

Стенцель Й. І., Поркуян О. В., Літвінов К. А., Сотнікова Т. Г.

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ПРОЦЕСІВ ЕНЕРГО-МАСОПЕРЕНЕСЕННЯ МЕТОДОМ БАЛАНСУ ШВИДКОСТЕЙ

*У статті приводиться аналіз методів математичного моделювання нелінійних процесів перенесення імпульсу енергії та маси в технологічних об'єктах управління. Вказується, що відомі закони явищ перенесення описують процеси від джерела безмежної потужності до середовища. Показані недоліки математичного моделювання нелінійних процесів та складність розв'язку нелінійних математичних моделей. Пропонується метод моделювання таких процесів на основі теорії реологічних переходів та інтегральної імпульсної дельта-функції Дірака. Показано, що технологічні процеси розділяються на джерела, зони реологічних перетворень і накопичувача новоствореної маси, енергії та кількості руху.*

**Ключові слова:** модель, перехід, маса, енергія, функція Дірака, градієнт.

**Актуальність дослідження.** Контроль та управління технологічними процесами здійснюється на основі сучасних інтелектуальних систем автоматизації, котрі передбачають широке застосування математичного забезпечення. Велику частку для цього відіграють прикладні математичні моделі, котрі призначені не тільки для розрахунку керуючих дій, але й для визначення неконтрольованих технологічних параметрів, оптимізації технологічного процесу та уведення поправок до результатів контролю. Так як сучасні технологічні процеси характеризуються великою швидкістю протікання, а для обробки вимірювальної інформації та розрахунків управляючих дій потрібно деякий час, то однією з основних вимог, які висуваються до програмного забезпечення, є простота математичних моделей при їх адекватності з статичними та динамічними характеристиками технологічного процесу та швидкістю розрахунків відповідних управляючих дій.

**Постановка проблеми.** Матеріальні та енергетичні потоки, котрі направляються для відповідних перетворень в технологічні апарати (теплообмінники, випарні установки, абсорбери, реактори тощо) чи інші технічні пристрої змінюють свій початковий стан за рахунок реологічних перетворень, що приводить до створення матеріальних чи енергетичних потоків з новими параметрами (концентраціями, температурами, тисками тощо). Перетворення можуть бути простими (однотадійними) або складними (багатотадійними). До складних технологічних об'єктів можна віднести кожухотрубні теплообмінники, реактори зі створенням проміжних продуктів, випарні установки, ректифікаційні колони та більшість реакційних процесів, наприклад, перетворення тиску пари в механічний рух парової турбіни або електричної енергії в системі генератор-двигун [1].

Основою для реологічних перетворень є закони перенесення імпульсу маси (закони Фіка), теплової енергії (закон Фур'є) і кількості руху (закон Ньютона), на котрих базується теорія масо-тепло- та енергоперенесення [2, 3]. Всі відомі закони явищ перенесення, як правило, описують процес перенесення імпульсу маси, тепла та кількості руху від джерела безмежної потужності до середовища, котре приймається безмежним. Для реальних технологічних процесів спостерігається відхилення від відомих законів, так як швидкості перенесення тих чи інших матеріальних, теплових чи інших енергетичних потоків є обмеженими. Це приводить до того, що математичні моделі реальних процесів перенесення є настільки складними, що не мають аналітичного розв'язку або непридатні для практичного використання в автоматизованих системах управління. Тому проблема пошуку та розробки методів вдосконалення математичного описання процесів явищ перенесення є актуальною.

**Теоретичний аналіз дослідження.** Відомо [4], що пропорційність теплового потоку до градієнта температур приводить до закону Фур'є, котре має наступну форму:

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = a \nabla^2 T, \quad (1)$$

де  $T$  - температура;  $\theta$  - час перенесення;  $a$  - температуропровідність;  $\nabla$  - лапласіан.

Рівняння (1) описує баланс лінійної швидкості перенесення теплової енергії на вході в середовище та швидкістю розподілення її за лінійними координатами  $x, y, z$  цього середовища за рахунок температуропровідності. Так як температура визначається відношенням кількості теплоти до ентальпії  $S$ , то при  $S = const$  рівняння (1) можна привести до такої форми:

$$\partial q = a \nabla^2 q \partial \theta. \quad (2)$$

Якщо це є рівнянням теплового балансу, то його ліва частина є кількістю теплоти, котра поступає в середовище, повинна дорівнювати кількості теплоти, котра накопичується в ньому. Кількість накопиченої теплоти в середовищі масою  $m$  і питомою теплоємністю  $c$  визначається рівнянням:

$$\partial q_H = m c \partial T. \quad (3)$$

Якщо (1) є рівнянням теплового балансу, то повинна виконуватися рівність:

$$a\nabla^2 q \partial\theta = mC\partial T$$

звідки

$$\frac{\partial T}{\partial\theta} = \frac{a}{mC} \nabla^2 q = \frac{a}{mC} S \nabla^2 T = \frac{aS}{mC} \nabla^2 T$$

Рівняння (1) описує процес перенесення тепла з однієї умовної зони в іншу, але не розглядає куди і яким чином переходить далі це тепло. З метою пояснення цього недоліку рівняння Фур'є деякі автори, у тому числі й проф. Вайнберг [5] вказують, що адекватну модель можна отримати, якщо уточнити закон Фур'є, врахувавши інерційність молекул. Тоді закон Фур'є набирає наступну нелінійну форму:

$$\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial\theta^2} + \frac{\partial T}{\partial\theta} = -a\nabla^2 T, \quad (4)$$

де  $\alpha \ll A = B^2/a$  - деяка стала перенесення тепла;  $A, B$  - характерний час і довжина в розглядуваному процесі відповідно.

Рівняння теплопровідності зі стоком теплової енергії запишемо в такому вигляді:

$$\frac{\partial T}{\partial\theta} + a\nabla^2 T = \tau_C \frac{d^2 T}{dt^2} + \frac{dT}{dt}, \quad (5)$$

де  $\tau_C$  - стала часу стоку теплової енергії.

Якщо  $a\nabla^2 T = \tau_C \frac{d^2 T}{dt^2}$ , то приходимо до оптимального випадку, коли швидкість притоку тепла дорівнює швидкості його стоку. Якщо  $\tau_C = \alpha$ , а  $t = \theta$ , то приходимо до рівняння (3). Таким чином можна зробити висновок про те, що рівняння Фур'є не враховує стоку теплової енергії, що призводить до безмежної швидкості перенесення тепла. Потрібно сказати, що існуючі методи математичного моделювання нелінійних технологічних процесів не знаходять використання в сучасних системах контролю та управління. Основною задачею математичного моделювання явищ перенесення є розробка методів аналітичного розв'язку нелінійних диференціальних рівнянь, придатних для практичного використання. При дослідженні явищ перенесення виходили з того, що між двома тілами чи фазами, на границі яких проходить перенесення імпульсу енергії, маси чи кількості руху, існує зона переходу. І тільки в цій зоні проходять процеси реологічних перетворень, які описуються відповідними законами.

**Мета статті (як наукового дослідження)** полягає в тому, щоби показати можливість моделювання складних технологічних об'єктів керування на основі балансу швидкостей вхідних і вихідних потоків, незворотних реологічних переходів у формі інтегральної імпульсної дельта-функції Дірака, що дозволяє описуватися такі об'єкти достатньо простими рівняннями, придатними для використання в комп'ютерно-інтегрованих системах контролю та управління.

**Викладення основного матеріалу дослідження.** Кожний технологічний процес, у котрому має місце перенесення імпульсу маси, енергії чи кількості у загальному вигляді руху складається з трьох послідовно включених динамічних ланок, як показано на рис. 1.

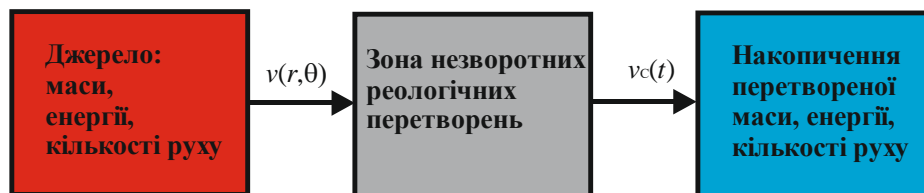


Рисунок 1 – Структурна схема процесу перенесення імпульсу маси, енергії та кількості руху

За джерело приймається об'єкт, який здатний постійно створювати масу чи енергію, котрі за рахунок перенесення кількості руху використовуються для їх перетворення в інші види маси, енергії та кількості руху. Джерела можуть бути як природними так і технічними. До природних відносяться джерела, котрі створюються в земних надрах та атмосфері, наприклад, природний газ, вугілля, вода, повітря, тепла енергія, а також позаземні джерела, наприклад енергія сонця та інших планет. Такі джерела прийнято називати джерелами з безмежною потужністю. До технічних відносять джерела, котрі створюють масу та енергію з природних джерел за рахунок їх відповідного перетворення з допомогою технічних засобів. Наприклад, природний газ можна перетворити на водень та оксид вуглецю за рахунок його конверсії з водяною паром, або в теплову енергію за рахунок спалювання. Вугілля можна спалювати та отримувати теплову енергію або перетворювати на хімічні компоненти, котрі в свою чергу є локальними джерелами маси та енергії. Від природних та технічних джерел

маса та енергія з допомогою технічних засобів (трубопроводів, ліній передач тощо) подається для подальшого перетворення зі швидкістю  $v_{\Pi}(\bar{r}, \theta)$  ( $\bar{r}$  - вектор напрямку руху потоку від джерела;  $\theta$  - час перенесення потоку) в інший об'єкт, котрий називається зоною незворотного реологічного перетворення (НРП). Зоною НРП може бути паровий котел, турбогенератор, паровий двигун, кожухотрубний теплообмінник, випарна установка енергії тощо. Із зони НРП нові матеріальні чи теплові потоки постійно виводяться зі швидкістю  $v_C(t)$ , де  $t$  - час виведення (стоку) матеріального чи теплового потоку із зони НРП в інший об'єкт, у котрому вони накопичуються (споживаються). Після споживання потоків стоку створюються відходи, котрі знову направляються в тверду та газову атмосфери землі, котрі сприймаються за безмежні. Таким чином у природі існує відповідний баланс маси, енергії та кількості руху, котрі характеризуються швидкістю  $v_{\Pi}(\bar{r}, \theta)$  їх перенесення у напрямку  $\bar{r}$  за час  $\theta$ . Рівність швидкостей перенесення деякого визначального параметра  $\alpha$  від джерела до зони НРП і визначального параметра  $\beta$  стоку від зони НРП до зони накопичення, якими можуть бути або маса, або енергія (теплова, випромінювання, електромагнітна тощо), або кількість руху (механічного, рідинного, газового) однозначно визначає баланс мас і енергії. Швидкість перенесення параметра  $\alpha$  дорівнює:

$$v_{\Pi}(\bar{r}, \theta) = \partial x(\alpha, \theta) / \partial \theta, \quad (6)$$

де  $x(\alpha, \theta)$  - зміна лінійного розміру при перенесенні визначального параметра  $\alpha$ .

Якщо визначальним параметром є об'ємна витрата  $F_{\Pi}$  з площею поперечного перетину  $S_{\Pi}$ , то швидкість  $v_{\Pi}(\bar{r}, \theta) = \partial F_{\text{ОП}} / \partial S_{\Pi}$ . При площі  $S_{\Pi} = xy$ , де  $x, y$  - деякі лінійні напрямки руху потоку, то її зміна  $\partial S_{\Pi} = \partial x \partial y$  або при  $\partial x = \partial y$  маємо:  $\partial S_{\Pi} = \partial x^2$ . Тоді рівняння для лінійної швидкості потоку перенесення приймає вигляд:

$$v_{\Pi}(x, \theta) = \partial^2 F_{\text{ОП}} / \partial x^2. \quad (7)$$

Прирівнюючи рівняння (1) і (2) приходимо до наступного диференціального рівняння балансу швидкостей при перенесенні лінійного розміру:

$$\frac{\partial x(F_{\text{ОП}}, \theta)}{\partial \theta} = K_{\Pi} \frac{\partial^2 F_{\text{ОП}}(\xi, \theta)}{\partial \xi^2}, \quad (8)$$

де  $K_{\Pi} [m^2/c]$  - ефективний коефіцієнт перенесення лінійного розміру;  $\xi$  - зміна відстані  $x$ .

Аналізуючи рівняння (1)-(3), приходимо до наступних висновків: при перенесенні імпульсу об'ємної витрати потоку, який рухається за напрямом  $x(F_{\Pi}, \theta)$ , ефективний коефіцієнт перенесення  $K_{\Pi} = 1$ ; рівняння (3) описує процес зміни лінійного розміру при перенесення потоку об'ємної витрати тільки від джерела, яким є деякий початковий постійний розмір  $L_0$  у напрямку  $x$ , наприклад до зони НРП, і не описує процесів, котрі проходять в цій зоні. При відповідних початкових умовах рівняння (3) має аналітичне рішення в наступній формі [6]:

$$x(F_{\text{ОП}}, \theta) = L_0 \cdot \operatorname{erfc} \left( \frac{\xi}{2\sqrt{K_{\Pi}\theta}} \right). \quad (9)$$

Попадаючи в зону НРП, маса, енергія чи кількості руху потоків перенесення перетворюються, в результаті чого створюються потоки з новою масою, енергією та кількістю руху, котрі виходять (стікають) з цієї зони у накопичувач безмежного об'єму. Відомо [6], що для закону теплопередачі Фур'є при відсутності внутрішніх джерел тепла справедливе наступне узагальнене рівняння:

$$c_p \rho \frac{\partial T}{\partial \theta} = \operatorname{div} \lambda \cdot \operatorname{grad} T, \quad (10)$$

де  $c_p, \rho, \lambda$  - теплоємність, густина і теплопровідність середовища відповідно.

Якщо процес перенесення імпульсу тепла здійснюється в одному напрямку, то рівняння (10) приводиться до наступного вигляду:

$$\frac{\partial T(\xi, \theta)}{\partial \theta} = a \frac{\partial^2 T(\xi, \theta)}{\partial \xi^2}, \quad (11)$$

де  $x$  - лінійний напрямок перенесення тепла;  $a = \lambda / c_p \rho$  - температуропровідність середовища.

При нульових початкових умовах рішенням рівняння (11) буде  
- при нагріванні середовища

$$T(\xi, \theta) = T_H \operatorname{erf}\left(\xi / 2\sqrt{a\theta}\right) \quad (12)$$

- при охолодженні середовища

$$T(\xi, \theta) = T_H \operatorname{erfc}\left(\xi / 2\sqrt{a\theta}\right). \quad (13)$$

Для перенесення імпульсу маси речовини згідно зі законом Фіка маємо:

$$\frac{\partial m(x, \theta)}{\partial \theta} = D_m \frac{\partial^2 m(\xi, \theta)}{\partial \xi^2}, \quad (14)$$

де  $m(\xi, \theta)$  - маса середовища, яка переноситься за напрямом  $\xi$  та часом  $\theta$ ;  $D_m$  - коефіцієнт ефективного перенесення маси.

При нульових початкових умовах рішення рівняння (14) має вигляд:

$$m(\xi, \theta) = m_H \operatorname{erf}\left(\xi / 2\sqrt{D_m\theta}\right), \quad (15)$$

Закон перенесення імпульсу кількості руху можна визначити з рівняння Нав'є-Стокса, яке має вигляд [12]:

$$\rho \frac{\partial v(\xi, \theta)}{\partial \theta} = \mu \frac{\partial^2 v(\xi, \theta)}{\partial \xi^2} - \frac{\partial P}{\partial \xi} - \gamma, \quad (16)$$

де  $\rho, \mu$  - густина та динамічна в'язкість середовища;  $v(\xi, \theta)$  - швидкість руху в напрямку  $\xi$  за час  $\theta$ ;  $P$  - перепад тиску в середовищі;  $\gamma = \rho g$  - сила земного тяжіння.

Якщо сила тиску середовища та земного тяжіння є незначними, то рівняння (16) приводиться до закону Ньютона:

$$\frac{\partial v(\xi, \theta)}{\partial \theta} = \nu \frac{\partial^2 v(\xi, \theta)}{\partial \xi^2}, \quad (17)$$

де  $\nu = \mu / \rho$  - кінематична в'язкість середовища.

Аналітичне рішення рівняння (16) при нульових початкових умовах має вигляд:

$$v(\xi, \theta) = v_H \operatorname{erf}\left(\xi / 2\sqrt{\nu\theta}\right) \quad (18)$$

Порівнюючи (9) з рівняннями (11), (14) і (16), бачимо їх подібність. Вони відрізняються тільки визначальним параметром (лінійним розміром, температурою, масою та швидкістю руху) і коефіцієнтом ефективного перенесення цього параметра. Потік маси, енергії чи кількості руху, котрі поступають в зону НРП від джерела інших потоків, які характеризуються своєю масою, енергією чи кількістю руху, за рахунок дифузії та конвекції перетворюються і виходять з цієї зони в накопичувач. Основою таких процесів є баланс мас, енергій та кількості руху. Баланс мас описується таким рівнянням:

$dm_{\Pi} = dm_T + dm_C,$	(19)
---------------------------	------

де  $dm_{\Pi} = F_{\Pi} dt$  - кількість маси, яка подається в зону НРП потоком масовою витратою  $F_{\Pi}$  за час  $\theta$ ;  $dm_T$  - кількість маси, котра перетворюється в зоні НРП за рахунок хімічної реакції, концентрування, розчинення тощо;  $dm_C = F_C dt$ .

Кількість маси, котра проходить перетворення в зоні НРП, залежить від інших параметрів і може визначатися за формулами:

- для газових середовищ: за зміною об'єму газу:  $dm_{\Pi} = \frac{P_{\Gamma}}{RT} dV$ ; за зміною тиску газу:  $dm_{\Pi} = \frac{V}{RT} dP_{\Gamma}$ ; за температурою газу:  $dm_{\Pi} = \frac{VP_{\Gamma}}{RT^2} dT$ ; за часом хімічної реакції:  $dm_{\Pi} = Vv_p(Q_H - Q)dt$ , де  $P_{\Gamma}, T, V$  - тиск, температура та об'єм газового середовища відповідно;  $R$  - універсальна газова стала;  $v_p$  - швидкість хімічної реакції;  $Q_H$  - концентрація реакційного компонента вхідного потоку витратою  $F_{\Pi}$ ;

- для рідинних середовищ: за рівнем рідини в зоні НРП:  $dm_{\Pi} = \rho S_{\Pi} dL$ ; за гідростатичним тиском рідини:  $dm_{\Pi} = \frac{S_{\Pi}}{g} dP_{\Gamma\partial}$ ; за поперечним перетином стоку рідини:  $dm_{\Pi} = \frac{P_{\Gamma\partial}}{g} dS_{\Pi}$ ; за часом хімічної реакції:

$dm_{\Pi} = Vv_p(Q_H - Q)dt$ , де  $\rho$  - густина рідини;  $S$  - площа перетворення маси, яка поступає в зону НРП;  $L$ ,  $P_{\Gamma\delta}$  - рівень і гідростатичний тиск рідини;  $g$  - прискорення земного тяжіння.

Кількість маси, яка виходить зі зони НРП, може бути визначена за наступними формулами:

- для рідинних середовищ:  $dm_C = \alpha S_C \sqrt{2gL} dt$ , де  $\alpha$ ,  $S_C$  - коефіцієнт витрати та поперечний перетин вихідного потоку (стоку);

- для газових середовищ:  $dm_C = \frac{\alpha S_C g}{\sqrt{gRT}} c_p P$ , де  $c_p$  - питома теплоємність газу;  $P$  - тиск.

Якщо процес реологічного перетворення супроводжується хімічною реакцією, то кількість новоствореної маси в зоні НРП

$$dm_p = V(Q_{\delta} - Q)[1 - \exp(-E/RT)]dt, \quad (20)$$

де  $V$  - об'єм зони НРП;  $Q_{\delta}$ ,  $Q$  - концентрація реагуючого компонента, котра надходить в зону НРП від джерела;  $E$  - енергія активації для хімічної реакції;  $R$  - універсальна газова стала;  $T$  - температура реакції.

У загальному випадку математичні моделі для зони НРП можна визначити з наступних рівнянь:

- балансу мас:

$$\sum dm_H = dm_3 + \sum dm_C; \quad (21)$$

- балансу температури (енергії):

$$\sum dT_H = dT_3 + \sum dT_C; \quad (22)$$

- балансу кількості руху:

$$\sum dv_H = dv_3 + \sum dv_C; \quad (23)$$

де  $\sum dm_H$ ,  $\sum dT_H$  і  $\sum dv_H$  - сума мас, температур та кількості руху, котрі надходять в зону НРП від джерел відповідно;  $m_3$ ,  $dT_3$  і  $dv_3$  - маса, температура та кількість руху, котрі мають місце в зоні НРП;  $\sum dm_C$ ,  $\sum dT_C$  і  $\sum dv_C$  - сума мас, температур та кількості руху, котрі виходять (стікають) із зони НРП.

У результаті отримуються математичні моделі для зони НРП у формі нелінійних диференціальних рівнянь у наступному вигляді:

$$\tau_n^n \frac{d^n \beta}{dt^n} + \dots + \tau_1 \frac{d\beta}{dt} + \beta = \alpha(x, \theta), \quad (24)$$

де  $\tau_n, \tau_1$  - сталі часу перенесення вихідних потоків;  $\beta$  - створений у зоні НРП визначальний параметр реологічного перетворення;  $\alpha(x, \theta)$  - визначальний параметр вхідних потоків.

Якщо джерело має безмежну потужність, то  $\alpha(x, \theta) = const$ . Тоді швидкість руху  $\beta(t)$  визначального параметра вихідного потоку дорівнює:

$$\tau_n^n \frac{d^{n+1} \beta}{dt^{n+1}} + \dots + \tau_1 \frac{d^2 \beta}{dt^2} + \frac{d\beta}{dt} = 0. \quad (25)$$

Із законів явищ перенесення видно, що при наявності конвекційної складової потоку маємо:

$$\frac{\partial \alpha(x, \theta)}{\partial \theta} + D_{\alpha} \frac{\partial^2 \alpha(x, \theta)}{\partial x^2} + v_k \frac{\partial \alpha(x, \theta)}{\partial x} = 0. \quad (26)$$

де  $D_{\alpha}$  - ефективний коефіцієнт перенесення визначального вхідного потоку;  $v_k$  - конвекційна складова швидкості вхідного потоку.

Оскільки праві частини рівнянь (25) і (26) дорівнюють нулю, то вони є тотожними. Враховуючи тотожність процесів явищ перенесення на деяких границях переходу при нульових граничних умовах, отримуємо наступне нелінійне диференціальне рівняння в такій формі:

$$\frac{\partial \alpha(x, \theta)}{\partial \theta} + D_{\alpha} \frac{\partial^2 \alpha(x, \theta)}{\partial x^2} + v_k \frac{\partial \alpha(x, \theta)}{\partial x} = \tau_n^n \frac{d^{n+1} \beta(t)}{dt^{n+1}} + \dots + \tau_1 \frac{d^2 \beta(t)}{dt^2} + \frac{d\beta(t)}{dt}. \quad (27)$$

Оскільки ліва частина рівняння (27) описує швидкість руху вхідного потоку  $v(\bar{r}, \theta)$  при  $\bar{r} = x$ , а права - швидкість руху вихідного потоку  $v_C(t)$ , то воно є рівнянням балансу швидкостей. Так як вхідний та вихідний

потоки мають поперечні перетини відповідно  $S_{\Pi}$  і  $S_C$ , а об'ємні витрати  $F_{O\Pi} = v(x, \theta)S_{\Pi}$  і  $F_{OC} = v(t)S_C$ , то для виконання рівності (27) потрібно, щоби об'ємна витрата вихідного потоку  $F_{OC} = F_{O\Pi}S_C/S_{\Pi}$ . Відповідно для масових витрат маємо:  $F_{M\Pi} = \rho_{\Pi}F_{O\Pi} = \rho_{\Pi}v(x, \theta)/S_{\Pi}$  і  $F_{MC} = \rho_C F_{OC} = \rho_C v(t)/S_C$ . З останніх рівностей видно, що для забезпечення балансу швидкостей потоків необхідно, щоби швидкість вхідного потоку

$$v(x, \theta) = v(t) \left( \frac{\rho_C}{\rho_{\Pi}} \right) \left( \frac{S_{\Pi}}{S_C} \right), \quad (28)$$

де  $\rho_{\Pi}, \rho_C$  - густина вхідного та вихідного потоків відповідно.

Таким чином, рівняння (27) є математичною моделлю реологічного перенесення маси, енергії та кількості руху в диференціальній формі. Це рівняння є багатопараметричним з наступними основними змінними параметрами:  $\alpha(x, \theta)$  і  $\beta(t)$  - вхідний і вихідний визначальні параметри відповідно;  $\theta$  і  $t$  - час перенесення визначального параметра  $\alpha(x, \theta)$  до зони НРП і час стоку створеного параметра  $\beta(t)$ ;  $x$  - напрямок перенесення вхідного потоку;  $v_k$  - лінійна швидкість конвекційної складової визначального параметра вхідного потоку;  $\tau_n$  - сталі часу перенесення визначального параметра вихідного потоку. Як показано в [9], такі нелінійні рівняння не мають аналітичного розв'язку, а наближені методи є не достатньо точними, що ускладнює їх дослідження, а особливо їх практично неможливо використовувати в сучасних системах контролю та управління. Тому основною подальшою задачею є розробка та дослідження простих методів розв'язку нелінійних диференціальних рівнянь балансу швидкостей потоків визначальних параметрів явищ перенесення.

**Описання процесу перенесення імпульсу маси, енергії та кількості руху інтегральною імпульсною дельта-функцією Дірака.** При перенесенні імпульсу енергії, маси чи кількості руху по крайній мірі повинно бути два середовища: джерело з визначальним параметром  $\alpha$  і накопичувач з визначальним параметром  $\beta$ , як показано на (рис. 2).

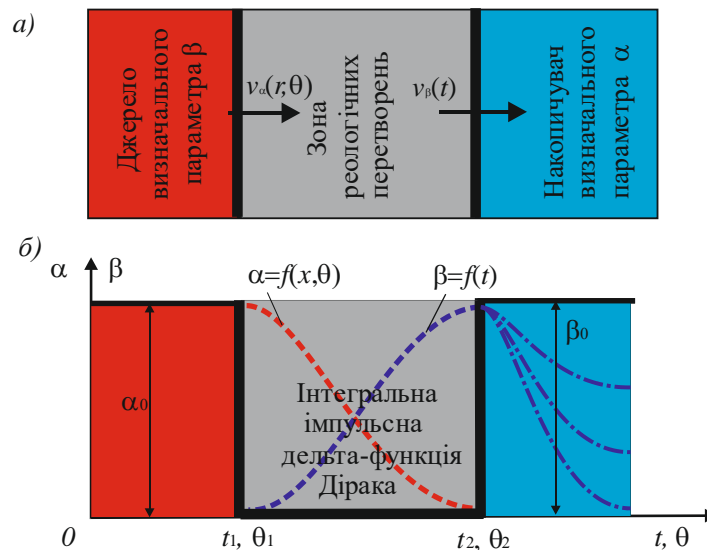


Рисунок 2 – Фізична модель і графіки НРП для вхідного та вихідного визначальних параметрів

Нехай джерело характеризується початковим визначальним параметром  $\alpha_0$ , а на вході зони НРП є змінний визначальний параметр  $\alpha_1$ , який може змінюватися від 0 до  $\alpha_0$ . На межі джерело-зона НРП потенціал визначального параметра  $\varphi_\alpha(\bar{r}, \theta) = \alpha_0 - \alpha_1(\bar{r}, \theta)$ . У зоні НРП потенціал  $\varphi_\alpha(\bar{r}, \theta)$  змінюється від максимального значення  $\varphi_\alpha(\bar{r}, \theta) = \varphi_{\alpha \max}$  до мінімального  $\varphi_\alpha(\bar{r}, \theta) = \varphi_{\alpha \min}$ . У зоні НРП визначальний параметр джерела  $\alpha(\bar{r}, \theta)$  перетворюється в інший визначальний параметр  $\beta(\bar{r}, \theta) = \beta(t)$ , де  $t$  - час реологічного перетворення. При цьому приймається до уваги, що це перетворення проходить одночасно за всіма напрямками руху параметра  $\alpha(\bar{r}, \theta)$ . Тому у загальному випадку час перенесення  $\theta \neq t$ . На кінці зони НРП створюється максимальна кількість визначального параметра  $\beta(t) = \beta_{\max}$ , яка виходить з цієї зони та переходить в накопичувач. Якщо накопичувач є безмежним, то його потенціал  $\varphi_\beta = \beta_{\max}$ . При обмеженому за об'ємом накопичувачі потенціал параметра  $\beta(t)$  змінюватиметься від 0 до  $\beta_{\max}$ .

Потенціал перенесення вхідного потоку є векторною величиною  $\varphi(\bar{r}, \theta)$ , де  $\bar{r}$  - вектор направленості руху;  $\theta$  - час перенесення. На рис. 2, а показана фізична модель перенесення визначального параметра  $\alpha$  від його джерела до зони реологічного перетворення зі швидкістю  $v_\alpha(x, \theta)$ . На границі розділу зона НРП–

накопичувач параметр  $\beta$  набуває максимального значення та виводиться зі швидкістю  $v_\beta(t)$  в накопичувач. При таких умовах процес реологічного перетворення в зоні НРП протікає за відрізок часу  $\Delta t_\beta = \Delta \theta_\alpha = \Delta \xi = t_2 - t_1 = \theta_2 - \theta_1 = const$ . Таким чином процес, котрий протікає на відрізку часу  $\Delta \xi$  є інтегральною імпульсною дельта-функцією Дірака з ядром, яке описує реологічне перетворення, у такій формі [10]:

$$\int_{t_1+0}^{t_2} f(\xi) \delta(\xi - \xi_0) d\xi = \begin{cases} 0 & \xi_0 > t_1, \xi_0 \leq t_2 \\ f(\xi_0 + 0) & t_1 < \xi_0 < t_2 \end{cases}, \quad (29)$$

де  $\delta(\xi - \xi_0)$  - ядро лінійного інтегрального перетворення;  $\xi, \xi_0$  - поточний і максимальний час зменшення параметра  $\alpha$  і збільшення параметра  $\beta$  в зоні НРП.

Ядро лінійного інтегрального перетворення описує процес, який протікає в зоні НРП при перетворенні параметра  $\alpha$  за поточний час  $\xi$ . Так як перенесення параметра  $\alpha$  від джерела в зону НРП описується відомими законами явищ перенесення, а процес виведення (стоку) параметра  $\beta$  з цієї зони за інтегральними законами, то у загальному вигляді, враховуючи умови балансу маси, енергії та кількості руху для зони перетворення, ядро лінійного інтегрального перетворення описуватиметься наступним рівнянням:

$$\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \theta} + \text{div}(\varphi_\alpha \cdot \bar{v}_\alpha) = -\text{div}(D_\alpha \nabla \varphi_\alpha) + \gamma_\beta(t). \quad (30)$$

де  $\varphi_\alpha = \alpha_0 - \alpha$  - потенціал визначального параметра вхідного потоку;  $\alpha_0, \alpha$  - максимальне та поточне значення визначального параметра вхідного потоку;  $\bar{v}_\alpha$  - середня швидкість руху параметра  $\alpha$ ;  $D_\alpha$  - ефективний коефіцієнт перенесення параметра  $\alpha$ ;  $\nabla \varphi_\alpha$  - лапласіан;  $\gamma_\beta(t)$  - швидкість виведення визначального параметра  $\beta$  із зони НРП за час  $t$ .

Друга складова рівняння (30) описує конвекційну складову швидкості руху потоку потенціалу  $\varphi_\alpha$ . Враховуючи, що коефіцієнт  $D_\alpha$  незначно залежить від процесу перенесення, а перенесення здійснюється в напрямку  $x$ , приходимо до наступного диференціального рівняння:

$$\frac{\partial \varphi_\alpha(x, \theta)}{\partial \theta} + D_\alpha \frac{\partial^2 \varphi_\alpha(x, \theta)}{\partial x^2} + \bar{v}_\alpha \frac{\partial \varphi_\alpha(x, \theta)}{\partial x} = \frac{d}{dt} \left[ \sum_0^n \tau_n^n \frac{d^n \varphi_\beta(t)}{dt^n} \right], \quad (31)$$

де  $\varphi_\alpha(x, \theta) = \alpha_0 - \alpha(x, \theta)$  - потенціал параметра  $\alpha$ ;  $\alpha_0, \alpha(x, \theta)$  - максимальне та поточне значення параметра  $\alpha$  за напрямком перенесення  $x$  за час  $\theta$ ;  $\gamma_\beta(t) = \frac{d}{dt} \left[ \sum_0^n \tau_n^n \frac{d^n \varphi_\beta(t)}{dt^n} \right]$  - швидкість виведення (стоку) створеного параметра  $\beta$  із зони НРП за час  $t$ ;  $\tau_n^n$  - сталі часу процесу створення потенціалу параметра  $\beta$  в зоні НРП;  $n$  - кількість стадій перетворень потенціалу параметра  $\alpha$  у потенціал параметра  $\beta$ ;  $\varphi_\beta(t) = \beta_0 - \beta(t)$  - потенціал параметра  $\beta$  вихідного потоку;  $\beta_0, \beta(t)$  - максимальне та поточне значення параметра  $\beta$ .

Рівняння (31) є математичною моделлю об'єкта контролю та управління, яка описується нелінійним диференціальним рівнянням.

**Висновки.** Вперше розглядаються питання явищ перенесення на основі теорії реологічних перетворень, в основу котрої покладено принцип балансу швидкостей, який полягає в тому, що процес перенесення визначального параметра (маси, тепла, енергії та кількості руху) розділяється на три складові динамічні ланки: ланка перенесення визначального параметра від джерела до зони незворотного реологічного перетворення (НРП), ланка динамічного перетворення цього параметра та ланка накопичення (стоку) нового визначального параметра. Швидкість перенесення визначального параметра в першій ланці описується відомими законами явищ перенесення (Фур'є, Фіка та Ньютона), у другій ланці – фізико-хімічними законами (наприклад, Нав'є-Стокса, Ареніуса та іншими), а в третій – інтегральними. Показано, що швидкість перетворення визначального параметра в зоні НРП можна описати інтегральною імпульсною дельта-функцією Дірака з ядром у формі нелінійного диференціального перенесення визначального параметра. Наступною задачею моделювання технологічних об'єктів контролю та управління є розробка та обґрунтування початкових і граничних умов, а також способів рішення нелінійних диференціальних рівнянь перенесення визначального параметра в зоні НРП, методом нульового градієнта, котрий розглядатиметься в наступній роботі.

## Література

1. Романков П. Г. Процессы и аппараты химической промышленности. Текаст /П. Г. Романков, М. И. Курочкина, Ю. А. Мозжерин, Н. Н. Смирнов. - Л.: Химия, 1989. – 560 с.

2. Берд Р. Явления переноса. Текст / Р. Берд, В. Стюарт, Е. Лайтфут. – М.: Химия, 1974. – 688 с.
3. Мак-Адамс В. Х. Теплопередача. Пер с англ.- М.: Металлургиздат, 1961. – 669 с.
4. Таганов И. Н. Моделирование процессов массо- и энергопереноса. Текст /И. Н. Таганов. – Л.: Химия, 1979. – 203 с.
5. Вайнберг А. М. Математическое моделирование процессов переноса. Решение нелинейных краевых задач. Текст /А. М. Вайнберг. – Москва-Иерусалим, 2009. – 210 с.
6. А. В. Теория теплопроводности. Текст /А. В. Лыков. – М.: Высш. шк., 1967. – 599 с.
7. Лыков А. В. Теория тепло- и массопереноса. Текст /А. В. Лыков, Ю. А. Михайлов. - М.: Госэнергоиздат, 1963. – 389с.
8. Стенцель Й.І. Математичне моделювання технологічних об'єктів керування. Навч. посібник. Текст /Й. І. Стенцель. – К.: ІСДО, 1993. – 328 с. ISBN 5-7763-1679-0.
9. Стенцель Й. І. Математичне моделювання хімічних процесів на основі теорії реологічних переходів. Текст /Й. І. Стенцель //Вісник Східноук. нац. університету. Науковий збірник. –Луганськ, №5 (111), Ч.2.- 2007. – с.91-97.
10. Y. Stentsel, O. Porkuian, K. Litvinov, O. Shapovalov/ 2016. «Research of heat energy transfer processes based on rheological transitions theory and zero gradient method», *TEKA Commission of Motorization and Energetics in Agriculture. – An International quarterly journal on Motorization, vehicle Operation, Energi Efficiency and Mechanical Engineerind*, Lublin-Rzeszow, Vol. 16, № 3, 21 – 29.

В статье приводится анализ существующих методов математического моделирования нелинейных процессов переноса импульса энергии и массы в технологических объектах управления. Показано, что известные законы явлений переноса описывают процессы от источника неограниченной мощности к некоторой среде. Показаны недостатки математического моделирования нелинейных процессов и сложность решения нелинейных математических моделей. Предлагается и обосновывается метод моделирования таких процессов на основе теории реологических переходов и интегральной импульсной дельта-функции Дирака. Показано, что технологические процессы разделяются на источники массы, энергии и количества движения, зоны реологических преобразований и накопителя новосозданной массы, энергии и количества движения.

**Ключевые слова:** модель, переход, масса, энергия, функция Дирака, градиент.

Stentsel Y. I., Porkuian O. V., Litvinov K. A., Sotnikova T. G.

## MATHEMATICAL MODELLING OF NONLINEAR PROCESSES OF ENERGY AND MASS TRANSFER BY METHOD OF BALANCE OF VELOCITIES

The article analyses methods of mathematical modelling of nonlinear processes of energy and mass pulse transfer in the technological controlled objects. It is noted that the well-known laws of transfer phenomena describe the processes from the infinite energy source to the medium. Disadvantages of mathematical modelling of nonlinear processes and complexity of solution of nonlinear mathematical models are shown. A modelling method for such processes is proposed based on the theory of rheological transitions and the integral impulse Dirac delta function. It is shown that technological processes are divided into sources, zones of rheological transformations and storage of the newly created mass, energy and momentum.

**Keywords:** model, transition, mass, energy, Dirac function, gradient.

**Problem statement.** Control and management of technological processes is carried out on the basis of modern intelligent automation systems, which provide a wide use of mathematical support. Here a large part is played by applied mathematical models, which are designed not only for calculation of control actions, but also for determination of uncontrolled technological parameters, optimization of the technological process and introduction of amendments to the control results. Since modern technological processes are characterized by high flow velocity and processing of measuring information and calculations of control actions require some time, one of the main requirements for the software is simplicity of mathematical models and their adequacy to the static and dynamic characteristics of the technological process and calculating speed of the respective control actions.

**Problem statement.** Material and energy flows directed for respective transformations into processing units (heat exchangers, evaporators, absorbers, reactors, etc.) or other technical devices change their initial state due to rheological transformations, which leads to creation of material or energy flows with new parameters (concentrations, temperatures, pressures, etc.). Transformations can be simple (one-stage) or complex (multi-stage). Complex technological objects include shell and tube heat exchangers, reactors with creation of intermediate products, evaporators, rectification columns and most reaction processes, for example, conversion of steam pressure into mechanical motion of the steam turbine or electric energy in the generator-engine system [1].

The basis for rheological transformations are the laws of transfer of mass (Fick's law), thermal energy (Fourier's law), and momentum (Newton's law) pulse, on which the theory of mass, heat and energy transfer is based [2, 3]. All known laws of transfer phenomena generally describe the process of transferring mass, heat and momentum pulse from the infinite energy source to the medium, which is taken unlimited. For real technological processes there is a deviation from the known laws, as velocity of transfer of one or another material, thermal or other energy flow is limited. This leads to the fact that mathematical models of real transfer processes are so complex that they do not have an analytical solution or are unsuitable for practical use in automated control systems. Therefore, the problem of finding and developing methods for improving the mathematical description of the transfer process phenomena is relevant.

**Theoretical analysis of the research.** It is known [4] that proportionality of the heat flow to the temperature gradient leads to Fourier's law, which has the following form:

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = a \nabla^2 T, \quad (1)$$

where  $T$  - the temperature;  $\theta$  - the transfer time;  $a$  - thermal conductivity;  $\nabla$  - Laplacian

Equation (1) describes the balance of linear velocity of thermal energy transfer at the input to the medium and velocity of its distribution along the linear coordinates  $x, y, z$  of this medium due to thermal conductivity. Since temperature is determined by the ratio of the amount of heat to enthalpy  $S$ , then when  $S = const$  equation (1) can be led to the following form:

$$\partial q = a \nabla^2 q \partial \theta. \quad (2)$$

If this is the equation of thermal balance, then its left-hand side is the amount of heat that enters the medium, it must be equal to the amount of heat that is accumulated in it. The amount of accumulated heat in the medium of mass  $m$  and specific thermal capacitance  $c$  is determined by the equation:

$$\partial q_H = m c \partial T. \quad (3)$$

If (1) is the thermal balance equation, then the equality must be satisfied:

$$a \nabla^2 q \partial \theta = m c \partial T$$

from where

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{a}{mC} \nabla^2 q = \frac{a}{mC} S \nabla^2 T = \frac{aS}{mC} \nabla^2 T$$

Equation (1) describes the process of transferring heat from one conditional zone to another, but does not consider where and how this heat passes next. In order to explain this disadvantage of Fourier's equation, some authors, including prof. Weinberg [5] indicate that an adequate model can be obtained by clarifying Fourier's law, taking into account the inertia of the molecules. Then Fourier's law gains the following nonlinear form:

$$\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial T}{\partial \theta} = -a \nabla^2 T, \quad (4)$$

where  $\alpha \ll A = B^2 / a$  - some constant of heat transfer;  $A, B$  - the characteristic time and length in the considered process respectively.

The equation of thermal conductivity with the thermal energy sink will be written as follows:

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} + a \nabla^2 T = \tau_c \frac{d^2 T}{dt^2} + \frac{dT}{dt}, \quad (5)$$

where  $\tau_c$  - the time constant of the thermal energy sink.

If  $a \nabla^2 T = \tau_c \frac{d^2 T}{dt^2}$ , then we arrive at an optimal case, when heat input velocity equals its sink velocity. If  $\tau_c = \alpha$ , and  $t = \theta$ , then we arrive at equation (3). Thus we can conclude that Fourier's equation does not take into account the thermal energy sink, which leads to infinite heat transfer velocity. It must be said that the existing methods of mathematical modelling of nonlinear technological processes do not find use in modern control and management systems. The main task of mathematical modelling of transfer phenomena is development of methods for analytical solution of nonlinear differential equations, suitable for practical use. During the study of transfer phenomena, we proceeded from the fact that there is a transition zone between two bodies or phases, at the boundary of which transfer of energy, mass or momentum pulse occurs. And only in this zone the processes of rheological transformations described by the relevant laws take place.

**The aim of the article (as a scientific research)** is to show the possibility of modelling complex technological controlled objects based on the balance of velocities of input and output flows, irreversible rheological transitions in the form of the integral impulse Dirac delta function, which allows such objects to be described as quite simple equations, suitable for use in computer-integrated control and management systems.

**Main research materials presentation.** Each technological process in which the transfer of mass, energy or momentum pulse occurs in the general motion pattern consists of three sequentially connected dynamic units, as shown in Fig. 1.

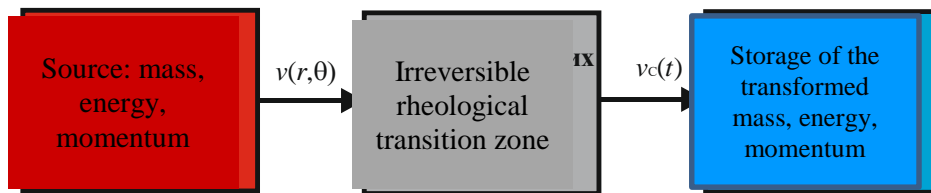


Figure 1 – Block diagram of the process of transfer of mass, energy and momentum pulse

As a source there is accepted an object that is capable of constantly creating mass or energy, which by transferring momentum is used for their transformation into other types of mass, energy, and momentum. Sources can be both natural and technical. Natural sources include those that are found in the Earth's interior and atmosphere, such as natural gas, coal, water, air, thermal energy, as well as nonterrestrial sources, such as energy of the sun and other planets. Such sources are called infinite energy sources. Technical ones include sources that generate mass and energy from natural sources due to their corresponding transformation by technical means. For example, natural gas can be converted into hydrogen and carbon monoxide through its conversion with steam or into thermal energy through combustion. Coal can be burned and one can obtain thermal energy or it can be converted into chemical components, which, in their turn, are local sources of mass and energy. From natural and technical sources, mass and energy are provided by technical means (pipelines, transmission lines, etc.) for further conversion with velocity  $v_{\Pi}(\bar{r}, \theta)$  ( $\bar{r}$  - the vector of the flow direction from the source;  $\theta$  - the time of the flow transfer) to another object, which is called the zone of irreversible rheological transformation (IRT). The IRT zone can be a steam boiler, a turbine generator, a steam engine, a shell and tube heat exchanger, an energy evaporation unit, etc. From the IRT zone, new material or thermal flows are constantly output at velocity  $v_C(t)$  where  $t$  - the time of output (sink) of the material or thermal flow from the IRT zone to another object in which they are accumulated (consumed). After consumption of sink flows, wastes are created, which are directed to solid

and gaseous atmosphere of the Earth, which are perceived as infinite. Thus in nature there is an appropriate balance of mass, energy and momentum, which is characterized by velocity  $v_{\Pi}(\bar{r}, \theta)$  of their transfer in direction  $\bar{r}$  per time  $\theta$ . The equation of the transfer velocities of a certain determining parameter  $\alpha$  from the source to the IRT zone and the determining parameter  $\beta$  of the sink from the IRT zone to the storage zone, which may be either mass or energy (thermal, radiation, electromagnetic, etc.), or momentum (mechanical, liquid, gas) uniquely defines the balance of masses and energy. Transfer velocity of parameter  $\alpha$  is:

$$v_{\Pi}(\bar{r}, \theta) = \partial x(\alpha, \theta) / \partial \theta, \quad (6)$$

where  $x(\alpha, \theta)$  - the change in the linear dimension when transferring the determining parameter  $\alpha$ .

If the determining parameter is volume loss  $F_{\Pi}$  with the cross-sectional area  $S_{\Pi}$ , then the velocity is  $v_{\Pi}(\bar{r}, \theta) = \partial F_{O\Pi} / \partial S_{\Pi}$ . If the area is  $S_{\Pi} = xy$ , where  $x, y$  - some linear directions of the flow, then its change is  $\partial S_{\Pi} = \partial x \partial y$ , or if  $\partial x = \partial y$  we have  $\partial S_{\Pi} = \partial x^2$ . Then the equation for linear velocity of the flow transfer takes the form:

$$v_{\Pi}(x, \theta) = \partial^2 F_{O\Pi} / \partial x^2. \quad (7)$$

Equating equations (1) and (2) we arrive at the following differential equation of the balance of velocities during the linear dimension transfer:

$$\frac{\partial x(F_{O\Pi}, \theta)}{\partial \theta} = K_{\Pi} \frac{\partial^2 F_{O\Pi}(\xi, \theta)}{\partial \xi^2}, \quad (8)$$

where  $K_{\Pi} [M^2 / c]$  - the effective coefficient of the linear dimension transfer;  $\xi$  - the change in distance  $x$ .

Analysing equations (1) - (3), we arrive at the following conclusions: when transferring the pulse of the flow volume loss, which moves in direction  $x(F_{\Pi}, \theta)$ , the effective transfer coefficient  $K_{\Pi} = 1$ ; equation (3) describes the process of changing the linear dimension when transferring the volume loss flow only from the source, which has some initial constant dimension  $L_0$  in direction  $x$ , for example, in the IRT zone, and does not describe the processes occurring in this zone. Under the corresponding initial conditions, equation (3) has an analytical solution in the following form [6]:

$$x(F_{O\Pi}, \theta) = L_0 \cdot \operatorname{erfc} \left( \frac{\xi}{2\sqrt{K_{\Pi}\theta}} \right). \quad (9)$$

When entering the IRT zone, mass, energy, or momentum of the transfer flows are transformed, resulting in flows with new mass, energy and momentum that outflow (sink) from this zone into the unlimited volume storage. It is known [6] that for Fourier' heat conduction law under absence of internal heat sources, the following generalized equation is true:

$$c_p \rho \frac{\partial T}{\partial \theta} = \operatorname{div} \lambda \cdot \operatorname{grad} T, \quad (10)$$

where  $c_p, \rho, \lambda$  - heat capacity, density and thermal conductivity of the medium respectively.

If the process of transferring the heat pulse is carried out in one direction, then equation (10) is given in the following form:

$$\frac{\partial T(\xi, \theta)}{\partial \theta} = a \frac{\partial^2 T(\xi, \theta)}{\partial \xi^2}, \quad (11)$$

where  $x$  - the linear direction of heat transfer;  $a = \lambda / c_p \rho$  - the thermal conductivity of the medium.

Under zero initial conditions, the solution of equation (11) will be

- when heating the environment

$$T(\xi, \theta) = T_H \operatorname{erf} \left( \xi / 2\sqrt{a\theta} \right), \quad (12)$$

- when cooling the environment

$$T(\xi, \theta) = T_H \operatorname{erfc} \left( \xi / 2\sqrt{a\theta} \right). \quad (13)$$

In order to transfer the mass pulse of the substance in accordance with Fick's law, we have:

$$\frac{\partial m(x, \theta)}{\partial \theta} = D_m \frac{\partial^2 m(\xi, \theta)}{\partial \xi^2}, \quad (14)$$

where  $m(\xi, \theta)$ - the medium mass, which is transferred in direction  $\xi$  per time  $\theta$ ;  $D_m$  - the effective mass transfer coefficient.

Under zero initial conditions, the solution of equation (14) has the form:

$$m(\xi, \theta) = m_H \operatorname{erf} \left( \xi / 2\sqrt{D_m \theta} \right), \quad (15)$$

The law of transferring the momentum pulse can be determined from Navier-Stokes equation, which has the form [12]:

$$\rho \frac{\partial v(\xi, \theta)}{\partial \theta} = \mu \frac{\partial^2 v(\xi, \theta)}{\partial \xi^2} - \frac{\partial P}{\partial \xi} - \gamma, \quad (16)$$

where  $\rho, \mu$  - density and dynamic viscosity of the medium;  $v(\xi, \theta)$  - movement velocity in direction  $\xi$  per time  $\theta$ ;  $P$  - the pressure drop in the medium;  $\gamma = \rho g$  - the force of gravity.

If the pressure force of the medium and the gravity of the Earth is negligible, then equation (16) is reduced to Newton's law:

$$\frac{\partial v(\xi, \theta)}{\partial \theta} = \nu \frac{\partial^2 v(\xi, \theta)}{\partial \xi^2}, \quad (17)$$

where  $\nu = \mu / \rho$  - kinematic viscosity of the medium.

An analytic solution of equation (16) under zero initial conditions has the form:

$$v(\xi, \theta) = v_H \operatorname{erf} \left( \xi / 2\sqrt{\nu \theta} \right). \quad (18)$$

Comparing (9) with equations (11), (14) and (16), we can see their similarity. They differ only in the determining parameter (linear size, temperature, mass and velocity) and the effective transfer coefficient of this parameter. The flow of mass, energy or momentum entering the IRT zone from the source of other flows that are characterized by their mass, energy or momentum, are transformed and output from this zone into the storage due to diffusion and convection. The basis of such processes is the balance of masses, energies and momentum. The balance of masses is described by the following equation:

$$dm_{\Pi} = dm_T + dm_C, \quad (19)$$

where  $dm_{\Pi} = F_{\Pi} dt$  - the amount of mass, which enters the IRT zone by the flow with mass loss  $F_{\Pi}$  per time  $\theta$ ;  $dm_T$  - the amount of mass, which is transformed in the IRT zone due to chemical reaction, concentration, dissolution, etc.;  $dm_C = F_C dt$ .

The amount of mass that is transformed in the IRT zone depends on other parameters and can be determined by the formulas:

- for gaseous media: by change in gas volume:  $dm_{\Pi} = \frac{P_{\Gamma}}{RT} dV$ ; by change in gas pressure:  $dm_{\Pi} = \frac{V}{RT} dP_{\Gamma}$ ; by

change in gas temperature:  $dm_{\Pi} = \frac{VP_{\Gamma}}{RT^2} dT$ ; by time of the chemical reaction:  $dm_{\Pi} = Vv_p(Q_H - Q)dt$ , where  $P_{\Gamma}, T, V$  - pressure, temperature and volume of the gaseous medium respectively;  $R$  - the universal gas constant;  $v_p$  - the chemical reaction velocity;  $Q_H$  - the reaction component concentration of the input flow with loss  $F_{\Pi}$ ;

- for liquid media: by the liquid level in the IRT zone:  $dm_{\Pi} = \rho S_{\Pi} dL$ ; by hydrostatic pressure of the liquid:

$dm_{\Pi} = \frac{S_{\Pi}}{g} dP_{\Gamma\partial}$ ; by the cross-section of the liquid sink:  $dm_{\Pi} = \frac{P_{\Gamma\partial}}{g} dS_{\Pi}$ ; by time of the chemical reaction  $dm_{\Pi} = Vv_p(Q_H - Q)dt$ : where  $\rho$  - the liquid density;  $S$  - the area of transformation of the mass, which enters the IRT zone;  $L, P_{\Gamma\partial}$  - the level and hydrostatic pressure of the liquid;  $g$  - acceleration of the Earth gravity.

The amount of the mass that is output from the IRT zone can be determined by the following formulas:

- for liquid media:  $dm_C = \alpha S_C \sqrt{2gL} dt$ , where  $\alpha, S_C$  - the loss coefficient and the cross section of the output flow (sink);

- for gaseous media:  $dm_C = \frac{\alpha S_C g}{\sqrt{gRT}} c_p P$ , where  $c_p$  - the specific heat capacity of gas;  $P$  - the pressure.

If the process of the rheological transformation is accompanied by a chemical reaction, then the amount of the newly formed mass in the IRT zone is

$$dm_p = V(Q_{\delta} - Q)[1 - \exp(-E/RT)]dt, \quad (20)$$

where  $V$  - the volume of the IRT zone;  $Q_{\delta}$ ,  $Q$  - the concentration of the reacting component, which flows into the IRT zone from the source;  $E$  - the activation energy for the chemical reaction;  $R$  - the universal gas constant;  $T$  - the reaction temperature.

In general, mathematical models for the IRT zone can be determined from the following equations:

- balance of masses:

$$\sum dm_H = dm_3 + \sum dm_C; \quad (21)$$

- balance of temperature (energy):

$$\sum dT_H = dT_3 + \sum dT_C; \quad (22)$$

- balance of momentum:

$$\sum dv_H = dv_3 + \sum dv_C; \quad (23)$$

where  $\sum dm_H$ ,  $\sum dT_H$  and  $\sum dv_H$  - the sum of masses, temperatures and momentum entering the IRT zone from sources respectively;  $m_3$ ,  $dT_3$  i  $dv_3$  - mass, temperature and momentum in the IRT zone;  $\sum dm_C$ ,  $\sum dT_C$  and  $\sum dv_C$  - the sum of masses, temperatures and momentum that output (sink) from the IRT zone.

As a result, the mathematical models for the IRT zone in the form of nonlinear differential equations are obtained in the following form:

$$\tau_n^n \frac{d^n \beta}{dt^n} + \dots + \tau_1 \frac{d\beta}{dt} + \beta = \alpha(x, \theta), \quad (24)$$

where  $\tau_n, \tau_1$  - the time constants of the output flows transfer;  $\beta$  - the determining parameter of the rheological transformation created in the IRT zone;  $\alpha(x, \theta)$  - the determining parameter of the input flows.

If the source has infinite energy, then  $\alpha(x, \theta) = const$ . Then movement velocity of the determining parameter  $\beta(t)$  of the output flow is:

$$\tau_n^n \frac{d^{n+1} \beta}{dt^{n+1}} + \dots + \tau_1 \frac{d^2 \beta}{dt^2} + \frac{d\beta}{dt} = 0. \quad (25)$$

From the laws of the transfer phenomena, it is evident that in presence of the convection component of the flow we have:

$$\frac{\partial \alpha(x, \theta)}{\partial \theta} + D_{\alpha} \frac{\partial^2 \alpha(x, \theta)}{\partial x^2} + v_k \frac{\partial \alpha(x, \theta)}{\partial x} = 0. \quad (26)$$

where  $D_{\alpha}$  - the effective coefficient of transfer of the determining input flow;  $v_k$  - the convection component of the input flow velocity.

Since the right-hand sides of equations (25) and (26) are zero, they are identical. Given the identity of the processes of the transfer phenomena at certain transition boundaries at zero boundary conditions, we obtain the following nonlinear differential equation in the following form:

$$\frac{\partial \alpha(x, \theta)}{\partial \theta} + D_{\alpha} \frac{\partial^2 \alpha(x, \theta)}{\partial x^2} + v_k \frac{\partial \alpha(x, \theta)}{\partial x} = \tau_n^n \frac{d^{n+1} \beta(t)}{dt^{n+1}} + \dots + \tau_1 \frac{d^2 \beta(t)}{dt^2} + \frac{d\beta(t)}{dt} \quad (27)$$

Since the left-hand side of equation (27) describes velocity of the input flow  $v(\bar{r}, \theta)$  at  $\bar{r} = x$ , and the right-hand side is velocity of the output flow  $v_C(t)$ , it is an equation of the balance of velocities. Since both the input and output flows have cross sections respectively  $S_{\Pi}$  and  $S_C$ , and volume losses are  $F_{O\Pi} = v(x, \theta)S_{\Pi}$  and  $F_{OC} = v(t)S_C$ , then for implementation of equality (27) it is required that the volume loss of the output flow will be  $F_{OC} = F_{O\Pi}S_C/S_{\Pi}$ . Accordingly, for mass loss we have:  $F_{M\Pi} = \rho_{\Pi}F_{O\Pi} = \rho_{\Pi}v(x, \theta)/S_{\Pi}$  and  $F_{MC} = \rho_C F_{OC} = \rho_C v(t)/S_C$ . The latter equations evidently show that in order to ensure the balance of flow velocities, it is necessary that velocity of the input flow will be

$$v(x, \theta) = v(t) \left( \frac{\rho_C}{\rho_{\Pi}} \right) \left( \frac{S_{\Pi}}{S_C} \right), \quad (28)$$

where  $\rho_{\Pi}, \rho_C$  - density of the input and output flows, respectively.

Thus, equation (27) is a mathematical model of the rheological transfer of mass, energy, and momentum in the differential form. This equation is multiparameter with the following basic variables:  $\alpha(x, \theta)$  and  $\beta(t)$  - the input and output determining parameters respectively; and  $\theta$  and  $t$  - the transfer time of the determining parameter  $\alpha(x, \theta)$  to the IRT zone and the time of sink of the created parameter  $\beta(t)$ ;  $x$  - the direction of the input flow transfer;  $v_k$  - linear velocity of the convection component of the determining parameter of the input flow;  $\tau_n$  - the constants of the time transfer of the determining parameter of the output flow. As shown in [9], such nonlinear equations do not have an analytical solution, and the approximate methods are not sufficiently precise, which complicates their research, and, in particular, they are practically impossible to use in modern control and management systems. Therefore, the main further objective is development and research of simple methods for solution of nonlinear differential equations of the flow velocities balance of the determining parameters of transfer phenomena.

**The description of the process of transfer of the mass, energy and momentum pulse by the integral impulse Dirac delta function.** When transferring the pulse of energy, mass, or momentum, there must be at least two media: a source with the determining parameter  $\alpha$  and a storage with the determining parameter  $\beta$ , as shown in (Fig. 2).

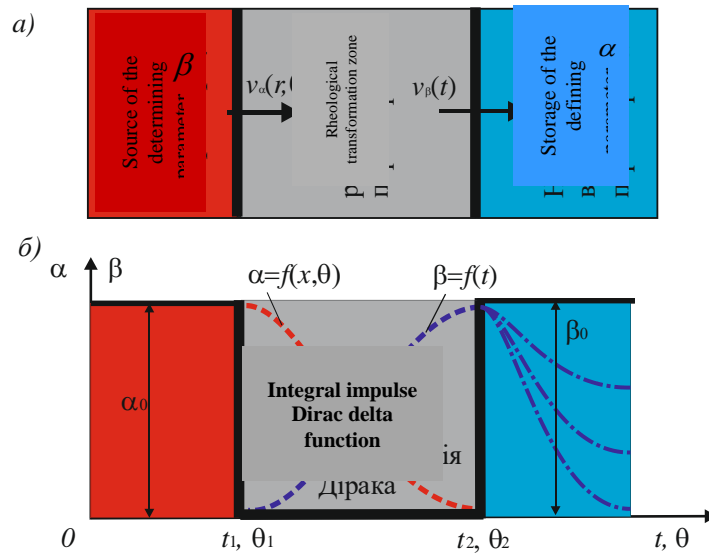


Figure 2 – Physical model and graphs of the IRT for the input and output determining parameters

Let the source be characterized by the initial determining parameter, and at the input of the IRT zone there is an alternating determining parameter  $\alpha_1$ , which can vary from 0 to  $\alpha_0$ . At the source-IRT zone boundary, the potential of the determining parameter is  $\varphi_\alpha(\bar{r}, \theta) = \alpha_0 - \alpha_1(\bar{r}, \theta)$ . In the IRT zone, the potential  $\varphi_\alpha(\bar{r}, \theta)$  varies from the maximum value  $\varphi_\alpha(\bar{r}, \theta) = \varphi_{\alpha_{\max}}$  to the minimum one  $\varphi_\alpha(\bar{r}, \theta) = \varphi_{\alpha_{\min}}$ . In the IRT zone, the determining parameter of the source  $\alpha(\bar{r}, \theta)$  is transformed into another determining parameter  $\beta(\bar{r}, \theta) = \beta(t)$ , where  $t$  - the time of the rheological transformation. It is taken into account that this transformation takes place simultaneously in all directions of the parameter  $\alpha(\bar{r}, \theta)$  movement. Therefore, in the general case, the transfer time is  $\theta \neq t$ . At the output of the IRT zone, a maximum amount of the determining parameter  $\beta(t) = \beta_{\max}$  is generated that flows from this zone and passes to the storage. If the storage is infinite, then its potential is  $\varphi_\beta = \beta_{\max}$ . When the storage volume is limited, the parameter  $\beta(t)$  capacity will vary from 0 to  $\beta_{\max}$ .

The potential of transfer of the input flow is a vector value  $\varphi(\bar{r}, \theta)$ , where  $\bar{r}$  - the movement direction vector;  $\theta$  - the transfer time. In fig. 2, a the physical model of transfer of the determining parameter  $\alpha$  from its source to the rheological transformation zone with velocity  $v_\alpha(x, \theta)$  is shown. At the boundary of the IRT zone-storage division, the parameter  $\beta$  becomes of the maximum value and is output at velocity  $v_\beta(t)$  into the storage. Under such conditions, the process of rheological transformation in the IRT zone proceeds during a period of time  $\Delta t_\beta = \Delta \theta_\alpha = \Delta \xi = t_2 - t_1 = \theta_2 - \theta_1 = \text{const}$ . Thus, the process taking place at the time interval  $\Delta \xi$  is the integral impulse Dirac delta-function of the core that describes the rheological transformation in the following form [10]:

$$\int_{t_1+0}^{t_2} f(\xi) \delta(\xi - \xi_0) d\xi = \begin{cases} 0 & \xi_0 > t_1, \xi_0 \leq t_2 \\ f(\xi_0 + 0) & t_1 < \xi_0 < t_2 \end{cases}, \quad (29)$$

where  $\delta(\xi - \xi_0)$  - the core of the linear integral transformation;  $\xi, \xi_0$  - the current and maximum time of the parameter  $\alpha$  decrease and parameter  $\beta$  increase in the IRT zone.

The core of the linear integral transformation describes the process that occurs in the IRT zone when the parameter  $\alpha$  is transformed during the current time  $\xi$ . Since the transfer of the parameter  $\alpha$  from the source to the IRT zone is described by the known laws of the transfer phenomena, and the process of output (sink) of the parameter  $\beta$  from this zone by integral laws, then in the general form, taking into account the condition of the balance of mass, energy and momentum for the transformation zone, the core of the linear integral transformation will be described by the following equation:

$$\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \theta} + \text{div}(\varphi_\alpha \cdot \bar{v}_\alpha) = -\text{div}(D_\alpha \nabla \varphi_\alpha) + \gamma_\beta(t). \quad (30)$$

where  $\varphi_\alpha = \alpha_0 - \alpha$  - potential of the determining parameter of the input flow;  $\alpha_0, \alpha$  - the maximum and current value of the determining parameter of the input flow;  $\bar{v}_\alpha$  - average velocity of the parameter  $\alpha$ ;  $D_\alpha$  - the effective coefficient of the parameter  $\alpha$  transfer;  $\nabla \varphi_\alpha$  - Laplacian;  $\gamma_\beta(t)$  - velocity of the determining parameter  $\beta$  output from the IRT zone per time  $t$ .

The second component of equation (30) describes the convection component of the flow velocity of potential  $\varphi_\alpha$ . Taking into account that the coefficient  $D_\alpha$  slightly depends on the transfer process, and the transfer is carried out in the direction  $x$ , we arrive at the following differential equation:

$$\frac{\partial \varphi_\alpha(x, \theta)}{\partial \theta} + D_\alpha \frac{\partial^2 \varphi_\alpha(x, \theta)}{\partial x^2} + \bar{v}_\alpha \frac{\partial \varphi_\alpha(x, \theta)}{\partial x} = \frac{d}{dt} \left[ \sum_0^n \tau_n^n \frac{d^n \varphi_\beta(t)}{dt^n} \right], \quad (31)$$

where  $\varphi_\alpha(x, \theta) = \alpha_0 - \alpha(x, \theta)$  - the parameter  $\alpha$  potential;  $\alpha_0, \alpha(x, \theta)$  - the maximum and current value of the parameter  $\alpha$  in the transfer direction  $x$  per time  $\theta$ ;  $\gamma_\beta(t) = \frac{d}{dt} \left[ \sum_0^n \tau_n^n \frac{d^n \varphi_\beta(t)}{dt^n} \right]$  - the velocity of output (sink) of the created parameter  $\beta$  from the IRT zone per time  $t$ ;  $\tau_n^n$  - the time constants of the process of creating the potential of the parameter  $\beta$  in the IRT zone;  $n$  - a number of stages of transformation of the parameter  $\alpha$  potential in the parameter  $\beta$  potential;  $\varphi_\beta(t) = \beta_0 - \beta(t)$  - the potential of the parameter  $\beta$  of the output flow;  $\beta_0, \beta(t)$  - the maximum and current parameter  $\beta$  value.

Equation (31) is the mathematical model of the object of control and management, which is described by the nonlinear differential equation.

**Conclusions.** For the first time, the problem of transfer phenomena is considered on the basis of the theory of rheological transformations, which is based on the principle of balance of velocities, meaning that the process of transfer of the determining parameter (mass, heat, energy, and momentum) is divided into three dynamic links: the link of transfer of the determining parameter from the source to the zone of irreversible rheological transformation (IRT), the link of the dynamic transformation of this parameter and the link of accumulation (sink) of the new determining parameter. The velocity of transfer of the determining parameter in the first link is described by the known laws of the transfer phenomena (Fourier's, Fick's and Newton's), in the second link – by physical and chemical laws (for example, Navier-Stokes, Arrhenius and others), and in the third – by integral. It is shown that the velocity of transformation of the determining parameter in the IRT zone can be described by the integral impulse Dirac delta function with the core in the form of the nonlinear differential transfer of the determining parameter. The next task of modelling of technological objects of control and management is development and substantiation of the initial and boundary conditions, as well as methods of solving nonlinear differential equations of transfer of the determining parameter in the IRT zone, using the zero gradient method, which will be considered in the next paper.

## References

1. Romankov P.G. Processes and Apparatus of the Chemical Industry. Text / P. G. Romankov, M. I. Kurochkina, J. A. Mozzherin, N. N. Smirnov. - L.: Khimiia, 1989. - 560 p.
2. Bird R. Transport Phenomena. Text / R. Bird, V. Stewart, E. Lightfoot. - Moscow: Khimiia, 1974. - 688 p.
3. McAdams W. H. Heat Transmission. Tr. from English. - M.: Metallurgizdat, 1961. - 669 p.
4. Taganov I. N. Modelling the Processes of Mass and Energy Transfer. Text / I. N. Taganov. - L.: Khimiia, 1979. - 203 p.
5. Weinberg A.M., Mathematical Modelling of Transport Processes. Solution of Nonlinear Boundary Value Problems. Text / A. M. Weinberg. - Moscow-Jerusalem, 2009. - 210 p.
6. Lykov A.V. Theory of Thermal Conductivity. Text / A. V. Lykov. - M.: Vyshcha Shkola., 1967. - 599 p.

7. Lykov A.V. Theory of Heat and Mass Transfer. Text / A. V. Lykov, A. A. Mikhailov. - Moscow: Gosenergoizdat, 1963. - 389p.
8. Stentsel Y. I. Mathematical Modelling of Technological Controlled Objects. Guide. Text / Y. I. Stenzel. - K.: ISDO, 1993. - 328 c. ISBN 5-7763-1679-0.
9. Stentsel Y.I. Mathematical Modelling of the Chemical Processes Based on the Theory of Rheological Transitions. Text / Y. I. Stentsel // Visnyk of V. Dahl EUNU. - Luhansk, No. 5 (111), Part 2.-2007. - p. 91-97.
10. Y. Stentsel, O. Porkuian, K. Litvinov, O. Shapovalov / 2016. "Research on heat energy transfer processes based on rheological transitions theory and zero gradient method", TEKA Commission of Motorization and Energetics in Agriculture. - An International quarterly journal on Motorization, Vehicle Operation, Energy Efficiency and Mechanical Engineering, Lublin-Rzeszow, Vol. 16, No. 3, 21-29.

The article analyses methods of mathematical modelling of nonlinear processes of energy and mass pulse transfer in the technological controlled objects. It is noted that the well-known laws of transfer phenomena describe the processes from the infinite energy source to the medium. Disadvantages of mathematical modelling of nonlinear processes and complexity of solution of nonlinear mathematical models are shown. A modelling method for such processes is proposed based on the theory of rheological transitions and the integral impulse Dirac delta function. It is shown that technological processes are divided into sources, zones of rheological transformations and storage of the newly created mass, energy and momentum.

**Keywords:** model, transition, mass, energy, Dirac function, gradient.