі функцій;

— рішення має бути єдиним у якомусь класі функцій;

— рішення повинно безперервно залежати від даних (початкових і граничних умов, вільного члена, коефіцієнтів і т.д.).

11.Приклад (моделювання процесу дифузії)

Перший закон Фіка:

$$J = -D\nabla N \tag{13}$$

j – щільність потоку атомів; D – коефіцієнт дифузії; оператор диференціювання; N - концентрація атомів

Другий закон Фіка:

$$\frac{dN}{dt} = D\,\frac{d^2N}{dx^2} \tag{14}$$

Дифузія зазвичай проводиться у два етапи: загін та розгін.

Двом етапам дифузійного процесу відповідає два рішення рівняння Фіка за різних граничних умов:

- перший етап – дифузія з постійною поверхневою концентрацією або дифузія з нескінченного джерела;

- другий етап – дифузія з обмеженого джерела.

12. Приклад (дифузія із нескінченного джерела)

Мета етапу - впровадження у напівпровідник точно контрольованої кількості домішки.

Початкова умова для вирішення другого закону Фіка:

$$N(x,t)|_{t=0}x>0=0 \tag{15}$$

Гранична умова:

$$N(x,t)|_{t\geq 0}x>0=N_0 \tag{16}$$

Рішення рівняння Фіка:

$$N(x,t) = N_0 erfc\frac{x}{2\sqrt{Dt}} \tag{17}$$

erfc y - доповнює до функції помилки erf y:

$$erfc\, y = 1 - \mathrm{erf}\, y = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^y e^{-z^2}dz \tag{18}$$

В результаті за час t у тверде тіло надійде кількість домішки:

$$Q = \int_0^t J(t)dt = 2N\sqrt{\frac{Dt}{\pi}} \tag{19}$$

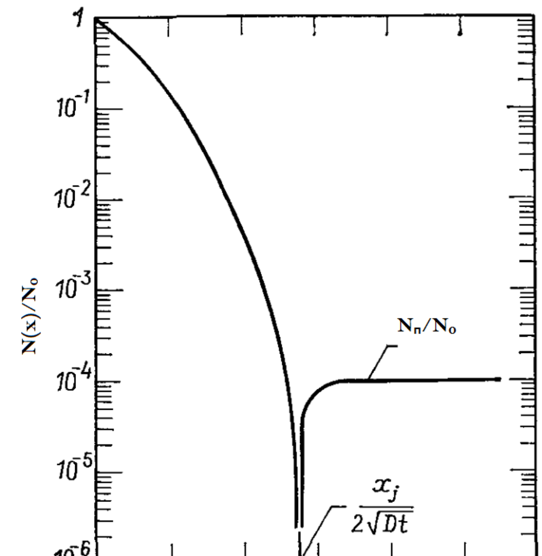


Рисунок 4. Залежність концентрації атомів домішки від кількості домішки

13. Адекватність моделі

Адекватність математичної моделі – це відповідність результатів обчислювального експерименту поведінці реального об'єкта. Цю відповідність слід оцінювати з погляду цілей дослідження. Тому можливі різні підходи оцінки адекватності різних моделей.

Точність означає, що узагальнена характеристика неузгодженості відповідного параметра моделі та оригіналу ($\Delta U = U_{моделі} - U_{оригіналу}$) має бути не більшою, ніж заздалегідь задане значення прийнятної похибки $\Delta U_{дод}$.

Несуперечність має на увазі ідентичний характер зміни відповідних властивостей, тобто. ідентичний вид основних властивостей функціональних залежностей на окремих ділянках, як-то: зростання, спадання, екстремуми, опуклість тощо.

Для перевірки адекватності необхідно мати:

— вичерпну інформацію про реальний об'єкт;

— результати контрольного обчислювального експерименту;

— критерій оцінки точності математичної моделі;

— критерій перевірки несуперечності математичної моделі.

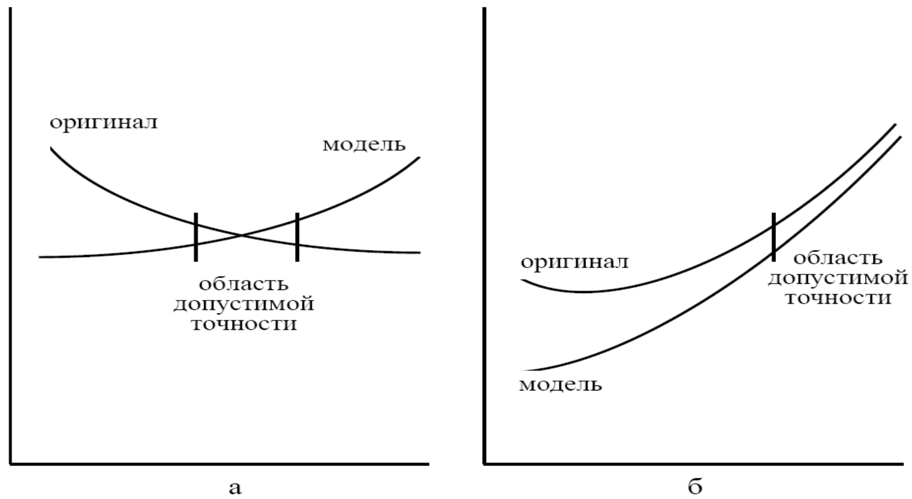


Рисунок 5. Області допустимої точності: а- обмеженою з двох сторін, б- обмеженою з одного боку

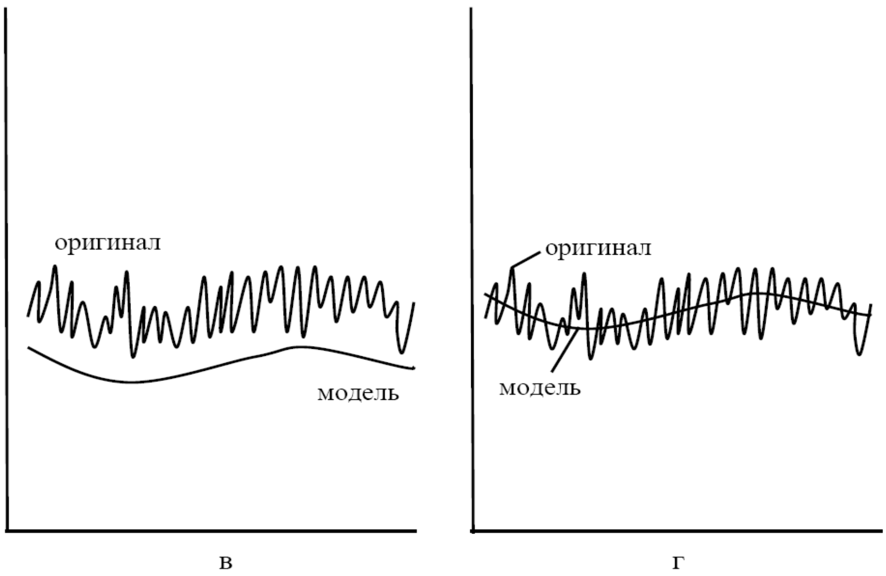


Рисунок 6. Збіг результатів моделювання: а- обмежений з одного боку, б-обмежений з двох сторін

14. Точність моделі

Оцінюючи похибки моделі проводять зіставлення двох кривих:

1) $y = f(x)$ - модель;

2) $y_0 = f_0\ (x_0)$ - об'єкт моделювання.

Похибку оцінюють у n точках, відстань між якими вибирають рівномірним або відповідно до змісту розв'язуваної задачі. Наприклад, на крутих ділянках кривої ці точки можна брати густіше, на пологих ділянках – рідше.
Вектор абсолютних похибок:

$$\Delta y = y - y^0 \tag{20}$$

Вектор похибок несе найдокладнішу інформацію про точність моделі, проте на практиці похибку оцінюють частіше як норму цього вектора:

$$E = ||\Delta y|| \tag{21}$$

Максимум модуля похибки.

$$E = \max_k |\Delta y_k| \tag{22}$$

Широко поширений варіант і за умовчанням, коли не вказують, яким чином визначено похибку, мають на увазі цей варіант. Він гарантує, що в процесі використання моделі ніколи не зустрінеться похибка більше Е. Недолік такого критерію проявляється у випадку, коли обидві криві проходять близько на більшій частині інтервалу зміни х, але в одному місці, наприклад, на кордонах, мають різкий викид.

$$E = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|\Delta y_k| \tag{23}$$

Середня похибка.

Варіант використовується рідше, але може оцінювати, яка більш правдоподібно співвідноситься зі змістом завдання моделювання. Недоліком є надто оптимістична оцінка похибки, яка може бути в кілька разів менша за максимальну.

$$E = \frac{1}{m}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|\Delta y_k|^2} \tag{24}$$

Середньоквадратична похибка.

Варіант поширений досить широко, і дає оцінку, яка в сенсі "оптимістичності" займає проміжне положення між першими двома, оскільки після зведення окремих компонентів похибки квадрат зростає вага компонент з більшою похибкою. Головною перевагою середньоквадратичної оцінки похибки є сумісність із поняттям середньоквадратичної похибки вимірювань та гладкість функції, яка дозволяє використовувати цю оцінку в задачах мінімізації похибки та в аналітичних дослідженнях.

Абсолютна похибка:

$$\Delta y = y - y^0 \quad (25)$$

Відносна похибка:

$$\gamma_y = \frac{y - y^0}{y^0} \quad (26)$$

Приведена похибка:

$$\widetilde{\gamma_y} = \frac{y - y^0}{y_m^0} \quad (27)$$

y^0_m – верхня межа динамічного діапазону або середнє (максимальне) значення діапазону

У тих випадках, коли заздалегідь невідомо, яке з визначень похибки більше підходить за змістом задачі, що вирішується, можна користуватися поняттям модуля вектора похибки:

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2} \quad (28)$$

Перевагою цієї оцінки є те, що жодна з складових не може перевищити оголошене значення похибки, а в граничних окремих випадках, коли один з компонентів набагато більше інший отримуємо наведені вище визначення похибок по x або по y.

15. Етапи моделювання

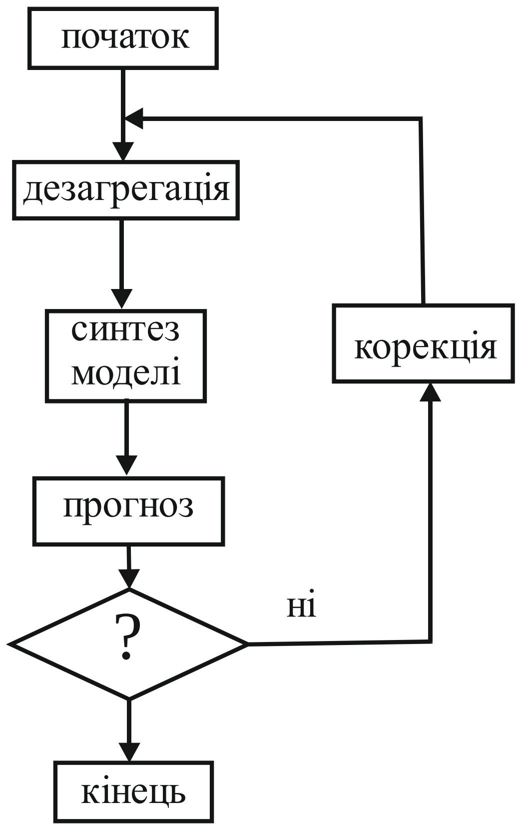


Рисунок 7. Етапи математичного моделювання

16. Аналітичні методи розв'язування

Методи розв'язання системи рівнянь можуть бути аналітичними та чисельними.

Аналітичні методи – методи поділу змінних, дозволяють отримати рішення у вигляді формули або групи формул, аналіз яких дає наочне уявлення про вплив параметрів на характеристики динамічних процесів тощо.

Основний недолік аналітичних методів у складності математичного опису, наприклад, визначення форми впливу, завдання граничних умов для складних систем.

17. Чисельні методи розв'язання

Розв'язання задачі можливе лише з кінцевим числом невідомих. Тому для чисельного розв'язання задачі математичної фізики, для якої характерна зміна деякої величини в деякій просторово-часовій області, її необхідно приблизно замінити деяким дискретним аналогом. Для цього в просторово-часовій ділянці вибирають кінцеву кількість точок. Усю сукупність точок називають сіткою, а кожну окрему точку – вузлом сітки. Диференціальне рівняння, граничні та початкові умови замінюють співвідношеннями між значеннями шуканої величини у вузлах сітки (процедура дискретизації).

Через війну дискретизації завдання математичної фізики виходить система рівнянь, яка дає точні значення невідомої функції у вузлах сітки. Рівняння, що зв'язують значення шуканої величини у вузлах сітки, будують на основі загальних принципів, які дозволяють приблизно замінити диференціальні рівняння та крайові умови співвідношеннями між значеннями величини у прилеглих вузлах. Ці принципи дозволяють сподіватися лише на те, що при збільшенні кількості вузлів та при зменшенні відстаней між сусідніми вузлами помилка, що виникає при дискретизації, необмежено буде зменшуватися.

Конструкції сучасних виробів електронної техніки найчастіше є складними системами з безліччю різних зв'язків. Для такої системи складно побудувати розрахункову модель, досить просту і водночас яка добре відбиває фізичні та динамічні властивості.

Системи можуть містити безліч неконтрольованих параметрів. При складанні та розв'язанні рівнянь, що описують поведінку системи, виникає ряд математичних труднощів.

Основу чисельних методів розрахунків динамічних параметрів конструкції становлять:

— метод кінцевих різниць (МКР);

— метод кінцевих елементів (МКЕ);

— різні варіаційні методи.

18. Метод кінцевих різниць

Метод кінцевих різниць - чисельний метод розв'язання диференціальних рівнянь, заснований на заміні похідних різницевими схемами.

Для розрахунку системи будується спрощена модель-сітка.

У цій моделі елементи системи з безперервно розподіленими параметрами замінюються набором дискретних елементів із зосередженими параметрами. Сусідні вузли з'єднуються між собою зв'язками.

Розрахунок моделі ведеться за допомогою кінцево-різницевих рівнянь. Рівняння утворюють з диференціальних рівнянь за допомогою заміни в них приватних і звичайних похідних відносин кінцевих прирощень змінних, що розглядаються.

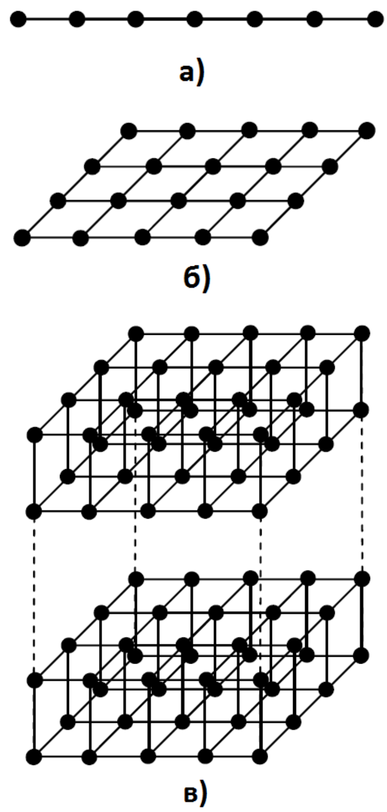


Рисунок 8. Дискретні моделі елементів системи: а) одновимірні; б) двовимірні; в) тривимірні

19. Метод кінцевих елементів

Вихідна область визначення функції розбивається сіткою, у випадку, на відміну МКР нерівномірної, окремі ділянки – кінцеві елементи.

Шукана безперервна функція замінюється шматково-безперервною, визначеною для безлічі кінцевих елементів. Найчастіше для цього використовуються поліноми. Для одномірних функцій кінцевими елементами є відрізки прямої, для двовимірних областей найчастіше кінцеві елементи представляються як трикутників.

Переваги методу:

1. Метод дозволяє будувати зручну схему формування системи рівнянь алгебри щодо вузлових значень шуканої функції. Наближена апроксимація рішення за допомогою простих поліноміальних функцій та всі необхідні операції виконуються на окремому типовому елементі. Потім проводиться об'єднання елементів, що призводить до необхідної системи рівнянь алгебри.

2. Кожне окреме рівняння алгебри, отримане на основі методу кінцевих елементів, містить незначну частину вузлових невідомих від загального числа (багато коефіцієнтів в рівняннях алгебраїчної системи рівні нулю, що значно полегшує її рішення).

3. Підходить для вирішення континуальних та дискретних завдань.

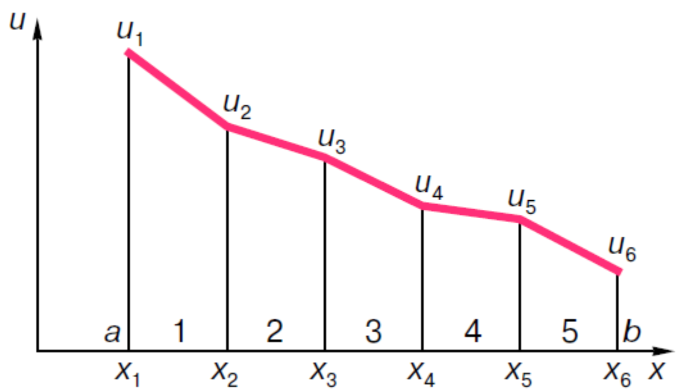


Рисунок 9. Розбиття одновимірної функції

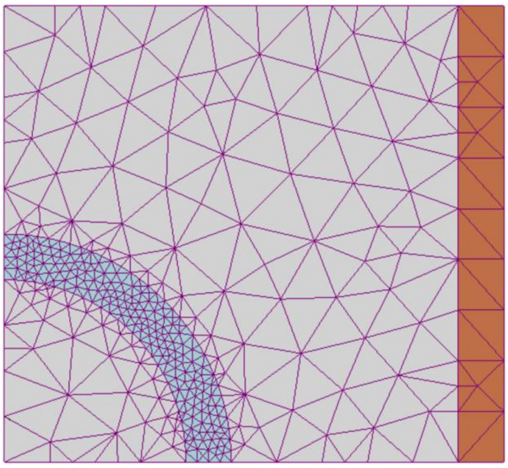


Рисунок 10. Багатовимірне розбиття

Алгоритм:

1) Розбиття заданої області на кінцеві елементи;

2) Вибір апроксимуючої функції у вигляді полінома для кожного елемента;

3) Об'єднання отриманих поліноміальних функцій у систему рівнянь алгебри;

4) Вирішення отриманої системи рівнянь та визначення вектора вузлових значень функції (переміщень, прискорень).

20. Класифікація математичних моделей елементної бази електронних пристроїв

Математичне моделювання конструкцій та технологічних процесів виробництва електронних засобів необхідне для аналізу технічного об'єкта до його проектування з метою забезпечення чутливості вихідних характеристик до зміни параметрів об'єкта, що досліджується, і вибору найбільш ефективного варіанту його побудови, а також для прогнозу розвитку досліджуваного технічного об'єкта.

Для моделювання завдань аналізу конструкцій технічних об'єктів важливо, чи відноситься процес до стаціонарного (зовнішні та внутрішні збурення практично не змінюються у часі) або до нестаціонарного (зовнішні та внутрішні збурення змінюються у часі), оскільки методи їх вирішення різні.

Для стаціонарного процесу завдання визначення реакції системи називають крайовим завданням. Для вирішення даних завдань необхідно знайти величину реакції та її розподіл у конструкції. Наприклад, завдання визначення розподілу температур в електронному блоці при певному режимі роботи і незмінній температурі навколишнього середовища. Крайовими умовами в даному випадку будуть температура навколишнього середовища або густина потоку теплової енергії обміну з навколишнім середовищем.

Для нестаціонарних процесів завдання визначення реакції системи називають завданням із початковими умовами. У цих завданнях визначення реакції системи потрібно знати її поведінку в початковий і наступний проміжки часу.

Розробка та дослідження елементної бази сучасних мікроелектронних систем стосується вирішення задач математичної фізики, до яких відносяться задачі теплопровідності, дифузії, електростатики та електродинаміки, задачі про течію рідини, про розподіл щільності електричного струму в провідному середовищі, задачі про деформації твердих тіл та багато інших. Завдання аналізу процесів у конструкціях зазвичай зводиться до дослідження різних полів (теплових та електромагнітних) або механічних явищ (вібрації та розподіл напруги у конструкції). Дані процеси описуються за допомогою диференціальних рівнянь, таким чином їх аналіз зводиться до вирішення диференціального рівняння в приватних похідних.

У загальному випадку лінійне диференціальне рівняння у приватних похідних другого порядку з n незалежними змінними має вигляд:

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} A_{\alpha\beta}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \sum_{\alpha=1}^{n} B_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + C(x)u = f(x) \qquad (29)$$

де x = [x_1,x,,...,x_n] - вектор (матриця-рядок) незалежних змінних; і - потрібна функція незалежних змінних; A(x), B(x), C(x), f(x) - деякі речові функції незалежних змінних.

Рівняння (29) можна привести до однієї із трьох стандартних канонічних форм. За співвідношенням значень A(x) рівняння відносять до еліптичних, параболічних або гіперболічних у точці x.

Для диференціальних рівнянь у приватних похідних другого порядку з двома незалежними змінними x, у які можуть бути представлені у вигляді

$$A_{\alpha}(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+A_{xy}(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+A_{yy}(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+B_x(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+ \quad (30)$$

$$+B_y(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+C(x,y)=f(x,y)$$

тип диференціального рівняння визначається знаком виразу, званого дискримінантом

$$D(x,y)=A^2(x,y)-4A_{xx}(x,y)A_{yy}(x,y) \quad (31)$$

Якщо D(x, y)<0, диференціальне рівняння вважається еліптичним у точці (x,y).

Якщо D(x, y)=0, диференціальне рівняння вважається параболічним у точці (x,y).

Якщо коефіцієнти A_{xx}, A, A_{yy} постійні і значення D не залежить від (x,y), то від знаку D залежить, яким буде рівняння: еліптичним, гіперболічним або параболічним.

Деякі стаціонарні фізичні процеси описуються рівняннями еліптичного типу, зокрема рівнянням Пуассона, яке для трьох напрямків координат записується наступним чином:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(A(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(A(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(A(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial z}\right)=f(x,y,z) \quad (32)$$

де u = u(x, y, z) - потрібна функція; A(x, y, z), f (x, y, z) - деякі функції незалежних змінних.

Найбільш важливим рівнянням прикладної фізики еліптичного виду, що часто зустрічається, є рівняння Лапласа, що описує стаціонарний стан поля в області без внутрішніх джерел і стоків, що є окремим випадком рівняння Пуассона для рівної нулю правої частини. Загальний вигляд рівняння Лапласа має вигляд:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \qquad (33)$$

де u = u(x, y, z) - потрібна функція.

В операторній формі рівняння Лапласа має вигляд

$$\Delta u=0 \qquad (34)$$

де $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа.

Багато нестаціонарних фізичних процесів описуються рівняннями параболічного типу. Цей вид рівняння, який вирішується для однорідної області, відомий як рівняння дифузії або рівняння Фур'є:

$$\Delta u = K\frac{\partial u}{\partial t} \qquad (35)$$

де K - постійна часу дифузії. Величина K характеризує швидкість згасання процесу переходу їх у стаціонарний процес і визначається параметрами системи.

Рівняння Фур'є застосовується для розрахунку теплового балансу температури конструкції. У таких випадках отримуємо рівняння теплопровідності:

$$\lambda\Delta u = C\frac{\partial u}{\partial t} \qquad (36)$$

де λ і C - відповідно коефіцієнти теплопровідності та теплоємності середовища. Ліва частина диференціального рівняння (36) характеризує теплопередачу між елементами конструкції теплопровідністю, а права частина - нагрівання або охолодження конструкції.

Багато фізичних процесів пов'язані з появою коливань у певному середовищі. Наприклад, коливання струни, мембрани, поширення звукових коливань та інших. Вони описуються хвильовим рівнянням, які стосуються рівнянь гіперболічного типу. У найпростішому випадку хвильові диференціальні рівняння можна записати в такий спосіб:

$$\Delta u = K\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{37}$$

де К - постійна величина, що визначається параметрами системи та описує період поширення збурень від однієї точки простору до іншої.

При розрахунках елементів конструкцій мікро- та наноелектро-механічних систем (МЕМС та НЕМС) існує два основних підходи: аналітичний та моделювання за допомогою сіткової апроксимації середовища, в даному випадку досліджуваний об'єкт є сітковою апроксимацією. При цьому виділяють методи кінцевих елементів (МКЕ), методи контрольних обсягів (МКО) та методи кінцевих різниць (МКР).

Аналітичні методи найчастіше використовують для конструкцій простої форми. Однак сучасні конструкції є складними системами, для яких важко побудувати розрахункову модель.

В чисельних методах немає особливих перешкод на вирішення складних конструкцій. Типовим їм є заміна вихідних диференціальних рівнянь алгебраїчними шляхом дискретизації. До основних недоліків даних методів можна віднести: необхідність розв'язання великої системи рівнянь алгебри; наявність похибки під час дискретизації; необхідність отримання нового рішення за будь-якої зміни конструкції.

Чисельні методи необхідно використовувати тоді, коли аналітичні методи не підходять для вирішення задачі. В даний час чисельні методи набули широкого розвитку. Для розрахунку конструкцій МЕМС і НЕМС за допомогою методу кінцевих різниць передбачається пошук розв'язання системи рівнянь дискретної моделі у вигляді єдиної для всієї області розв'язання задач сіткової функції - функції, визначеної лише на кінцевій множині точок координатної та тимчасової сіток. Метод кінцевих різниць виходить з апроксимації похідних, які входять у вихідні диференціальні рівняння їх дискретними аналогами. До безперечної переваги даного методу належить його висока ефективність та простота реалізації, а також наочність процедури дискретизації, що дозволяє будувати схеми високого порядку точності. Однак ці переваги, як правило, реалізуються лише при застосуванні структурованої сітки, що обмежує даний метод випадками порівняно простих геометрічно розрахункових областей.

Основна ідея методу контрольних обсягів полягає в наступному: розрахункову область розбивають на деяке число областей, що не перетинаються (контрольних обсягів) таким чином, що кожна вузлова точка міститься в одному контрольному об'ємі.

Диференціальне рівняння інтегрують за кожним контрольним обсягом. Для знаходження інтегралів застосовують шматкові профілі, які характеризують зміну функцій, що входять до складу рівнянь між вузловими точками. Через війну отримують дискретний аналог диференціального рівняння, куди входять значення функцій у кількох вузлових точках. Одна з важливих властивостей у тому, що в ньому закладено точне інтегральне збереження таких величин, як маса, кількість руху. Метод контрольних обсягів придатний для дискретизації рівнянь як у структурованих, і на неструктурованих сітках з різною формою осередків, що цілком вирішує проблему складної геометрії розрахункової області. Слід зазначити, що застосування неструктурованих сіток є досить трудомістким у алгоритмічному відношенні та при реалізації та ресурсомісткості у процесі розрахунків, особливо у разі тривимірних завдань. На рисунку 11 наведено результат моделювання розподілу температур у процесі зростання кристалів сапфіру на неструктурованій сітці методом контрольних обсягів.

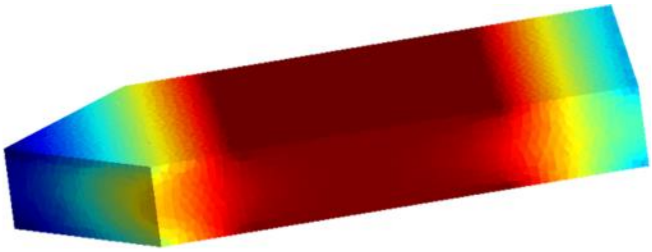


Рисунок 11. Результати моделювання розподілу температур у процесі зростання кристалів сапфіру методом контрольних обсягів на неструктурованій сітці

21. Математичні моделі елементної бази

Напівпровідникові прилади - діоди, тиристори, транзистори - одержують на основі обробки кремнієвих пластин з формуванням електронно-діркових n-p-переходів. Фундаментальні рівняння фізики твердого тіла, що характеризують рух дірок та електронів у напівпровіднику, дуже складні та потребують точного знаходження великої кількості фізичних параметрів. Ці параметри мають випадкову природу і є проведенням дорогих спеціальних експериментів. До випадкових також належать параметри технологічних процесів, що впливають на електрофізичні характеристики приладів. Використання спрощених моделей без відображення зв'язку між характеристиками та фізичними процесами не дозволяє отримати дані, необхідні для розробки цих приладів. Поліпшення якості технологічних процесів виробництва та обробки кремнію дає можливість врахувати статистичні розкиди параметрів та застосовувати математичні моделі напівпровідникових приладів, прийнятні за складністю та точністю у широкому діапазоні напруг, струмів та температур. Тому велике практичне значення мають фізико-топологічні, технологічні, схемотехнічні та функціонально-логічні моделі.

22. Фізико-топологічні моделі

Моделювання приладів має важливе значення для знаходження обмежувальних факторів при конструюванні субмікронних транзисторів та функціональних елементів надвеликих інтегральних схем (НВІС). Основною метою фізикотопологічного моделювання інтегральних логічних елементів НВІС є знаходження електричних параметрів напівпровідникових компонентів (тобто початкових даних для електричного моделювання) або розподіл за координатами та часом концентрацій вільних носіїв заряду та потенціалу (або потенціалу та квазірівнів Фрок для електронів від обраного базису змінних), а в загальному випадку - визначення струмів і напруг на зовнішніх виводах компонентів, тобто знаходження їх вольт-амперних характеристик.

Початковими даними для фізико-топологічного моделювання є геометричні розміри областей компонентів, що входять до складу елемента, що моделюється, граничні умови (наприклад, напруги на зовнішніх контактах) і фізичні характеристики напівпровідника (розподіл концентрації атомів домішок по координатах, час життя нерівноважних носіїв заряду, щільність поверхневих станів , рухливість вільних носіїв заряду та інші).

На першому етапі розвитку фізико-топологічного моделювання типовою його рисою було розбиття внутрішньої області приладу, що моделюється, на різні частини, дослідження яких можна було спростити, зробивши деякі припущення (наприклад, спеціальний вид профілю розподілу концентрації домішок, повне збіднення областей р-п-переходів, квазі та інші). Далі представлені моделі об'єднувалися для отримання повного рішення, що характерно для аналітичного рішення.

Чисельне моделювання, що базується на диференціальних рівняннях у приватних похідних, що єдиним чином характеризують всі області напівпровідникових приладів, було введено для одномірного моделювання біполярного транзистора Гуммелем. Даний підхід потім був використаний в теорії р-п-переходу та при дослідженні лавинно-прогонових діодів.

Зазвичай використовують таку схему моделювання інтегральних елементів:

- виходячи з початкових даних фундаментальної системи рівнянь (ФСР) у приватних похідних для напівпровідника з певними спрощеннями та граничними умовами здійснюється фізико-топологічне моделювання робочих зон активних компонентів (біполярних або уніполярних транзисторів, діодів, функціональних елементів та інших), результатом чого будуть електричні , а саме коефіцієнти передачі струму та коефіцієнти інжекції інтегральних транзисторних структур, теплові струми та ємності p-n-переходів і так далі, а також динамічні характеристики активних елементів;

- створюються еквівалентні електричні схеми активних областей та інтегральних елементів в цілому з урахуванням пасивних областей на базі ідеалізованих елементів теорії кіл або інших елементів;

- на базі еквівалентної електричної схеми та результатів фізико-топологічного моделювання робочих зон активних компонентів виконується електричне моделювання, результатом якого будуть шукані вхідні, вихідні та передавальні (статичні та динамічні) характеристики інтегрального елемента, що розглядається.

Фундаментальна система рівнянь напівпровідника у дифузійно-дрейфовому наближенні у векторному вигляді може бути представлена таким чином :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{e}\nabla\overrightarrow{J_n} + (G - R)_n \tag{38}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{e}\nabla\overrightarrow{J_p} + (G - R)_p \tag{39}$$

$$\overrightarrow{J_n} = e\mu_n(\varphi_T\nabla n - n\Delta\varphi) \tag{40}$$

$$\overrightarrow{J_p} = e\mu_p(\varphi_T\nabla p - p\Delta\varphi) \tag{41}$$

$$\nabla^2\varphi = -\frac{e}{\varepsilon\varepsilon_0}(p - n + N_D - N_A) \tag{42}$$

де n, p - концентрації електронів та дірок; e – елементарний заряд; j_n, j_p - щільності електронної та діркової складових струму; $(G - R)_n$ та $(G - R)_p$ - швидкості генерації-рекомбінації електронів та дірок; t – час; μ_n і μ_p- рухливості електронів та дірок; φпотенціал; φ_T- температурний потенціал; ε - діелектрична проникність напівпровідника; ε_0 – електрична постійна; N_D і N_A - концентрації донорної та акцепторної домішок.

До складу системи рівнянь входять рівняння безперервності для електронів та дірок (38), (39), рівняння електронної та дірочної складових щільності струму (40), (41) та рівняння Пуассона (42).

Граничні умови можуть бути записані так для кордону метал-напівпровідник:

$$np=n_i^2 \quad (43)$$

$$\varphi=U_e \quad (44)$$

де n – власна концентрація носіїв; U_e – напруга на контакті.

Граничні умови можна записати так для кордону діелектрик-напівпровідник:

$$\varepsilon_d E_{dx} - \varepsilon E_x = \frac{e}{\varepsilon_0} N_s \quad (45)$$

де ε_d – діелектрична проникність діелектрика; E_{dx} та E_x - проекції вектора напруженості електричного поля в діелектриці та напівпровіднику; N_s – концентрація поверхневих станів.

Розробка фізико-топологічної моделі включає наступні етапи:

- отримання безперервної моделі, наприклад, фундаментальної системи рівнянь;

- отримання дискретної моделі, яка включає нормування, перехід від безперервних функцій до сіточних; від похідних до кінцевих різниць;

- реалізація дискретної моделі (вибір методу чисельного рішення представленої на попередньому етапі системи нелінійних рівнянь алгебри, створення алгоритму та програми обчислень);

- аналіз результатів та оцінка адекватності моделювання.

Останнім часом створено безліч двовимірних та тривимірних фізико-топологічних моделей інтегральних транзисторів. Головним їх недоліком є велика обчислювальна складність. Більш того, є значний технологічний розкид параметрів реальних інтегральних напівпровідникових приладів близько 15-25%, що відноситься до додаткового фактора, що обмежує застосування чисельних моделей у системах автоматизованого проектування НВІС. Отже, поряд із розвитком чисельних методів виконується розробка більш «швидких» (але менш точних) моделей та методів моделювання субмікронних інтегральних структур.

23. Технологічні моделі

Технологічні моделі необхідні аналізу та оптимізації параметрів процесу виготовлення інтегральних схем.

Вихідними параметрами технологічних моделей є дані оброблюваних матеріалів і такі параметри технологічного процесу, як температура, час дифузії, концентрації домішок, що вводяться. На базі експертної оцінки поєднань їх значень отримані прогнози про електрофізичні параметри робочих напівпровідникових пластин, що формуються і що реалізуються з високою достовірністю. Через велику кількість етапів процесів та різноманітність параметрів сировини, обладнання, культури виробництва можлива досить велика кількість результатів. Технологічні моделі дають можливість певною мірою керувати процесами створення робочих кремнієвих структур і водночас прогнозувати вихідні параметри для наступних етапів виробництва та моделювання.

24. Схемотехнічні моделі

Схемотехнічне моделювання – суттєвий етап проектування цифрових та аналогових інтегральних схем, електронних схем різного ступеня складності. В даний час програми схемотехнічного моделювання, розвиток яких почався в 60-х роках. XX ст., досягли досить високого рівня. Зазвичай вони входять до складу САПР.

На схемотехнічному рівні, як і етапі логічного моделювання, основними завданнями є проблеми аналізу. Є такі основні завдання схемотехнічного моделювання: розрахунок статичного режиму, перехідних процесів та частотних характеристик. Сучасні програми схемотехнічного моделювання, наприклад програма PSpice, дозволяють вирішувати й інші завдання: розрахунок малосигнальних передатних функцій та чутливостей у режимі постійного струму, спектральний аналіз, розрахунок рівня внутрішнього шуму, деякі види багатоваріантного та статистичного аналізу. У пакеті програм SPICE, в якому застосовується метод Ньютона - Рафсона в різних модифікаціях (PSPICE, HSPICE, TSPICE та ін), значення параметрів SPICE-моделей знаходяться за експериментальними даними або за результатами фізико-топологічного моделювання та характеризують точність схемотехнічного моделювання,

25. Схемотехнічні моделі особливо для інтегральних елементів із субмікронними розмірами.

Схемотехнічне (електричне, аналогове) моделювання є моделюванням електричних процесів в електронних пристроях, найчастіше представлених як принципові електричні схеми, тобто з'єднань умовних позначень елементів схеми (транзисторів, діодів, резисторів, конденсаторів тощо). Схемотехнічне моделювання розглядає реальні фізичні обмеження в електричних процесах – закони збереження. Цим воно відрізняється від логічного моделювання, при якому досліджуються лише інформаційні потоки у схемі. Дані обмеження описуються першим і другим законами Кірхгофа, які випливають із законів збереження заряду та енергії і звуться зазвичай законами електричної рівноваги (топологічними рівняннями). Необхідність виконання цих законів у кожній розрахунковій точці потребує розв'язання відповідних рівнянь електричної рівноваги.

Більш детальний опис електронних схем при схемотехнічному моделюванні дає можливість отримати точніші відомості про процеси у схемі на відміну від логічного моделювання.

Ціль схемотехнічного моделювання полягає у визначенні форми та параметрів величин струму та напруги, що з'являються в різних точках схеми. Потім можливе обчислення параметрів сигналів (тривалості, затримки та інше), спектра вихідного сигналу, чутливості схеми до зміни параметрів її елементів, розв'язання задачі статистичного аналізу схеми та оптимізації її параметрів.

Нагадаємо, що перший закон Кірхгофа полягає в тому, що алгебраїчна сума струмів і у будь-якому вузлі електричного кола дорівнює нулю:

$$\sum_{k=0}^{n} i_k = 0 \tag{46}$$

Другий закон Кірхгофа полягає в тому, що алгебраїчна сума напруг

$$U_k=\varphi_j-\varphi_1 \tag{47}$$

гілок у будь-якому контурі електричного кола дорівнює нулю:

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = 0 \tag{48}$$

26. Функціонально-логічні моделі

Результати функціонально-логічного моделювання, як і схемотехнічного, є тимчасовими діаграмами сигналів надвеликих інтегральних схем, що дають можливість аналізувати коректність виконання схемою необхідних функцій.

Однак функціонально-логічне моделювання, на відміну від схемотехнічного, орієнтується на спрощені моделі логічних вентилів, тригерів, буферних та інших бібліотечних елементів, для яких характерний порівняно малий набір параметрів (ємність навантаження, тривалість фронту на одиницю ємності навантаження, температурний коефіцієнт тривалості фронту).

При проектуванні спеціалізованих НВІС на основі базових матричних кристалів (БМК) та програмованих логічних інтегральних схем (ПЛІС) практично готовий мікроелектронний пристрій апаратно або програмно налаштовується на реалізацію необхідної функції. При цьому в бібліотечних файлах є експериментально перевірені дані не тільки про параметри елементів, а й про основні параметри ліній зв'язку, пристроїв комутації та інших. Це дає можливість скоротити похибки логічних моделей та збільшити адекватність функціонально-логічного моделювання НВІС. Таким чином, функціонально-логічне моделювання найбільше застосовується у процесі проектування НВІС на основі ПЛІС та БМК.

27. Математичне моделювання розробки виробів електронної техніки

Математичне моделювання дозволяє вирішити низку завдань, а саме:

- зменшити кількість експериментів при відпрацюванні нових конструктивно-технологічних рішень;
- дослідити нові вироби при різних режимах роботи та різних впливах;
- розробляти нові принципи функціонування систем, що розглядаються.

Моделювання ведеться на всіх етапах життєвого циклу виробів, а саме:

- технологія виготовлення виробів електронної техніки;
- фізико-топологічне моделювання;
- схемотехнічне моделювання;
- функціональне моделювання в рамках "малої" системи;
- функціональне моделювання у рамках "великої" системи.

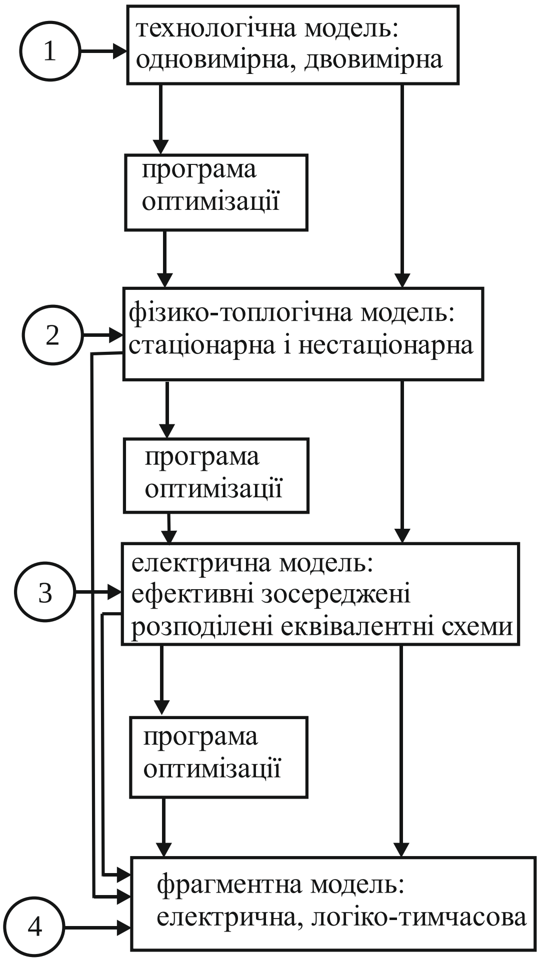


Рисунок 12. Блок-схема розробки типів математичної моделі електронного пристрою

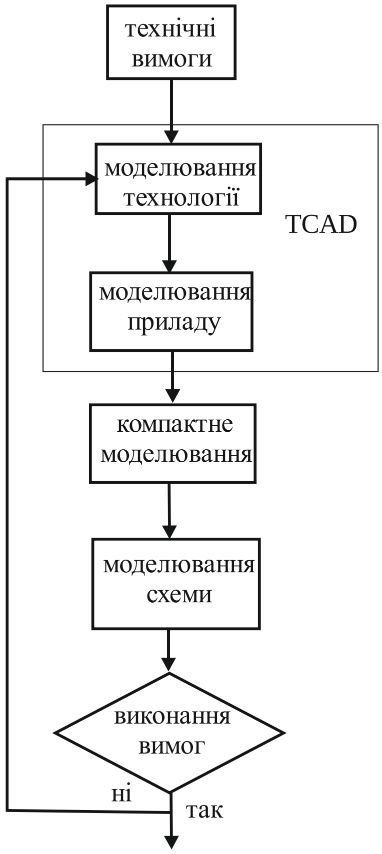


Рисунок 13. Блок-схема розробки математичної моделі електронного пристрою

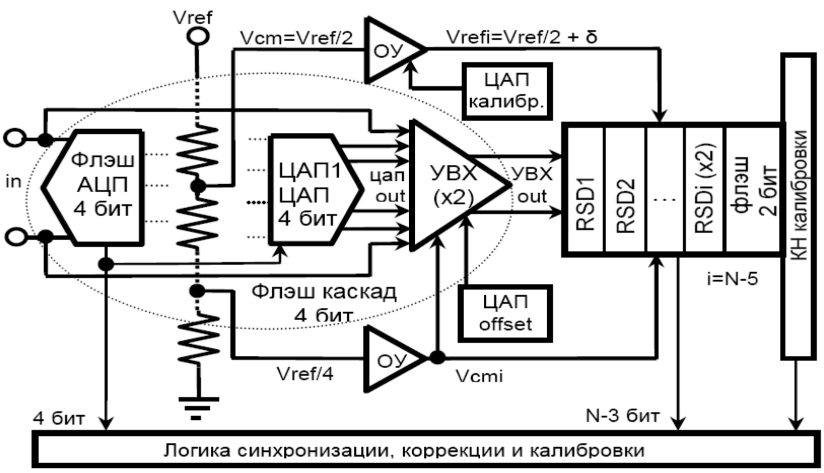


Рисунок 14. Функціональна блок-схема IMC

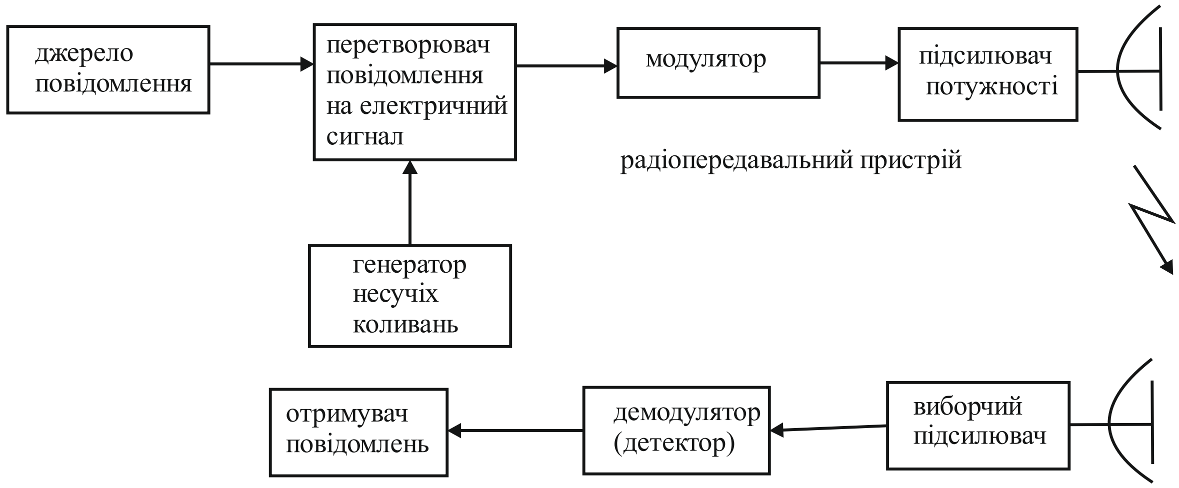


Рисунок 15.Функціональна блок-схема системи радіозв'язку

28. Типові класи завдань дослідження операцій

За своєю змістовною постановкою безліч завдань дослідження операцій може бути розбита на ряд класів, основні з яких:

1) завдання керування запасами;

2) завдання розподілу ресурсів;

3) завдання ремонту та заміни обладнання;

4) завдання масового обслуговування;

5) завдання теорії розкладу (календарного планування);

6) завдання вибору маршруту (транспортні);

7) завдання мережевого планування та керування;

8) завдання планування та розміщення;

9) комбіновані завдання.

Завдання 1 є одними з найпоширеніших.

Постановка завдання: визначити такий рівень запасів на складах, при якому мінімізується сума очікуваних витрат зі зберігання запасів та штрафів (втрат) через їхній дефіцит.

Завдання керування запасами характеризуються системою постачання, попитом предметів постачання, способами поповнення запасів, функціями витрат, обмеженнями.

Системи постачання бувають децентралізовані однокаскадні та централізовані багатокаскадні (коли є система складів у різних місцях).

Попит на предмети постачання буває стаціонарний та нестаціонарний, детермінований та випадковий.

Способи поповнення запасів: миттєве постачання, затримка поставки на фіксований інтервал часу, затримка на випадковий інтервал часу.

Функції витрат визначають критерії ефективності прийнятої стратегії керування запасами і можуть бути такі: витрати на зберігання запасів, вартість постачання, втрати внаслідок дефіциту.

Обмеження бувають на максимальний обсяг запасів на складі, на максимальну вартість запасів, на середню вартість, кількість поставок у заданому інтервалі часу та ймовірність дефіциту.

Залежно від умов ці завдання поділяються на:

- Моменти оформлення замовлень на поставки t_i чи моменти таких поставок фіксовано. Визначити обсяги замовлень x_i або партій замовлень, що поставляються t_1, t_2, t_3……t_n; x_1, x_2, x_3 ……..x_n.
- Обсяги партій, що постачаються x_i, фіксовані. Визначити моменти постачання t_i.
- Як моменти постачання t_i, так і обсяги x_i не задані. Визначити ці величини для того, щоб мінімізувати прийнятий критерій оптимальності.

Завдання 2 виникають при певному наборі робіт (операцій), які необхідно виконувати, а готівкових ресурсів для виконання кожної роботи як найкраще не вистачає.

Залежно від умов ці завдання поділяються на:

• Задано роботи та ресурси. Розподілити ресурси між роботами в такий спосіб, щоб максимізувати певну міру ефективності (прибуток) чи мінімізувати очікувані витрати (витрати виробництва).

• Задано лише готівкові ресурси. Визначити який склад робіт необхідно з урахуванням цих ресурсів, щоб забезпечити максимум певної міри ефективності.

• Задано лише роботи. Визначити необхідну кількість ресурсів, щоб мінімізувати сумарні витрати виробництва.

<u>Завдання 3.</u> Будь-яке обладнання в процесі експлуатації зношується, старіє та підлягає заміні.

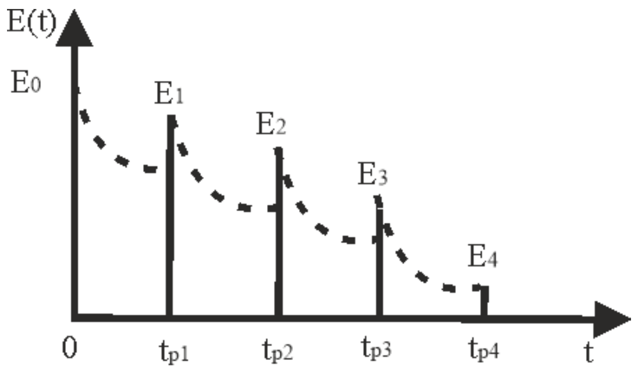


Рисунок 16. Крива старіння t_{p3} в залежності від часу. Е- міра ефективності обладнання; $E_0 > E_1 > E_2 > E_3$.

Обладнання в момент часу t_{pi} піддається відновлювальному ремонту, що покращує його ефективність до величини E_i, причому $E_{i+1} < E_i$. З кожним ремонтом пов'язані витрати на ремонт C_{pi}. При досягненні деякого критичного значення $E_{кр}$ проводять заміну обладнання. При цьому вартість заміни $C_{зам}$.

Якщо час життєвого циклу (від моменту покупки до моменту заміни) позначити через $T_ц$, то завдання можна сформулювати наступним чином: потрібно визначити терміни відновлювальних ремонтів t_{pi}, а також момент заміни обладнання ($T_ц$), при яких мінімізуються середні витрати на ремонт та заміну обладнання за період його життєвого циклу

$$Q = \frac{1}{T_ц}\left(C_{зам} + \sum_{i=1}^{n} C_{pi}(t_{pi})\right) \tag{49}$$

.

<u>Завдання 4.</u> Найчастіше це визначення необхідної кількості каналів, що забезпечують задану пропускну здатність або мінімізують витрати на обслуговування.

<u>Завдання 5</u> характеризуються такими особливостями: є безліч деталей d_1, d_2,…,d_n, що підлягають обробці. Крім того, є безліч верстатів B_1, B_2,…,B_m, на яких обробляються деталі. Для кожної деталі задаються технологічні маршрути обробки TM_j, j=1….n, що визначають порядок проходження верстатів. У випадку для різних деталей маршрути не однакові. Також задані витрати часу t_{ij} з обробки j деталі на i верстаті t_{ij}. Потрібно визначити такі черговості обробки деталей кожному з верстатів, котрим оптимізується певний критерій оптимальності.

Таке завдання називається завданням календарного планування чи складання розкладу, а вибір черговості запуску деталей в обробку – упорядкуванням.

Найчастіше у цих завданнях використовуються критерії: мінімізація загальної тривалості робіт (тобто інтервалу між моментом початку операції обробки першої деталі та закінченням останньої операції обробки останньої деталі), мінімізація сумарних втрат, мінімізація загального запізнення, мінімізація максимального запізнення, максимізація завантаження верстатів.

<u>Завдання 5</u> відносяться до комбінаторних завдань. Загальна кількість можливих варіантів розкладу $N=(n!)^m$, де n – число верстатів. Тож вирішення таких завдань найчастіше застосовуються евристичні методи, крім n=1,2,3.

Завдання календарного планування розрізняються за такими ознаками:

1) за кількістю верстатів;

2) за видом технологічних маршрутів: з однаковими технологічними маршрутами (конвеєр) та з неоднаковими технологічними маршрутами;

3) за використовуваними критеріями оптимальності;

4) на вигляд верстатів: ідентичні, різні.

<u>Завдання 6</u> є одним з найпоширеніших і зустрічається щодо різних процесів. Типовим завданням є завдання знаходження маршруту з міста А до міста В за наявності кількох маршрутів для різних проміжних пунктів. Вартість та час проїзду залежать від вибору маршруту.

Завдання - визначити найбільш економічний маршрут за вибраним критерієм оптимальності (мінімізувати за часом чи витратами).

Серед мережевих завдань найбільш поширеними є завдання вибору найкоротшого шляху між довільними пунктами мережі та завдання комівояжера (обійти всі пункти мережі та повернутися у вихідний, побувавши в кожному з пунктів один раз, при цьому довжина шляху має бути мінімальною).

Завдання 7. У цьому класі завдань розглядається співвідношення між терміном закінчення великого комплексу операцій та моментами початку всіх операцій комплексу. Вони актуальні при розробці складних і дорогих проектів.

Комплекс операцій можна представити у вигляді мережного графіка, що складається з вершин (вузлів) і орієнтованих дуг. При цьому операції зображуються дугами, а вершинами є деякі події. Дуги, що входять у вершину відповідають операціям, які мають бути закінчені раніше, ніж можна буде розпочати операції, зображені дугами, що виходять з даної вершини. Події, відповідні початку комплексу, що виконується, надається номер 1, а останньому – номер n. Інші вершини нумерують так, що якщо події i i j зв'язуються операцією (i,j), то повинна виконуватися нерівність

$$t_н(j) \geq t_н(i) + t_{ij} , \qquad (50)$$

де $t_н(i)$ і $t_н(j)$ - моменти настання подій i і j; t_{ij} - тривалість операції (i,j) (вага дуги).

Зазвичай приймають для першої події

$$t_н(1)=0, \qquad (51)$$

а для n-ї події

$$t_н(n)=T_{кр}, \qquad (52)$$

де $T_{кр}$ – загальна тривалість всього комплексу робот.

Для вирішення таких завдань запроваджується поняття критичного шляху та критичних робіт.

Критичними називають роботи, затримка яких призводить до еквівалентної затримки закінчення всього комплексу робіт.

Шлях у мережі (послідовність робіт) з початкової події на кінцеве, що складається цілком із таких робіт, називається критичним, тобто шляхом із нульовим резервом часу.

З іншого боку, кожній роботі визначається резерв часу – інтервал часу, протягом якого робота може затягуватися, не викликаючи збільшення часу настанням останньої події.

Завдання мережного планування включає завдання визначення критичного шляху і завдання визначення резервів часу для всіх робіт.

Таблиця 1. Час критичного шляху і резерв часу для всіх робіт.

i	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***
$\boldsymbol{T_p}$	*0*	*5*	*9*	*3*	*12*	*14*	*16*	*26*
$\boldsymbol{T_n}$	*0*	*6*	*9*	*7*	*12*	*18*	*16*	*26*

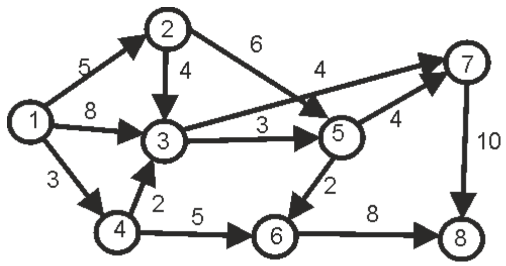


Рисунок 17. Час критичного шляху і резерв часу для всіх робіт.

Щоб обчислити резервний час, потрібно виконати розрахунок мережі від початку до кінця і визначити ранні часи початку робіт у кожному вузлі мережі.

Найраніший початок

$$t_p(j) = \max_{i \to j}(t_p(i) + t_{ij}) \quad (53)$$

Для третьої вершини: 9, 8, 5

Для п'ятої вершини: 11, 12.

Для шостої вершини: 8, 14

Для визначення часу найпізнішого закінчення кожної роботи здійснюється розрахунок мережі у зворотному напрямку від кінця до початку.

Найпізніший час події n

$$t_n(n)=t_p(n) \quad (54)$$

Якщо визначено $t_n(j)$, то для попередньої події i

$$t_n(i)=\min(t_n(j)-t_{ij}) \quad (55)$$

Визначаються резерви часу для всіх робіт

Таблиця 2. Резерви часу для всіх робіт

(i,j)	*1,2*	*1,3*	*1,4*	*2,3*	*4,3*	*2,5*	*3,5*	*3,7*	*5,7*	*5,6*	*6,8*	*7,8*
$t_{рез}$	*0*	*1*	*4*	*0*	*4*	*1*	*0*	*3*	*0*	*4*	*4*	*0*

Розрахунок резервного часу

$$t_{рез}(i,j)=t_n(j)-t_p(i)-t_{ij} \quad (56)$$

У цьому прикладі критичний шлях: 1-2-3-5-7-8.

Є дві групи завдань мережного планування та керування:

1) Мережеве планування та керування за критерієм «час». Задано мережевий графік виконання проекту, загальні виділені ресурси для виконання робіт та їх зміна у часі. Необхідно розподілити ці ресурси за операціями та визначити моменти початку та закінчення всіх операцій комплексу, при яких мінімізується загальна тривалість всього комплексу операцій (тобто скоротити довжину критичного шляху).

2) Мережеве планування та керування за критерієм «вартість». Задано тривалість всього комплексу операцій. Визначити терміни початку виконання кожної операції та розподілу ресурсів за операціями, у яких мінімізуються витрати виконання всього комплексу операцій.

Якщо структура мережевої моделі жорстко задана і змінюється, це мережна модель з жорстко заданою детермінованою структурою. Якщо залежно від випадкових чинників мережева модель може змінюватися, це мережа з імовірнісною структурою.

Ці завдання мають комбінаторний характер і для їх вирішення використовуються наближений чи евристичний алгоритми.

Завдання 8 - це завдання планування та розміщення об'єктів. На деякій площі потрібно розмістити безліч об'єктів (технологічне обладнання) з урахуванням їхньої взаємодії з раніше розміщеними і між собою так, щоб оптимізувати певний критерій ефективності. Простір може бути безперервним та дискретним, коли задані місця, в які можна розміщувати обладнання. Як критерій оптимальності частіше беруть загальні транспортні завдання.

Ця класифікація перестає бути остаточною, з'являються нові поєднання завдань.

29. Постановка та класифікація задач оптимізації проектних рішень. Місце процедур оптимізації у проектуванні

У процесі проектування вирішуються завдання структурного та параметричного синтезу об'єкта проектування. Розглянуті вище методи математичного моделювання мають на меті аналіз прийнятих (синтезованих) проектних рішень. Якщо в результаті аналізу виявляється, що проектне рішення в певному сенсі є незадовільним, існує можливість поліпшити його, повернувшись до вирішення завдань структурного і параметричного синтезу. Аналіз, таким чином, дозволяє отримати інформацію, необхідну для виконання процедур синтезу в ітераційному процесі проектування.

Проектування починають зі структурного синтезу, результатом якого є важливі рішення, наприклад вигляд електронного апарату. Далі виконують процедури параметричного синтезу, тобто тим чи іншим чином визначають параметри елементів об'єкта, що проектується — їх геометричні розміри, матеріал і так далі. Як правило, після завершення процедур структурного та параметричного синтезу прийняті проектні рішення не визнаються остаточними, але робиться спроба покращити їх шляхом структурної та (або) параметричної оптимізації. Ставиться задача пошуку такої структури та (або) значень параметрів об'єкта проектування, що доставляють екстремальні значення одному або декільком критеріям оптимальності об'єкта.

Число параметрів, що оптимізуються, може змінюватися в широких межах. Слід уникати великої кількості цих параметрів (більше кількох десятків), оскільки це, по-перше, робить завдання оптимізації складним і ресурсомістким, а по-друге, ускладнює аналіз результатів оптимізації.

Оптимізовані параметри можуть змінюватися безперервно чи дискретно. Як правило, перша ситуація має місце при параметричній оптимізації, а друга – при структурній.

Вирізняють такі етапи розв'язання задачі оптимізації:

- визначення параметрів, що варіюються (параметрів, що підлягають оптимізації);
- встановлення області допустимих значень параметрів, що варіюються, тобто формалізація обмежень, що накладаються на параметри;
- вибір та оцінка впливу зовнішніх факторів, які необхідно врахувати під час вирішення задачі оптимізації;
- вибір критеріїв оптимальності;
- вибір математичного методу розв'язання задачі оптимізації;
- проведення розрахунків та оцінка отриманих рішень за обраними критеріями;
- ухвалення остаточного рішення з урахуванням невизначеностей у постановці завдання.

30. Критерії оптимальності

Критерій оптимальності можна розглядати як характерний показник об'єкта проектування, за значенням якого оцінюється оптимальність знайденого проектного рішення. Як правило, не вдається вибрати один критерій, який формалізував би повноту уявлень проектувальника про оптимальність об'єкта проектування. З іншого боку, слід уникати призначення великої кількості критеріїв, оскільки це значно ускладнює завдання ухвалення рішення.

У найпростішому випадку задачу багатокритеріальної оптимізації (завдання БКО) зводять до завдання двокритеріальної оптимізації, критеріями якої є «ціна» і «якість». Це дозволяє в доступній для аналізу формі врахувати як економічні (ціна), так і виробничо-технічні (якість продукції) вимоги. Часто завдання БКО різними методами зводять до завдання однокритеріальної оптимізації, що потребує запровадження істотних припущень, але полегшує прийняття остаточного рішення.

Завдання однокритеріальної оптимізації іноді називають завданнями скалярної, а багатокритеріальної - векторної оптимізації. При розмірності вектора параметрів, що варіюються, більше одиниці критерій оптимальності називають наружним у своїй області визначення, якщо в цій області мають місце слабкі зміни критерію за одними напрямками і значні зміни за іншими.

Завдання оптимізації може бути як завдання мінімізації, і завдання максимізації критеріїв оптимальності. Далі треба припустити, що йдеться про завдання мінімізації. Зауважимо, що максимізація критеріальної функції q(X) еквівалентна мінімізації функції f(X)=-q(X).

Однією з особливостей завдань оптимізації, що виникають під час автоматизованого проектування, є висока обчислювальна складність критеріальних функцій. Тому при вирішенні задач оптимізації в сучасних CAE-системах широко використовують метод сурогатних моделей (мета-функцій), які є апроксимацією критеріальних функцій поліномами, радіально-базисними та іншими функціями. Сучасним методом побудови сурогатних моделей є метод кригінгу (kriging).

31. Постановка та класифікація однокритеріальних завдань оптимізації

У загальному вигляді завдання структурної, параметричної та структурно-параметричної однокритеріальної оптимізації можна записати однаково у вигляді

$$\min_{X \in D_X \subset R^n} f(X) = f(X^*) = f^* \tag{57}$$

де $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$-$(n\times1)$ – вектор параметрів, що варіюються; X^* - шуканий оптимальний вектор X; f^* - потрібне оптимальне значення цільової функції, R^n - n-мірний арифметичний простір.

Множина D у загальному випадку визначає параметричні обмеження виду $x_i^- \le x_i \le x_i^+$, $i \in [1: n]$ та функціональні обмеження, серед яких виділяють обмеження типу рівностей $E(X) = 0$ та обмеження типу нерівностей $G(X) > 0$. Таким чином, у загальному випадку множину D_x задаємо виразом

$$D_X=\{X \mid x_i^- \le x_i \le x_i^+,\ E(X)=0,\ G(X)\ge 0,\ i\in[1:n]\} \tag{58}$$

Тут прийняті такі позначення: x_i^-,x_i^+— мінімально та максимально допустимі значення параметрів x_i, $E(X)$ —вектор-функція з компонентами $e_1(X)$, $e_2(X)$,..., $e_k(X)$, яка обмежує; $G(X)$ – аналогічна функція з компонентами $g_1(A)$, $g_2(X)$,…..,$g_l\{X)$.

Обмеження виду $x_i^- \le x_i \le x_i^+$ легко записати як функціональні обмеження типу нерівностей $x_i - x_i^- \ge 0$, $x_i - x_i^+ \ge 0$. Кожне з функціональних обмежень типу рівностей можна записати як два обмеження типу нерівностей. Наприклад, обмеження $e_j(X) = 0$ еквівалентно обмеженням $e_j(X) \ge 0$, $- e_j(X) \ge 0$. На основі цих міркувань вважаємо, що безліч допустимих значень вектора параметрів D_x, що варіюються, визначають тільки функціональні обмеження типу нерівностей, так що

$$D_X=\{X \mid G(X)\ge 0\} \tag{59}$$

Класифікація задач (58), (59) можлива за кількома ознаками. Розглянемо основні з них.

1. Вид цільової та обмежуючих функцій. Якщо цільова функція f(X) є лінійною, а множина D_x— опуклий багатогранник, то задачі (58), (59) називають задачею лінійного програмування.

Кінцева множина D_x породжує задачу дискретного програмування, а множина D_x у вигляді безлічі цілих чисел - аналогічну задачу цілісного програмування. Якщо одні компоненти вектора зможуть набувати речових значень, а інші — дискретних або цілих, то це завдання називається завданням змішаного програмування (завданням безперервно дискретного або безперервно-цілочисельного програмування відповідно).

У випадку завдання (58), (59) називають завданням нелінійного програмування.

2. Наявність чи відсутність обмежень. Якщо обмеження вектор X відсутні, тобто $D_x = R^n$, то задачу називають задачею оптимізації без обмежень чи завданням безумовної оптимізації. За наявності обмежень на вектор X, коли D_{xa} R_n маємо завдання оптимізації з обмеженнями або завдання умовної оптимізації.

3. Число точок мінімуму. Якщо цільова функція f(X) має в області допустимих значень один мінімум, то завдання (58), (59) носить назву одноекстремальної. За наявності в області D_x більше одного мінімуму цільової функції f(X) завдання називають багатоекстремальною або мультимодальною.

4. Характер шуканого рішення. Якщо знаходиться будь-який мінімум цільової функції f(X) в області D_x, то має місце завдання локальної оптимізації; у випадку, коли потрібно знайти найглибший з локальних мінімумів функції f(X) у тій самій області D_x (глобальний мінімум) – завдання глобальної оптимізації.

32. Постановка багатокритеріальної задачі оптимізації та безліч Парето цієї задачі.

Нехай безліччю допустимих значень вектора параметрів X, що варіюються, є обмежена і замкнута множина

$$D_x = \{X|G(X) \geq 0\} \subset \{X\} = R^n. \qquad (60)$$

Припустимо, що критерійна (цільова) вектор-функція $F(X)=(f_1(X), f_2(X),...,f_m(X))$ зі значеннями у критеріальному (цільовому) просторі $\{F\} = R^m$ визначена у сфері D_x. Необхідно мінімізувати у цій галузі кожну з приватних цільових функцій $f_x(X)$, $f_2(X),...,f_m(X)$, що умовно записуємо у вигляді

$$\min_{X \in D_X} F(X) = F(X^*) = F^* \qquad (61)$$

де вектори X *, F * - шукане рішення БКО-завдання.

Вектор-функція F(X) виконує відображення множини $D_{xв}$ деяку множину f (Z) цільового простору, яке називають безліччю досяжності (рисунок 18).

Введемо на множинах D_F, D_X відношення домінування. Будемо говорити, що вектор $F_1=F(X_1)$ ϵ D_F домінує вектор $F_2=F(X_2)$ ϵ D_F якщо серед рівностей і нерівностей $f_k(X_1) \leq f_k(X_2)$, k ϵ [1:m] є хоча б одне строге .

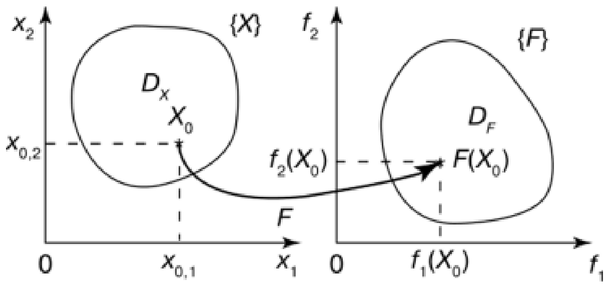


Рисунок 18. До визначення безлічі досяжності *DF:* n=m= 2

Виділимо з множини D_F підмножину точок D_F^*— фронт Парето задачі БКО, які не домінуються іншими точками множини D_F і серед яких немає домінуючих один одного. Множина $D_X^* \in D_X$, що відповідає множині D^*_F, називають множиною Парето зазначеної задачі БКО. Отже, якщо $X \in D_X^*$, то $F(X) \in D_X^*$ (рисунок 19). Точки $F(X_1)$, $F(X_2)$ рисунку не домінують одне одного і не домінуються жодною з точок множини D_F. Фронт Парето завдання утворюють у цьому прикладі всі точки дуги АВ.

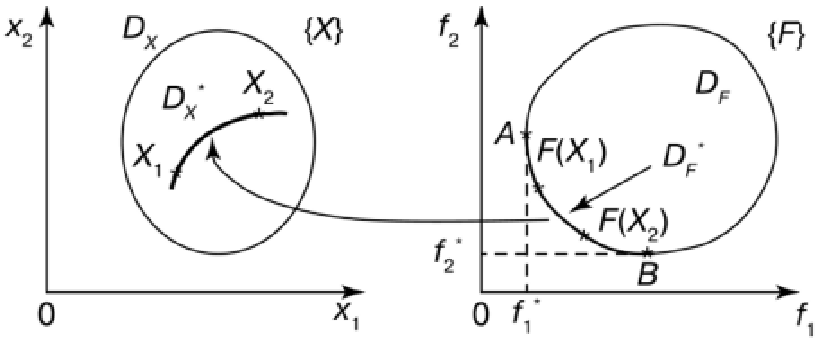


Рисунок 19. До визначення фронту Парето D_F^* та множини Парето D_X^*: |X| =|F| = 2

Наведемо приклад. Розглянемо двовимірне (n = 2) двокритеріальне (m= 2) завдання оптимізації (61), де

$$f_1(X)=x_1^2+x_2^2,\ f_2(X)=(x_1-1)^2+(x_2-1)^2, \tag{62}$$

$$D_X=\{X|x_1,\ x_2 \in [-1;1]\} \tag{63}$$

Можна показати, що множина D_F має вигляд, представлена на рисунку 20 б, а безліч ПаретоD_X^*, є не що інше, як відрізок прямої, що з'єднує точки (0; 0), (1; 1) (рисунок 20). Зазначимо, що перша із зазначених точок являє собою точку мінімуму функції $f_1(X)$, а друга — аналогічну точку функції $f_2(X)$.

Роль множини Парето під час вирішення завдання БКО визначає таке.

Твердження 1. Якщо для деяких вагових множників $\lambda_K>0$, $k\in[1: m]$ має місце рівність

$$\min_{X\in D_X}\sum_{k=1}^{m}\lambda_k f_k(X)=\sum_{k=1}^{m}\lambda_k f_k(X^*) \quad (64)$$

то вектор X * оптимальний по Парето, тобто X*

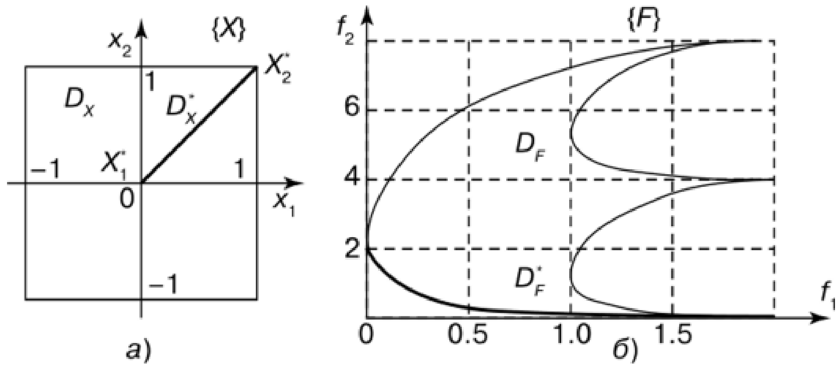


Рисунок 20. Безліч Парето (а) та фронт Парето (б) БКО-завдання

З цього твердження випливає, що вибір певної точки множини Парето еквівалентний вказівкам ваг кожної з приватних цільових функцій. На цьому факті засновано велика кількість наближених алгоритмів розв'язання задачі БКО.

Зауважимо, що твердження 1 визначає лише необхідну умову оптимальності за Парето вектора $X^*\in D_X$. Іншими словами, з того факту, що точка X* належить множині Парето, не випливає, що для цієї точки дане твердження обов'язково справедливе.

Важлива така обставина. Постановка задачі БКО (59) фіксує лише безліч допустимих значень D_X та вектор цільових функцій $F(X) = (f_I(X), f_2(X),..., f_JX))$. Як правило, цієї інформації недостатньо для однозначного вирішення зазначеної задачі. Ця інформація дозволяє лише виділити відповідну множину Парето. Тому часто кажуть, що рішенням завдання БКО у постановці (59) є безліч Парето цієї задачі. Для однозначного розв'язання задачі потрібна додаткова інформація.

Аналогічно задачі однокритеріальної оптимізації кінцева множина D_X породжує дискретну БКО-завдання, а множина D_X у вигляді безлічі цілих чисел - аналогічну цілочисельне завдання. Якщо одні компоненти вектора зможуть набувати речових значень, а інші — дискретних або цілих, то завдання (59) називається змішаним БКО-завданням (безперервно дискретним або безперервно-цілочисленним завданням БКО відповідно).

33. Математичні методи оптимізації.

1. Основні поняття.
2. Вибір критеріїв оптимізації.
3. Лінійне програмування у вирішенні конструкторських завдань.
4. Нелінійне програмування у завданнях конструювання.

Завдання конструювання – завдання пошуку найкращих рішень (оптимальних). Такі завдання називаються задачами оптимізації.

Вирішення таких завдань полягає у розгляді різних варіантів та виборі найкращого. Кожен варіант характеризується вектором параметрів $(x_1, x_2, \dots x_n)$ та ступенем задоволення вимог, що пред'являються до об'єкта Q(x) - цільовою функцією або критерієм оптимізації.

Крім того, деякі вимоги можуть не входити до цільової функції, тоді вони задаються системою обмежень $g_i \geq 0$ i=1,2,..,m, які задають деяку область допустимих значень параметра об'єкта, в межах якого шукається оптимальне рішення. Оскільки приймається найкраще рішення, то цьому відповідатиме min(max) Q(x) за зміни параметрів x так, щоб задовольнялася система обмежень $g_i \geq 0$

Завдання max зводиться до завдання min так:

$$\max Q(x)=\min(-Q(x)); \qquad (64)$$

$$g_i \geq 0 \rightarrow - g_i \leq 0; \quad (65)$$

$$g_i(X) = 0 \rightarrow \begin{Bmatrix} g_i(X) \geq 0 \\ g_i(X) \leq 0 \end{Bmatrix} \quad (66)$$

.

34. Вибір критеріїв оптимізації

Вибір критеріїв оптимізації або вибір цільової функції Q(x) є центральним моментом проектування.

Можливі два підходи:

Принцип головного критерію, коли в якості Q(x) вибирається основний показник якості K(x), а інші менш значущі, які не повинні виходити за рамки вимог ТЗ, виступають як обмеження:

$$\min K^*(x);\ K_i(x) \geq K_{iгр}, \quad (67)$$

де $K^*(x)$– головний показник якості.

Такі завдання називаються однокритеріальними.

Комплексний критерій оптимізації.

Адитивний критерій:

$$Q(X) = \sum_{i=1}^{n} C_i \left(\frac{K_i(x)}{K_{i0}}\right)^i, \quad (68)$$

де K_{i0}- нормований показник, який призводить до байдужого вигляду та одного діапазону; l - натуральне число.

При цьому виникає проблема визначення вагових коефіцієнтів C_i.

Мультиплікативний критерій:

$$Q(X) = \prod_{i=1}^{n} K_i(x)^C \quad (69)$$

Нормування не проводиться.

Лінійне програмування

Розглянемо симплекс метод на основі прикладу:

Мінімізувати функцію

$$(x_1-1,5x_2) \rightarrow \min; \tag{70}$$

Обмеження:

$$—3x_1+4x_2\leq 5; \tag{71}$$

$$—x_1+2x_2\leq 3; \tag{72}$$

$$x_1\geq 0;\ x_2\geq 0 \tag{73}$$

Модифікація заміни змінних. На першому етапі вводяться додаткові змінні, кількість яких дорівнює кількості обмежень. Ці змінні мають задовольняти вимоги невід'ємності їх значень, тобто при виконанні нерівності ці змінні мають бути невід'ємними.

Вводимо змінні $x_3\geq x_4$, $x_4\geq 0$. Значення x_3 і x_4 виходять з обмежень і виражаються через x_1 і x_2:

$$x_3 =5+3x_1-4x_2\geq 0; \tag{74}$$

$$x_4 =3+x_1-2x_2\geq 0. \tag{75}$$

Змінні, які входять до цільової функції, можуть приймати будь-які позитивні значення із заданого діапазону, тому вони називаються <u>вільними</u> (x_1 і x_2).

Змінні, значення яких залежить від вільних, називаються <u>базисними</u> (x_3 і x_4).

Метою симплекс методу є отримання мінімуму цільової функції при нульових значеннях вільних змінних, для цього треба замінити вільні та базисні змінні.

Ідея симплекс методу полягає у послідовній заміні вільних змінних на базисні доти, поки у виразі для цільової функції всі змінні не виявляться зі знаком «+» у разі мінімізації або зі знаком «-», у разі максимізації. Тоді розв'язання задачі буде за нульових значень змінних цільової функції. Таким чином, розв'язання задачі є ітераційним процесом, на кожній ітерації якого знаходиться одна вільна змінна, яка повинна бути переведена в базисні, і одна базисна змінна, яку потрібно перевести у вільні та взаємно їх замінити.

Вибір змінних здійснюється відповідно до симплексу критеріями. Відповідно до критерію №1 (74) як вільну змінну, що переноситься в базисну, вибирається та змінна, яка має більший за абсолютною величиною негативний (при мінімізації) або позитивний (при максимізації) коефіцієнт.

Відповідно до критерію №2 (75) як базисну змінну, що виноситься у вільні, вибирається та, яка звертається в нуль при меншому значенні тієї вільної змінної, яка обрана за критерієм №1 (74), інші вільні змінні прирівнюються нулю.

Відповідно до критерію №1 (74) вибираємо x_1, відповідно до критерію №2 (75) вибираємо x_3:

$$-\frac{1}{4}x_3 + \frac{3}{4}x_1 + \frac{5}{4} = x_2 \tag{76}$$

$$\begin{cases} Q = x_1 + \frac{3}{8}x_3 - \frac{9}{8}x_1 - \frac{15}{8} = -\frac{1}{8}x_1 + \frac{3}{8}x_3 - \frac{15}{8} \\ x_2 = -\frac{1}{4}x_3 + \frac{3}{4}x_1 + \frac{5}{4} \\ x_4 = -\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2} \end{cases} \tag{77}$$

Оскільки коефіцієнт при x_1 цільовій функції негативний, то виконуємо другу ітерацію.

За критерієм №1 вибираємо x_1, за критерієм №2 вибираємо x_4:

$$x_1 = 1 + x_3 - 2x_4 \tag{78}$$

$$\begin{cases} Q = \frac{1}{4}x_4 - 2 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{1}x_4 + 2 \\ x_1 = 1 + x_3 - x_4 \end{cases} \tag{79}$$

Оскільки обидва коефіцієнти при вільних змінних x_3 та x_4 позитивні, то рішення знайдено.

$$Q_{min}=2 \text{ при } x_3=x_4=0; \tag{80}$$

Повертаючись до вихідного завдання, отримуємо:

$$Q_{min}=-2 \text{ при } x_1=1 \text{ і } x_2=2; \tag{81}$$

Перевірка з обмежень:

$$-3x_1+4x_2 \leq 5; \quad (82)$$

$$-x_1+2x_2 \leq 3; \quad (83)$$

$$-3\cdot 1+4\cdot 2 \leq 5; \quad (84)$$

$$-1+2\cdot 2 \leq 3; \quad (85)$$

35. Графічний метод.

Графічний метод заснований на тій властивості, що оптимальне рішення задачі знаходиться в одному з кутів багатокутника, що визначає область допустимих значень змінних x_1 і x_2.

У площині змінних x_1 і x_2 проводяться прямі, відповідні обмеженням, які поряд з осями координат виділяють область допустимих значень змінних. Далі будується пряма, що відповідає виразу для цільової функції та паралельним переміщенням цієї прямої у бік зменшення або збільшення цільової функції знаходиться крайня точка області допустимих значень, яка буде вирішенням задачі.

$$-3x_1+4x_2 \leq 5; \quad (86)$$

$$x_2=0,\ x_1 = -\frac{5}{3}; \quad (87)$$

$$x_1=0,\ x_2 = \frac{5}{4}; \quad (88)$$

$$-x_1+2x_2 \leq 3; \quad (89)$$

$$x_2=0,\ x_1=-3; \quad (90)$$

$$x_1=0,\ x_2 = \frac{3}{2}; \quad (91)$$

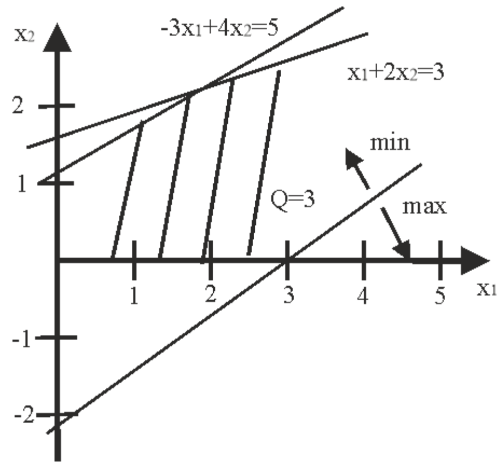


Рисунок 21. Графічний метод

$$Q=3=x_1-1{,}5x_2; \tag{92}$$

$$x_2=0,\ x_1=3; \tag{93}$$

$$x_1=0,\ x_2=-2; \tag{94}$$

36. Нелінійне програмування у завданнях конструювання

До завдань нелінійного програмування належать оптимізаційні завдання, у яких цільова функція та (або) обмеження є нелінійними функціями.

Універсальних методів точного вирішення таких завдань немає. Тому існує велика кількість різноманітних методів ефективного їх застосування до конкретних завдань.

Коротка класифікація методів:

1. Аналітичні методи;
2. Пошукові методи.

Аналітичні методи пов'язані зі знаходженням аналітичного вирішення деякої задачі (у точках мінімуму та максимуму $\frac{Q(x)}{\partial x_i}=0$; i=1….n; у точці мінімуму $\frac{\partial^2 Q(X)}{\partial x_i}>0$.

Головним недоліком аналітичних методів є їхня практична незастосовність через велику складність розв'язуваних завдань. Найчастіше ці завдання вирішуються чисельними методами. До класичних аналітичних методів відноситься метод невизначених множників Лагранжа.

Суть пошукових методів полягає в наступному:

Задається початкове значення пошукової точки $x_i^{(0)}$ та організується ітераційний процес пошуку таких значень x_i, при яких значення цільової функції буде оптимальним.

Ітераційний процес здійснюється за такою схемою:

$$X_i^{(k+1)}=x_i^{(k)}+h^{(k)}\cdot P_i^{(k)} \qquad (95)$$

де $x_i^{(k+1)}$ і $x_i^{(k)}$ значення i-ой змінної оптимізації на (k+1) та (k) ітерації відповідно;

$P_i^{(k)}$ - напрямок пошуку;

$h^{(k)}$ - величина кроку.

Усі пошукові методи діляться різні групи залежно від вибору P і h.

Найбільшого поширення набули:

1) Градієнтний метод, у якому щодо напряму пошуку використовується градієнт цільової функції;

2) Методи перебору;

3) Методи випадкового пошуку.

Залежно від виду розв'язуваних завдань, всі завдання поділяються на задачі з обмеженнями та завдання без обмежень. У методах нелінійного програмування завдання з обмеженнями, зазвичай, зводяться до завдань без обмежень, з допомогою запровадження штрафних функцій.

Пусть поставлене завдання: min Q(x) , обмеження $g_i(x)\geq 0$; i=1….m.

Суть методу полягає в наступному: замість функції Q(x) складається нова цільова функція

$$Q_1(x)=Q(x)+H(x), \qquad (96)$$

де H(x)– штрафна функція.

І вирішується завдання min $Q_1(x)$.

Штрафна функція H(x) є функцією:

$$H(X) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(x)|g_i(x)|, \tag{97}$$

де $\alpha_i(x)=0$, якщо $g_i \geq 0$; і $\alpha_i(x)= \alpha_i$ якщо $g_i(0)<0$,

$\alpha_i(x)$- коефіцієнт штрафу, а α_i - величина штрафу за порушення і-го обмеження;

l=1…n - натуральне число.

Головна проблема методу штрафних функцій: визначення величини α. При малих α методах оптимізації «порушують» обмеження. За великих штрафів утруднено пошук оптимальної точки поблизу кордонів. Як правило, оптимальне рішення знаходиться на межі області допустимих значень.

37. Метод невизначених множників Лагранжа.

Це аналітичний метод. Вирішується завдання min Q(x) з обмеженнями типу рівностей $g_i=0, i-1\ldots m$, причому g_i, $Q_i(x)$ повинні бути диференційовані $x_j(x)\geq 0$, j=1...n.

Суть методу у тому, що формується так звана функція Лагранжа:

$$L(\alpha, x) = Q(x) + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot g_i(x) \tag{98}$$

де α_i– невизначені множники Лагранжа.

Вирішується завдання min L(α,x)

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, j = 1 \ldots. n \quad (99);$$

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha_i} = 0, j = 1 \ldots. m \quad (100);$$

Вирішуючи систему (1)-(2) з (n+m) невідомими знаходять x_j і α_i, підставивши які у функцію Лагранжа, знаходять рішення.

Умови екстремуму функції дозволяють знайти так званий безумовний екстремум. Однак, у більшості практичних завдань прийняття рішення потрібно ухвалити рішення – визначити екстремум критерію оптимальності за умови, що на незалежні змінні накладено обмеження, що мають вигляд рівностей. Типовими прикладами подібних завдань є завдання, в яких потрібно оптимальним чином розподілити задану кількість ресурсів, щоб прийнята оцінка ефективності процесу мала при цьому максимальне або мінімальне значення.

Для вирішення таких завдань у класичному аналізі використовується метод невизначених множників Лагранжа. Самі завдання одержали назву завдань на умовний екстремум.

У задачі нелінійного програмування потрібно знайти значення багатовимірної змінної $x=(x^{(1)},\ldots..,x^{(n)})$, що мінімізує цільову функцію f(x) за умов, коли змінну x накладені обмеження типу нерівностей $h_i \leq 0$, $i=1,2,\ldots,m$, а змінні $x^{(j)}$, тобто. компоненти вектора x, невід'ємні: $x^{(j)} \geq 0$.

Іноді у формулюванні завдання обмеження мають протилежні знаки нерівностей. Враховуючи, однак, що якщо $h_i(x) \geq 0$, то $-h_i(x) \leq 0$ завжди можна звести завдання до нерівностей одного знаку. Якщо деякі обмеження входять у завдання зі знаком рівності, наприклад $\varphi(x)=0$, їх можна у вигляді пари нерівностей $\varphi(x) \leq 0$, $-\varphi(x) \leq 0$, зберігши цим типову формулювання задачі.

38. Екстремум функції однієї змінної

Більшість найпростіших завдань прийняття рішень еквівалентно завданням відшукання екстремуму функції однієї змінної.

Нехай потрібно знайти екстремум функції однієї змінної Q(u) за відсутності обмежень на діапазон зміни змінної u.

Необхідною умовою існування екстремуму безперервної функції Q(u) є рівність нулю першої похідної (dQ/du=0) або її відсутність. Графічно рівність похідної нулю означає, що дотична до кривої Q (u) в цій точці паралельна осі абсцис (рисунок 22, а), на рисунку 22, б зображений випадок, коли похідні в точках екстремуму не існують.

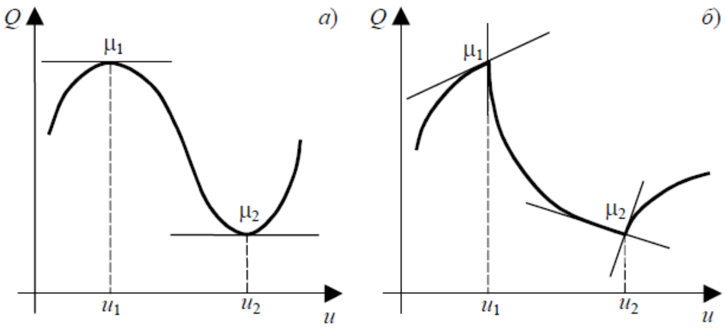


Рисунок 22. Різні типи екстремуму функції однієї змінної: а – похідна у точці екстремуму існує; б – похідна у точці екстремуму немає.

Названі умови є лише необхідними умовами. Їхнє виконання не означає ще, що в даних точках функція має екстремум (рисунок 23).

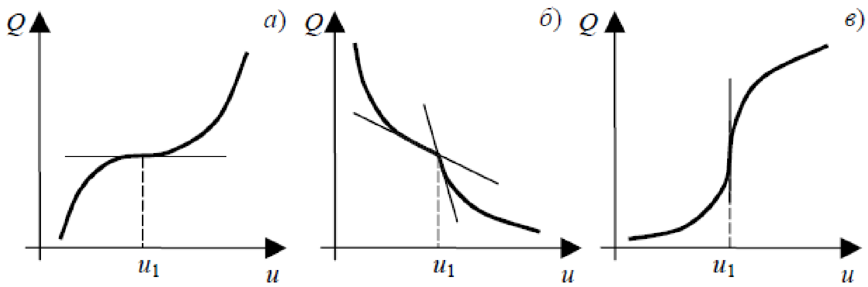


Рисунок 23. Функції Q(u), які відповідають необхідним умовам екстремуму: а – похідна дорівнює нулю; б – похідна немає; в – похідна дорівнює нескінченності

Для того, щоб визначити, чи дійсно у досліджуваній точці існує екстремум, необхідно перевірити виконання достатніх умов одним із наведених нижче методів.

1). Порівняння значень функцій. Цей спосіб зводиться до визначення значень функції в точках, розташованих ліворуч і праворуч у достатній близькості до точки, що досліджується, тобто у точках $(u1 - \varepsilon), (u1 + \varepsilon)$,де ε– мала позитивна величина. Якщо в точці u1 існує максимум (рисунок 24).

Якщо $\mathrm{Q(u1)} < \mathrm{Q(u1} - \varepsilon)$ и $\mathrm{Q(u1)} < \mathrm{Q(u1} + \varepsilon)$, то точці u1 існує мінімум (рисунок 24, б). Якщо ж Q(u1) $Q(u1) > Q(u1 - \varepsilon)$ и $Q(u1) > Q(u1 + \varepsilon)$, буде займати проміжне положення між собою$\mathrm{Q(u1} - \varepsilon)$ и $\mathrm{Q(u1} + \varepsilon)$,, наприклад,

$Q(u1) > Q(u1 - \varepsilon)$ и $Q(u1) < Q(u1 - \varepsilon)$, то точці u1 екстремуму нічого очікувати (рисунок 24, в).

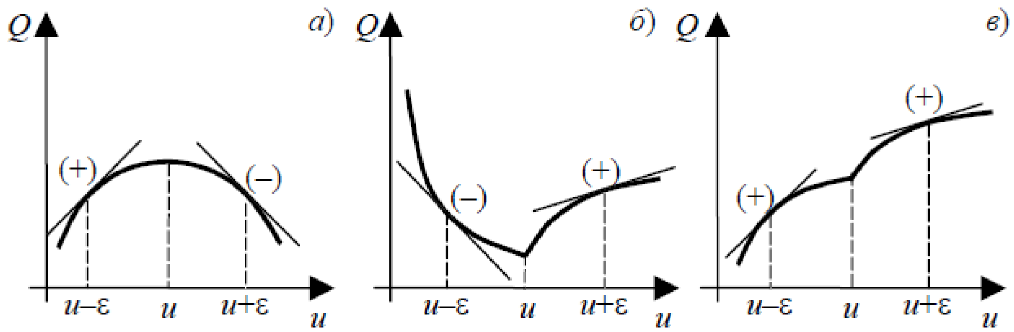


Рисунок 24. Перевірка достатніх умов екстремуму: а – максимум; б – мінімум; в – екстремуму немає

2). Порівняння похідних знаків. При цьому способі визначається знак першої похідної функції $Q(u) - \frac{dQ}{du}$в точках$(u1 - \varepsilon)$ і $(u1 + \varepsilon)$.. Якщо знаки похідних різні, то в точці u1 є екстремум функції Q(u), причому, якщо при переході від точки $(u1 - \varepsilon)$ до точки $(u1 + \varepsilon)$знак похідної змінюється з "+" на "-", то у точці u1 – максимум (рисунок 24, а). Якщо ж знак змінюється з "-" на "+", то у точці u1 – мінімум (рисунок 24, б).

Якщо знаки похідних у точках $(u1 - \varepsilon)$і $(u1 + \varepsilon)$однакові, то точці u1 екстремуму немає (рисунок 24, в).

3) Дослідження знаків вищих похідних. Цей спосіб застосовується у випадках, коли досліджувана функція має похідні вищих порядків. Якщо точці u1 виконується необхідна умова екстремуму, тобто $\left.\frac{dQ}{du}\right|_{u_1} = 0$. і існує друга похідна – $\frac{d^2Q}{du^2}$значення якої обчислюється в "підозрюваної" точці u1, то точка u1 є точкою максимуму, якщо $\left.\frac{d^2Q}{du^2}\right|_{u_1} < 0$, і точкою мінімуму, якщо $\left.\frac{d^2Q}{du^2}\right|_{u_1} > 0$.

Якщо ж $\left.\frac{d^2Q}{du^2}\right|_{u_1} = 0$, то подальших досліджень обчислюються$\left(\frac{d^3Q}{du^3}, \frac{d^4Q}{du^4}\right)$ і т.д.

При вирішенні практичних завдань зазвичай доводиться досліджувати функції, що мають кілька екстремумів. У цьому випадку говорять про знаходження найбільшого та найменшого значення функції, які називають глобальними екстремумами. Інші екстремуми називаються локальними. Також у практичних завданнях діапазон зміни змінної u часто буває обмежений заданим інтервалом [a,b], тому до "підозрюваних" точок повинні бути включені і крайні точки цього інтервалу, так як в них може досягатися глобальний екстремум.

Нехай потрібно знайти екстремум функції, наприклад мінімум

$$Q(u_1, u_2, \dots, u_n) \to min, \tag{101}$$

за умови:

$$\varphi_l(u_1, u_2, \dots, u_n) = 0,\ l = \overline{1, k}. \tag{102}$$

Відповідно до методу Лагранжа для вирішення завдань на умовний екстремум функції складається допоміжна функція Лагранжа, яка визначається співвідношенням

$$\bar{Q}(u_1, u_2, \dots, u_n\lambda_1, \dots, \lambda_k) = Q(u_1, \dots, u_n) + \sum_{t=1}^{k} \lambda_1 \varphi_1(u_1, \dots, u_n), \tag{103}$$

де λ_1,t = $\overline{1, k}$- Невизначені множники Лагранжа.

Таким чином, завдання знаходження умовного екстремуму функції зводиться до завдання знаходження безумовного екстремуму функції, але число невідомих у ній n + k (uι, ι = 1, n; λj, j = 1, k).

Як відомо з пункту 2 необхідною умовою безумовного екстремуму функції є рівність нулю приватних похідних, які для цього випадку записуються у вигляді

$$\frac{\partial Q(u_1,\dots,u_n)}{\partial u_t} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1(u_1,\dots,u_n)}{\partial u_t} + \dots + \frac{\partial \varphi_k(u_1,u_n)}{\partial u_t} = 0;\ t = \overline{1, n}. \tag{103}$$

і дає n рівнянь визначення невідомих. Ця система рівнянь доповнюється до рівнянь і, отже, виходить (n+k) невідомих та (n+k) рівнянь.

Метод множників Лагранжа дає лише необхідні умови існування умовного екстремуму для безперервних функцій, що мають також безперервні похідні, тому знайдені значення змінних можуть і не давати екстремуму функції Q (u1, ..., un), їх треба перевірити з використанням достатніх умов екстремуму функції багатьох змінних.

В остаточному розв'язанні задачі фактично множники Лагранжа не відомі, тому завдання спільного вирішення системи іноді ставиться як завдання виключення "k" невідомих змінних uι з подальшим розв'язанням системи n, що залишається, рівнянь з n невідомими.

Завдання Лагранжа має "n – k" ступенів свободи.

39. Градієнтний метод.

Градієнтний метод при визначенні напрямку пошуку використовується градієнт цільової функції G_{i-1}:

$$x_i=x_{i-1}-h_i \cdot G_{i-1}; \tag{104}$$

$$G_{i-1} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1} \dots \frac{\partial Q}{\partial x_n}\right)\Big| x_{i-1}, \tag{105}$$

$$x=(x_1 \dots x_n) \tag{106}$$

На кожному етапі необхідно знайти величину кроку h_i. Для вибору кроку використовується окрема процедура.

h_i визначається

$$x_{ij} = x_{ij} - h_i \frac{\partial Q}{\partial x_j}\Big| x_{i-1} \ , \tag{107}$$

$$j = \overline{1 \dots . n}, \tag{108}$$

де i– номер ітерації вибору напрямку.

Значення x_{ij} відповідає мінімальному значенню цільової функції при цих значеннях градієнта $\frac{\partial Q}{\partial x_j}$.

Потрібно знайти підбором таке значення h_i, яке визначить x_{ji}.

Процедура визначення h_i називається процедурою лінійного пошуку. Найбільш поширені методи лінійного пошуку – метод «золотого перерізу» та половинного поділу.

40. Метод "золотого перерізу".

Є деяка функція Q(h), яку треба мінімізувати:

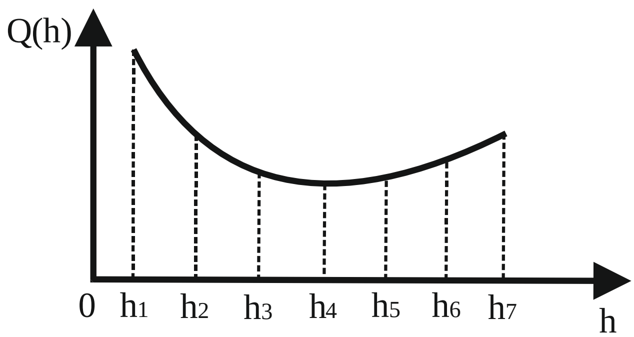


Рисунок 25. Графік досліджуваної функції. Покрокове розбиття

$$x_{ji} = x_{ji} - h_i \frac{\partial Q}{\partial x_i} \tag{109}$$

Потрібно знайти h, за яких Q мінімально.

Завдання визначення h_i виконується у два етапи:

1. Знаходження інтервалу невизначеності (A,B), у якому гарантовано розташований мінімум.

2. Звуження інтервалу невизначеності до заданої величини.

Перший етап вирішується так: беремо значення h_0– постійний крок, його значення визначається виходячи із значень параметрів. Далі здійснюється нарощування кроку h: $h_k=k\cdot h_0$, k=1,2….n

До кожного кроку h_k визначається значення цільової функції $Q(h_k)$ і проводиться порівняння $Q(h_k)$ з $Q(h_{k-1})$. Якщо $Q(h_k) < Q(h_{k-1})$, то крок збільшуємо; як тільки $Q(h_k) \geq Q(h_{k-1})$, то значенню B присвоюємо значення h_k, а значенню A – h_{k-2}.

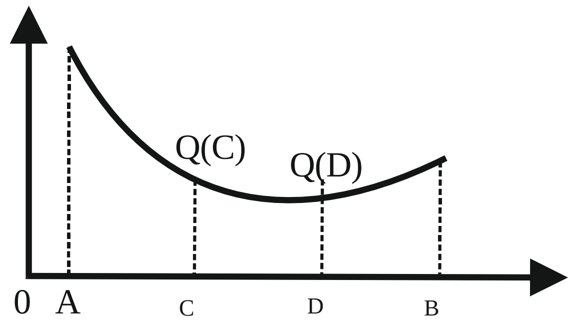


Рисунок 26. Графік досліджуваної функції. Інтервал невизначеності

Отже, нашим інтервалом невизначеності буде інтервал (A,B).

Другий етап: звуження інтервалу невизначеності методом "золотого" перерізу.

На кожному етапі цього процесу всередині інтервалу невизначеності обчислюються дві точки, в яких визначається значення цільової функції: Q(C) і Q(D). Ці значення порівнюються між собою, якщо Q(C) < Q(D), то B=D, а D=C.

Якщо Q(C) > Q(D), то A=C, а C=D. Якщо Q(C) = Q(D), то вибирається будь-який варіант. Відрізок AB ділиться на пропорції, що визначаються числами золотого перерізу. Числа "золотого" перерізу: 0,382 і 0,618.

C=A+0,382(B-A);

D=A+0,618(B-A).

Процес триває до того часу, поки (B-A)>ε, якщо (B-A)≤ε, то $h = \frac{A+B}{2}$.

1) Метод половинного поділу.

2) Відрізняється лише пропорцією при розподілі інтервалу:

$C = \frac{A+B}{2} - \varepsilon_1$; $C = \frac{A+B}{2} + \varepsilon_1$; ε_1=0,05(B-A)

Всі ці методи розроблені для гладких, унімодальних, функцій, що диференціюються.

Існують інші методи, зокрема прямі методи пошуку. У цих методах напрямок пошуку задається примусово. Такі методи кращі тоді, коли похідну або неможливо обчислити або її обчислення дуже трудомістко. Одним із таких методів є метод покоординатного спуску (підйому при максимізації).

41. Метод покоординатного спуску.

Задається послідовність зміни параметрів оптимізації. Ця послідовність вважається постійною протягом усього процесу оптимізації. На кожній ітерації змінюється лише одна змінна відповідно до обраного порядку, інші фіксуються. Як і раніше, у вибраному напрямку мінімізується цільова функція вибором відповідного кроку. У новій точці визначається зміна наступного параметра і так далі. Процес повторюється багаторазово доти, доки мінімізуватиметься або максимізуватиметься функція. Цей метод ще називається методом Гауса-Зайделя. Графічно це виглядає так:

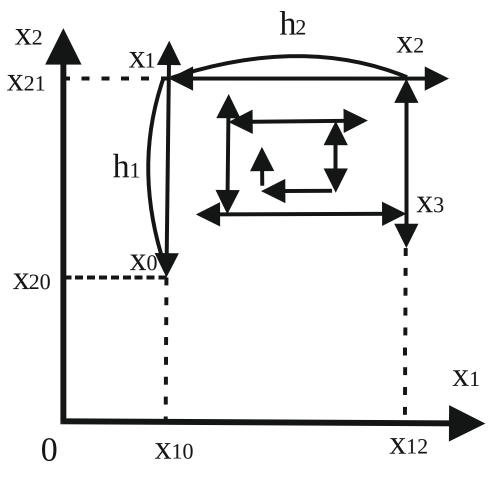


Рисунок 26. Графічне відображення метода Гауса-Зайделя

Спочатку змінюємо x_2, потім x_1, x_2, x_1 і так далі. Розмір кроку визначається способами лінійного пошуку.

42. Цілочисленне програмування

1. Завдання цілісного програмування.
2. Метод відсікання.
3. Метод гілок та кордонів.
4. Завдання комівояжера.

Завдання цілісного програмування

$$\min(max)\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \tag{110}$$

Обмеження

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \leq b_j\,, j = 1\,....m; \tag{111}$$

$$x_i \geq 0,\ i=1.....n; \tag{112}$$

$$x_i – \text{цілі},\ i=1....n. \tag{113}$$

Завдання цілого програмування відрізняються від завдань лінійного програмування умовами дискретності. Внаслідок цього оптимум цільової функції задачі дискретного програмування виявляється гіршим за рішення задачі лінійного програмування з тими самими умовами.

Одним із класів завдань цілісного програмування, що найчастіше зустрічаються, є комбінаторні завдання, до яких належать завдання упорядкування, календарного планування, вибору маршруту.

Комбінаторна оптимізаційна задача полягає у відшуканні серед кінцевої множини альтернатив однієї, якій відповідає екстремальне значення прийнятої цільової функції.

Комбінаторні завдання відрізняються великою трудомісткістю у зв'язку з наявністю великої кількості варіантів розв'язання.

Наприклад: У задачі комівояжера на n містах число варіантів дорівнює (n-1)!.

Розв'язання задачі цілочисленного програмування значно складніше, ніж задачі лінійного програмування. Причому далеко не завжди заокруглений результат безперервної задачі є вирішенням дискретної задачі.

Наприклад:

Нехай треба знайти

$$\max(21x_1+11x_2) \tag{114}$$

$$7x_1+4x_2\leq 13; \tag{115}$$

$$x_1,\ x_2 \geq 0 \text{ - цілі.} \tag{116}$$

Відповідь:$x_1=0$, $x_2=3$, $F=33$.

Відповідь з допомогою лінійного програмування: $x_1 = \frac{13}{7},\ \ x_2 = 0, F = 39.$

Округлюємо $x_1=2$, $x_2=0$- це заокруглення неприпустимо, так як не виконуються обмеження.

Округлюємо $x_1=1$, $x_2=0$, $F=21$.

Очевидно, що потрібні такі методи рішення, які забезпечують частковий перебір порівняно невеликої кількості допустимих варіантів та неявний перебір решти.

Розглянемо деякі класичні постановки задач цілісного програмування:

1) Транспортне завдання.

Є m- постачальників та n- споживачів. Постачальник i може надіслати споживачеві не більше S_i виробів, а споживачеві j потрібно не менше D_j виробів. Витрати транспортування одиничного вантажу з пункту i до пункту j рівні C_{ij}.

Потрібно вибрати план перевезень, який мінімізує загальні транспортні витрати.

$$min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij}, \tag{117}$$

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} \leq S_i,\ i = 1 \dots m, \tag{118}$$

$$\sum_{j=1}^{m} X_{ij} \geq D_j,\ j = 1 \dots n, \tag{119}$$

$$X_{ij}\geq 0\text{- ціле,} \tag{120}$$

X_{ij} - кількість виробів, що поставляються від постачальника i до j споживача.

1) Завдання комівояжера.

Комівояжеру потрібно побувати в кожному з n міст, починаючи і закінчуючи свій маршрут містом 1. Він не має права двічі заїжджати в те саме місто. Позначимо через C_{ij} відстань між містами i і j, $C_{ij} \geq 0$. Оптимізаційна задача полягає у відшуканні найкоротшого циклу.

Визначимо булеві змінні x_{ij}.

$x_{ij} = 1$ - якщо цикл включає переїзд із міста i до міста j,

$x_{ij} = 0$ - в іншому випадку.

Тоді завдання виглядає так:

$$min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij}, \tag{121}$$

де $C_{ij} = \infty$.

Обмеження:

1) $\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = 1,\ i = 1 \ldots n,.$ (122)

2) $\sum_{i=1}^{n} X_{ij} = 1,\ j = 1 \ldots n,$ (123)

3) Рішення є цикл.

1-е обмеження: з кожного міста лише один від'їзд;

2-е обмеження: із кожного міста лише одне прибуття.

Відомо два основних проходи до відшукання точного оптимістичного розв'язання задач цілочисленного програмування:

1) методи відсікаючих площин (методи відсікання);

2) способи повернення.

43. Метод відсікання

Розглянемо ідею способу з прикладу.

$$\max 5x_1 + 1x_2, \quad (124)$$

при

$$2x_1 + 1x_2 = 3 \quad (125)$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ - цілі} \quad (126)$$

Оптимальне вирішення задачі: $x_1 = \frac{3}{2}$; $x_2=0$.

Це рішення є неприпустимим, так як воно дробове, але з (2), (3) слід, що x_1 має бути менше або дорівнюватиме 1

$$x_1 \leq 1. \quad (127)$$

Розв'язуючи задачу лінійного програмування (124), (125), (126) отримуємо: $x_1=1$, $x_2=1$, що є рішенням задачі.

Таким чином, оптимальне розв'язання задачі цілочисленного програмування було знайдено шляхом побудови та розв'язання розширеної задачі лінійного програмування, що містить лінійні обмеження, що випливають з умов вихідного завдання, тобто вихідне завдання цілісного програмування замінюється розширеним завданням лінійного програмування.

Алгоритм

Нехай треба знайти

$$max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad (128)$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \;\; i = 1 \dots m,, \quad (129)$$

$$x_j \geq 0, \text{ цілі.} \quad (130)$$

Позначимо $[a_j]+f_j \equiv a_j$ і $[b]+h \equiv b$,

де $[a_j]$ і $[b]$ - цілі частини чисел a_j і b, тобто найбільше ціле менше або дорівнює дійсному числу (a_j=-5,6; $[a_j]$ =-6);

f_j і h- дробові частини $0 \le f_j < 1$, $0 \le h < 1$.

Алгоритмічні відсікання складаються з кроків:

2. Знайти оптимальне рішення задачі лінійного програмування з цільовою функцією (128) та лінійними обмеженнями (129), не враховуючи умову цілісності (130), але вимагаючи, щоб всі $x_j \ge 0$.

3. Припинити обчислення, якщо поточне розв'язання задачі лінійного програмування є цілочисленним, інакше вибирати якусь дробову базисну змінну та скласти обмеження виду:

$$\sum_{j=1}^{n} (-f_{j)} x_j + x = -h. \tag{131}$$

З рівняння, що містить цю базисну змінну в оптимальному рішенні задачі лінійного програмування.

x - Знову змінна;

f_j і h- дробові частини коефіцієнтів та вільного члена з обраного рівняння.

2. Додати до вихідного завдання лінійного програмування це нове обмеження (131). Знайти нове оптимальне рішення задачі з додатковим обмеженням та повернутися до кроку 2.

приклад.

Знайти

$$\max(21x_1+11x_2); \tag{132}$$

$$7x_1+4x_2 \le 13; \tag{133}$$

$$x_1,\ x_2 \ge 0,\ \text{целые}. \tag{134}$$

Після кроку 1 отримуємо

$$\max(-x_2-3x_3+39); \tag{135}$$

$$x_1 + \frac{4}{7}x_2 + \frac{1}{7}x_3 = 1\frac{6}{7};; \tag{136}$$

$$x_1 = 1\frac{6}{7};\ x_2 = 0. \tag{137}$$

Так як x_1 є дробовим, додаємо обмеження (131) з рядка (136) та отримаємо

$$x_4 - \frac{4}{7}x_2 - \frac{1}{7}x_3 = -\frac{6}{7}, \tag{138}$$

де x_4- ціла додаткова змінна.

Переходячи до кроку 3, отримаємо завдання лінійного програмування:

$$\max(-x_2 - 3x_3 + 39); \quad (139)$$

$$x_1 + \frac{4}{7}x_2 + \frac{1}{7}x_3 = 1\frac{6}{7}; \quad (140)$$

$$x_4 - \frac{4}{7}x_2 - \frac{1}{7}x_3 = -\frac{6}{7}, \quad (141)$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \quad (142)$$

Нове оптимальне рішення задачі (2) має вигляд:

$$\max(-2\frac{3}{4}x_3 - 1\frac{3}{4}x_4 + 37\frac{1}{2}); \quad (143)$$

$$x_1 + x_4 = 1, \quad (144)$$

$$x_2 + \frac{1}{4}x_3 - 1\frac{3}{4}x_4 = 1\frac{1}{2}, \quad (145)$$

Так як x_2=1,5 накладаємо нове обмеження:

$$x_5 - \frac{1}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4 = -\frac{1}{2}, \quad (146)$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \quad (147)$$

і вирішуємо це завдання.

Отримаємо результат:

$$\max(-x_1 - 11x_5 + 33) \quad (148)$$

$$x_2 + x_5 - 2x_1 = 33, \quad (149)$$

$$x_1 + x_4 = 1 \quad (150)$$

$$x_1 = 0,\ x_2 = 3,\ Q_{max} = 33 \quad (151)$$

Повертаючись до кроку 2, робимо висновок, що отримано ціле рішення і вихідне завдання вирішено.

Зауваження: алгоритми відсікання малоефективні під час вирішення комбінаторних завдань, виникають також труднощі під час вирішення завдань, у яких значення a_{ij} і b_i мають велику величину, але ці алгоритми добре зарекомендували себе під час вирішення завдань, у яких оптимальне рішення містить ціле чисельне значення багатьох змінних.

Число ітерацій, необхідні отримання рішення, істотно залежить від конкретного виду постановки завдання.

Вибір базової змінної на етапі 2 є довільним. З практичної точки зорова збіжність алгоритму часто підвищується при виборі змінної з найбільшою дрібною частиною h.

44. Метод гілок та кордонів

$$max \sum_{j=1}^{n} C_j x_j, \tag{152}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \;\; i = 1 \ldots m,, \tag{153}$$

$$x_j \text{ - ціле, } j=1\ldots.n, \tag{154}$$

$$x_j \geq 0, \; j=1\ldots.n, \tag{155}$$

Крім цього, припустимо, що для кожної змінної можна задати верхню і нижню межу, в межах якої безумовно міститься її оптимальне значення.

$$L_j \leq x_j \leq U_j, \; j=1\ldots.n, \tag{156}$$

Ідея цього методу заснована на наступному факті: розглянемо будь-яку змінну x_j і приймемо, що значення I в межах $L_j \leq x_j \leq U_j$ -1, тоді оптимальне рішення задачі (152-156) задовольнятиме лінійному обмеженню:

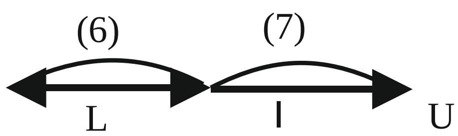
$$I+1 \leq x_j \leq U_j, \tag{157}$$

$$L_j \leq x_j \leq I. \tag{158}$$

Якщо оптимальне рішення лінійного програмування $x_1 = 1\frac{2}{3}$, то рішення задачі цілого програмування:

$$L_1 \leq x_1 \leq 1 \tag{159}$$

$$2 \leq x_1 \leq U_1. \tag{160}$$



Алгоритм

На кожній ітерації t є нижня межа Q_i оптимального значення цільової функції. Крім нижньої оцінки, є основний список завдань лінійного програмування, що підлягають вирішенню. Єдина відмінність цих завдань одне від одного пов'язані з зміною умов (156). На ітерації 1 приймаємо, що Q_1 дорівнює значенню свідомо менше оптимального і вирішимо задачу (152-156). На довільній ітерації t виконуються такі кроки:

1. Припинити обчислення, якщо основний список завдань порожній. Інакше вибрати завдання лінійного програмування з основного списку.
2. Розв'язати задачу. Якщо вона не має допустимого рішення або якщо отримане в результаті оптимальне значення цільової функції $\leq Q_t$, то прийняти нижню межу на наступний крок $Q_{t+1}=Q_t$ і повернутися до кроку 1, інакше перейти до кроку 3.
3. Якщо оптимальне рішення задачі лінійного програмування, що отримується, задовольняє цілочисленним обмеженням, то зафіксувати його, прийнявши Q_{t-1} рівному відповідному оптимальному значенню цільової функції і повернутися до кроку 1, інакше перейти до кроку 4.
4. Вибрати будь-яку змінну x_j, яка не має цілого значення в отриманому оптимальному розв'язанні задачі лінійного програмування. Нехай b_j відповідає цьому значенню, а $[b_j]$ – це ціла частина числа b_j. Додати 2 завдання лінійного програмування до основного списку. Ці завдання ідентичні задачі, обраної на кроці 1 за винятком того, що в одній з них нижня межа x_j замінена на $[b_j]+1$, а в іншій верхня замінена на $[b_j]$.
5. Прийняти $Q_{t+1}=Q_t$ та повернутися до кроку 1.

45. Завдання комівояжера

Розглянемо застосування методу гілок та кордонів для вирішення задачі комівояжера:

$$min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij}, \text{ где } C_{ij}=\infty,\ i=1\ldots n, \tag{161}$$

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = 1,\ i = 1 \ldots n, \text{ (від'їзд)}, \tag{162}$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_{ij} = 1,\ j = 1 \ldots n, \text{ (прибуття)}. \tag{163}$$

Рішення є циклом.

x_{ij} - бульова змінна,

$x_{ij}=1$ якщо в циклі є дуга з вершини i у вершину j;

$x_{ij}=0$ - в іншому випадку.

C_{ij} - відстань між вершинами і та j (вага дуги).

Приклад:

Нехай є 5 міст, відстані між якими представлені матрицею відстаней:

Таблиця 3. Матриця відстаней

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	□	10	25	25	10
2	1	□	10	15	2
3	8	9	□	20	10
4	14	10	24	□	15
5	10	8	25	27	□

Відомо кілька модифікацій методу гілок та кордонів, що різняться між собою способами розгалуження та обчислення оцінок.

Ідея одного із методів. На початку будь-якої ітерації t відома верхня оцінка Q^t оптимального значення цільової функції.

На першому кроці як таку оцінку можна прийняти:

$$Q^1=c_{12}+c_{23}+c_{34}+\ldots+c_{n1}, \tag{164}$$

$$Q^1=65 \tag{165}$$

Крім того, заданий основний список завдань, що містить деяку підмножина елементів x_{ij}=1.

На першій ітерації основний список (n-1) містить завдання, по одному для кожного x_{ij}=1 і вважаємо, що $C_{j1}=\infty$, j=2,3….n (тобто забороняється повернення назад).

Для кожної задачі обчислюється нижня оцінка цільової функції - це така величина, менша за яку довжина циклу, що породжується даним завданням, не може бути. Отже, виникає завдання обчислення нижньої оцінки цільової функції.

Один простий метод обчислення оцінок полягає в наступному: очевидно, що оцінка повинна бути принаймні дорівнюватиме сумі C_{ij} для x_{ij}=1 плюс сума мінімальних елементів C_{ij} у кожному з не викреслених рядків. Крім того, можна збільшити оцінку ще більшою мірою, віднімаючи мінімальне значення C_{ij} в кожному не викресленому рядку з усіх інших елементів цього рядка. Таким чином, одержують зменшені відстані. До зазначеної вище суми додається мінімальна зі зменшених відстаней по кожному з не викреслених стовпців.

Приклад:x_{23}=1, $C_{32}=\infty$, C_{23}=10.

Таблиця 4. Нижня оцінка цільової функції

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**min по стр.**
1	□	10		25	10	10
2						
3	8	□		20	10	8
4	14	10		□	15	10
5	10	8		27	□	8

Оцінка =10+(10+8+10+8)=46

Таблиця 5. Нижня оцінка цільової функції по стовпцям

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	□	0		15	0
2					
3	0	□		12	2
4	4	0		□	15
5	4	0		19	□
min по стовпц.	0	0		12	0

Оцінка =46+(0+0+12+0)=58

46. Алгоритм за кроками

Крок 1: Припинити обчислення, якщо основний список порожній, інакше вибрати одне завдання та викреслити його з основного списку.

Крок 2: Визначити нижню оцінку цільової функції для будь-якого циклу, що породжується обраним завданням. Якщо нижня оцінка цільової функції виявляється $\geq Q^t$, прийняти величину $Q^{t=1}=Q^t$ і до кроку 1, тобто вибраний шлях не перспективний. В іншому випадку перейти до кроку 3.

Крок 3: Якщо поточне рішення визначає цикл, то зафіксувати його, прийняти Q^{t+1} рівним відповідного значення цільової функції і повернутися до кроку 1. В іншому випадку перейти до кроку 4.

Крок 4: У кожному місті k, яке не входить до часткового циклу завдання, вибраного на кроці 1, внести додаткове завдання до основного списку, розширивши частковий цикл з міста j, що є останнім містом, включеним до часткового циклу до міста k, замінивши при цьому величини C_{ij} на ∞. Прийняти $Q^{t=1}=Q^t$ та повернутися до кроку 1.

На кроці 1 вибирається завдання, у якого нижня оцінка найменша.

Приклад (продовження):

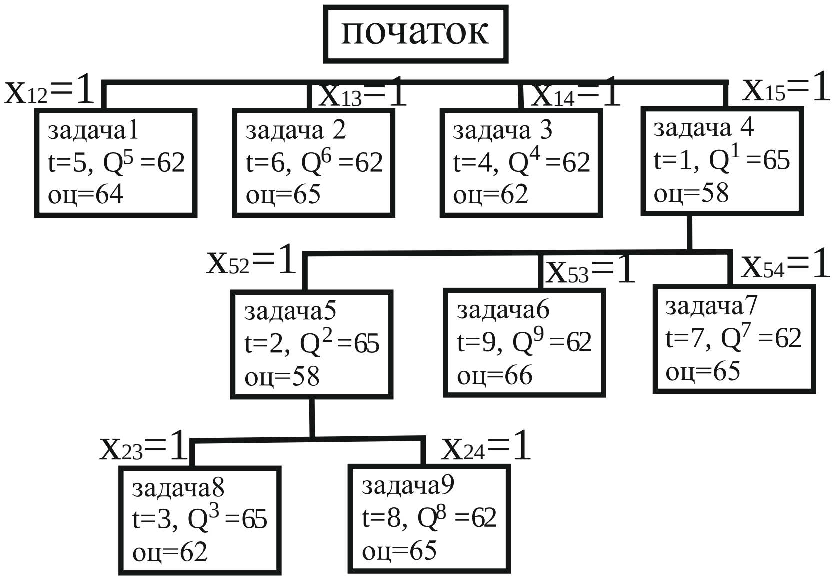


Рисунок 27. Алгоритм за кроками

Відповідь $x_{15}=x_{52}=x_{23}=x_{34}=x_{41}=1$

47. Динамічне програмування

Динамічне програмування відноситься до методів оптимізації. Ці методи розроблені американським вченим Беллманом.

Особливістю динамічного програмування є можливість визначення глобального оптимізму шляхом організації багатоетапного процесу, кожен крок, у якому підпорядкований загальному завданню оптимізації.

Динамічне програмування широко використовується у вирішенні завдань управління, де оптимізаційна задача може бути описана марківським процесом з дискретним станом. Великою перевагою методів динамічного програмування є їх зручна алгоритмізація та можливість використання у обчислювальній техніці.

Оптимізований процес або система характеризується деяким вектором стану x^i (стан системи на кроці i), в який об'єкт переходить під впливом управління y^i. Стан x^i залежить від стану на попередньому кроці x^{i-1} та управління y^i, тому можна записати, що

$$x^i=\varphi(x^{i-1},y^i) \qquad (166)$$

У свою чергу обране керування y^i залежить від стану x^{i-1}

$$Y^i=f(x^{i-1}). \qquad (167)$$

Кожен крок або переведення системи з одного стану в інший має на меті виграш K_i, який залежить від управління і стану

$$K_i=K(x^{i-1}, y^i). \qquad (168)$$

Завдання динамічного програмування полягає у виробленні управлінь, що дозволяють за n переходів досягти максимального виграшу K. Цьому загальному завданню підпорядковано управління на окремих кроках оптимізації.

Загальний виграш за n кроків є сумою виграшів, що одержуються в результаті запропонованих управлінь на кожному кроці оптимізації. Цей виграш і є цільовою функцією розв'язуваного завдання

$$K=\sum_{i=1}^{n} K_i(x^{i-1}, y^i). \qquad (169)$$

Зазначимо, що у стани системи та управління накладаються обмеження, тобто. стани та управління повинні бути в галузі допустимих $x \in x_{дод}$, $y \in y_{дод}$ де $x_{дод}$, $y_{дод}$- області допустимих станів системи та управлінь відповідно.

Якщо система мала початкову відповідність x_0 і за n кроків перейшла в такий новий стан, що цільова функція досягла максимуму, то кажуть, що до системи було додане *оптимальне керування*:

$$K_n(x^0)=\max[K_1(x^0, y^1)+K_2(x^i, y^2)+\ldots+K_n(x^{n-1}, y^n)] \qquad (170)$$

Розглянемо обчислювальний алгоритм

Нехай вихідний стан -x^0, кінцеве -x^n і відома оптимальна стратегія управління. Тоді за n кроків загальний виграш дорівнюватиме

$$K_n=\max[K_1(x^0, y^1)+K_{n-1}(x^1)] \qquad (171)$$

де $K_1(x^0, y^1)$ - виграш на першому кроці;

$K_{n-1}(x^1)$ - виграш на (n-1)) наступних кроках при початковому стані x^1, отриманому після першого кроку оптимізації.

Це функціональне співвідношення (171) називається функціональним рівнянням принципу оптимальності. З нього випливає, що виграш на будь-якому етапі оптимізації може бути визначений з урахуванням досягнутого виграшу на попередньому етапі. Отже, функціональне рівняння принципу оптимальності носить рекурентний характер, і якщо обчислити його на будь-якому кроці, весь покроковий процес оптимізації може бути знайдений.

Для запису обчислювального алгоритму почнемо його розгляд з останнього n кроку. На підставі функціонального рівняння (171) можна записати

$$K_n(x^{n-1})=\max[K_n(x^{n-1},y^n)] \qquad (173)$$

Таким чином, якщо визначити стан системи, що оптимізується, і рівняння, що призводять до максимального виграшу на останньому кроці, то оптимізаційне завдання стає вирішуваним. І тому використовуються задані обмеження. З області цих обмежень вибираються такі обмеження (x^{n-1}, y^n), які призводять до максимального виграшу.

За аналогією з попереднім функціональне рівняння для (n-1) кроку буде наступним:

$$K_{n-1}(x^{n-2})=\max[K_{n-1}(x^{n-2}, y^{n-1})+K_n(x^{n-1})]. \qquad (174)$$

Визначаючи (x^{n-2}, y^{n-1}) аналогічно (x^{n-1}, y^n), вирішуємо завдання на (n-1) кроці.

Так послідовно вирішивши рекурентні рівняння кожного кроку оптимізації до одного, знайдемо умовне оптимальне управління, яке призводить до розв'язання завдання.

Оскільки початковий стан заданий, можна перейти до вирішення завдання у напрямі, використовуючи вже отримані оптимальні управління.

Приклад:

Спроектувати ланцюг живлення мінімальної довжини, що з'єднує блок A_7 з будь-яким із двох джерел живлення U_1 або U_2. Ланцюг живлення повинен проходити через вільні контакти роз'ємів, що з'єднують блоки $A_1 \ldots A_6$ та джерела живлення. Розташування блоків та довжина провідників у відносних одиницях показано на рисунку:

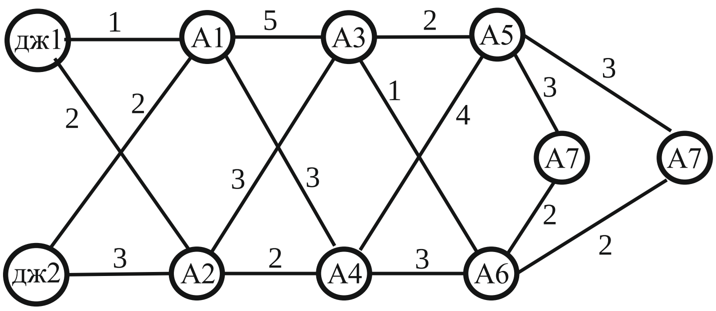


Рисунок 28. Граф відстаней

У разі цільової функцією є min $L_{\sum}$, а обмеженнями – задані довжини кабелів.

Покроковий процес оптимізації почнемо з вершин U_1, U_2. Знаходимо min довжини кабелів, що з'єднують вершини A_1, A_2 із джерелами живлення.

1-й крок:

*$A_1 \rightarrow U_1 = 1$ * - оптимальна стратегія, K=1*

$A_1 \rightarrow U_2 = 2$

*$A_2 \rightarrow U_1 = 2$ *, K=2*

$A_2 \rightarrow U_2 = 3$

2-й крок:

$A_3 \rightarrow A_1 = 5 \quad K = 5+1 = 6$

$A_3 \rightarrow A_2 = 3 \quad K = 3+2 = 5 \quad *$

$A_4 \rightarrow A_1 = 3 \quad K = 3+1 = 4 \quad *$ - *рівноцінні обидва шляхи, тому беремо будь-який*

$A_4 \rightarrow A_2 = 2 \quad K = 2+2 = 4 \quad *$

3-й крок:

$A_5 \rightarrow A_3 = 2 \quad K = 7 \quad *$

$A_5 \rightarrow A_4 = 4 \quad K = 8$

$A_6 \rightarrow A_3 = 1 \quad K = 6 \quad *$

$A_6 \rightarrow A_4 = 3 \quad K = 7$

4-й крок:

$A_7 \rightarrow A_5 = 3 \quad K = 10$

$A_7 \rightarrow A_6 = 2 \quad K = 8 \quad *$

Ланцюг живлення min довжини:

$A_7 \rightarrow A_6 \rightarrow A_3 \rightarrow A_2 \rightarrow U_1$, $L_{\sum} = 8$.

Література:

1. Зайченко Ю.П. Исследование операций/ Ю.П. Зайченко -К.: Вища школа, - 1988 р., 552 с.

2. Зайченко Ю.П. Исследование операций: сборник задач./ Ю.П.Зайченко, С.А.Шумілова - К.: Вища школа 1990, 239с.

3. Павленко П.М. Математичне моделювання систем і процесів: навч. посіб./ П.М. Павленко, С.Ф.Філоненко, О.М.Чередніков, В.В. Трейтяк - Київ: НАУ, 2017. 392с.

4. Лавров Є.А. Математичні методи дослідження операцій: підручник / Є.А. Лавров, Л.П. Перхун, В.В. Шендрик та ін. Суми.: Сумський державний університет, 2017. 212 с.

5. Чуйко Г.П. Математичне моделювання систем і процесів: навч. посіб. / Г.П.Чуйко, О.В.Дворник, О.М.Яремчук- Миколаїв: Вид-во ЧДУ імені Петра Могили, 2015. 244 с.

6. Квєтний Р.Н. Комп'ютерне моделювання систем та процесів. Методи обчислень. Ч. 1./ Р.Н.Квєтний, І.В.Богач, О.Р.Бойко, О.Ю.Софина, О.М.Шушура - Вінниця: ВНТУ, 2013. 191с.

7. Квєтний Р.Н. Комп'ютерне моделювання систем та процесів. Методи обчислень. Ч. 2. / Р.Н.Квєтний, І.В.Богач, О.Р.Бойко, О.Ю.Софина, О.М.Шушура -Вінниця: ВНТУ, 2013. 235с.

8. Математичне моделювання в електроенергетиці: підручник / за ред. М.С. Сегеди. 2-ге вид. Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2013. 606 с.

9. Погоруй А. О. Вступ до теорії випадкових процесів: навч. посіб. / А.О. Погоруй-Чемерис – Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2020. 70 с.

10. Литвинов А.Л. Теорія систем масового обслуговування: навч. посіб./ А.Л. Литвинов - Харків: ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2018. 141 с.

11. Голоскоков О.Є. Основи теорії експоненціальних систем масового обслуговування: навч. посіб. / О.Є.Голоскоков, А.О.Голоскокова, Є.О.Мошко - Харків: НТУ «ХПІ», 2017. 312.

12. Коцовський В.М. Дискретна математика та теорія алгоритмів. Ч.1./ В.М.Коцовський - Ужгород: УНУ, 2016. 96 с.

13. Павленко П.М. Основи математичного моделювання систем і процесів: навч. посіб. / П.М. Павленко - Київ: Книжкове вид-во НАУ, 2013. 201 с

14. Фролов В.А. Анализ и оптимизация в прикладных задачах конструирования РЭС./ В.А.Фролов - Киев, "Вища школа", 1991. -310с

Навчальне видання

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

з дисципліни

"**МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ І ОПТИМІЗАЦІЯ ЕЛЕКТРОННИХ СИСТЕМ** "

(для здобувачів вищої освіти спеціальностей 172 «Телекомунікації та радіотехніка»,171 «Електроніка»)

(електронне видання)

Укладач:
Ж.Г. САМОЙЛОВА

Оригінал-макет *Ж.Г. Самойлова*

Підписано до друку 10.03.2023.
Формат 60x84 1/16. Папір типогр. Гарнітура Times.
Друк офсетний. Умов. друк. арк. ___. Обл.-вид. арк.___.
Тираж ___ екз. Вид. № ___. Замов. № . Ціна договірна.

Видавництво Східноукраїнського національного університету імені Володимира Даля

Свідоцтво про реєстрацію: серія ДК № 1620 від 18.12.03 р.
Адреса університета: вул. Іоанна Павла 2, 17
м. Київ, 01042, Україна
e-mail: vidavnictvoSNU.ua@gmail.com.