МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ
СХІДНОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені ВОЛОДИМИРА ДАЛЯ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичних занять з дисципліни
«ДЕТАЛІ МАШИН»
для здобувачів першого рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання за спеціальностями
131 «Прикладна механіка» та 133 «Галузеве машинобудування»
(Електронне видання)

З А Т В Е Р Д Ж Е Н О
на засіданні кафедри
машинобудування та
прикладної механіки
Протокол № 6 від 10.01.2024 р.

Київ 2024

УДК 519.254

Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни «Деталі машин» для здобувачів першого рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання за спеціальностями 131 «Прикладна механіка» та 133 «Галузеве машинобудування» (Електронне видання) / Укл.: О.В. Шевченко – Київ: Вид-во Східноукраїнського національного університету імені Володимира Даля, 2024. – 78 с.

Наведено матеріали, що необхідні для виконання практичних занять з дисципліни «Деталі машин» за темами: «Нормальний закон розподілу випадкової величини», «Правило трьох сігм та точність середнього арифметичного», «Основні способи будування експериментальних графіків та знаходження за ними емпіричних формул», «Лінійна інтерполяція та інтерполяційна формула Лагранжа», «Екстраполювання», «Метод найменших квадратів» та «Основи регресійного аналізу. Повний факторний експеримент». Також представлено критерії оцінювання роботи здобувача вищої освіти на практичному занятті, перелік рекомендованою літератури та додатки.

Методичні вказівки призначені для здобувачів першого рівня вищої освіти, що навчаються за спеціальностями 131 «Прикладна механіка» та 133 «Галузеве машинобудування».

Укладачі: О.В Шевченко, к.т.н., доцент.

Рецензент: О.В. Романченко, к.т.н., доцент

ЗМІСТ

ВСТУП

У методичних вказівках наведено сім практичних занять по дисципліні «Деталі машин». Зміст кожного практичного заняття побудовано по блочному принципу. Спочатку вказано номер і тему заняття, мету і задачі заняття та постановку заняття. Далі наведено коротко теоретичні відомості, вирішення типового завдання, завдання на самостійну роботу та контрольні питання. Методичні вказівки мають загальні критерії оцінки роботи здобувача вищої освіти на практичному занятті, а також список використаних джерел. У разі потреби можна звернутися до додатку.

Виконання першого модулю практичних занять згідно наведених методичних вказівок спрямоване на формування у здобувачів вищої освіти практичних навичок щодо математичної обробки результатів технічних вимірювань та оцінювання точності вимірювань.

1. ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 1

Тема заняття: НОРМАЛЬНИЙ ЗАКОН РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ.

Мета і задачі заняття.

Ознайомитися з сутністю нормального закону розподілу випадкової величини. Одержати теоретичні знання та практичні навички застосування закону нормального розподілу випадкової величини в експериментальній практиці.

Постановка заняття.

Відповідно до наданого завдання побудувати гістограми нормального закону розподілу випадкової величини та провести аналіз одержаних результатів.

Основні теоретичні відомості.

Результати дослідного вимірювання величин ніколи не бувають точними і мають деякі похибки. Причиною похибки можуть бути, наприклад, несправність прибору, зовнішні умови досліду і таке інше. Похибки, які виникають за такою причиною, називають систематичними і можуть бути ураховані або навіть в деякій мірі усунуті.

Також при проведені дослідження на об’єкт впливають неконтрольовані експериментатором фактори і в результаті дії цих факторів завжди одержують випадкові величини. Для обробки результатів експерименту широко використовують апарат теорії імовірностей та математичної статистики, де основним параметром є випадкова величина.

Випадковою величиною називають таку величину, яка випадково приймає із множини можливих значень досліду кількісний результат, величину якого не можна точно передбачити.

За множиною можливих значень розрізняють **безперервні** та **дискретні** випадкові величини.

Випадкова величина називається **безперервною**, якщо вона може приймати всі значення, що належать до деякого числового інтервалу. Наприклад, температура навколишньої середи або помилка вимірювання це безперервна випадкова величина, тому що вона може приймати будь-яке значення із певного інтервалу. Якщо випадкова величина може приймати лише деякі визначні величини із інтервалу, то її називають **дискретною**. Дискретна величина характеризується тим, що вона скінченна і її значення можна занумеровати. Наприклад, кількість бракованих виробів в даній партії це дискретна випадкова величина, так як ця випадкова величина є скінченна та її значення можна занумерувати.

Властивість випадкової величини описується законом її розподілу, під яким розуміють зв'язок між можливими значеннями випадкової величини та відповідними їм імовірностями.

Розподіл випадкової величини це функція, яка однозначно визначає імовірність того, випадкова величина приймає задане значення та належить деякому заданому інтервалу.

При обробці експериментальних даних можна припускати, що вони підпорядковуються **закону нормального (Гауссового) розподілу**, який описується **функцією розподілу**:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-M_x)^2}{2\sigma_x^2}} dx, \qquad (1.1)$$

а її перша похідна є **щільністю розподілу** випадкової величини:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{(x-M_x)^2}{2\sigma_x^2}}, \qquad (1.2)$$

де M_x, σ_x – параметри розподілу випадкової величини: M_x – математичне сподівання, характеризує центр розсіювання; σ_x^2– дисперсія, характеризує ступінь розсіювання.

Функція розподілу F(x) та відповідна їй щільність розподілу f(x) є деяка математична модель властивостей випадкової величини, значення якої реєструється в ході експерименту. Тому одна із задач статистичної обробки даних є находження цих функцій, які би достатньо добре описували спостережувані значення випадкової величини та були би зручні для статистичного аналізу.

Щільність розподілу f(x) та функція розподілу F(x) випадкової величини при нормальному законі розподілу випадкової величини графічно мають вигляд, що відповідно представлено на рис. 1.1.

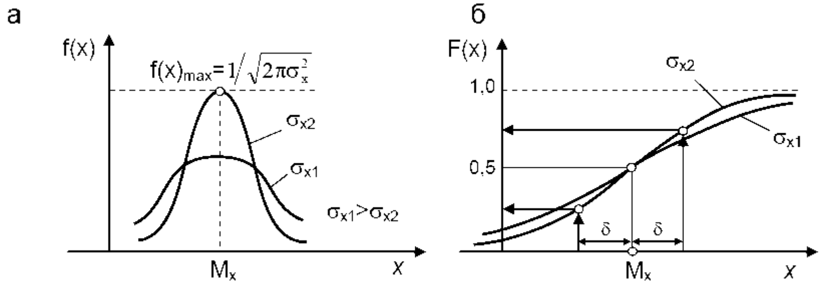

Рис. 1.1. Щільність розподілу а) та функція розподілу б) при нормальному законі розподілу випадкової величини

Як правило закону нормального розподілу випадкової величини підпорядковуються випробування сталі на міцність, продуктивність металургійних агрегатів, склади палива, сировини, сплавів, випадкові похибки вимірювання та інше.

Для перевірки узгодженості результатів експерименту закону нормального розподілу (закону Гаусса) можна застосувати простий **графічний метод**. Його сутність полягає у зіставленні емпіричної функції розподілу з функцією передбачуваного теоретичного закону.

Якщо побудовані експериментальні точки лежать поблизу теоретичного графіка, то можна рахувати, що одержані в дослідах дані ні суперечать теоретичному закону розподілу. Графічний метод є суб'єктивним і застосовується на практиці як перше наближення при рішенні подібних задач.

Обробка експериментальних даних проводиться в наступній послідовності:

1. Знаходять найбільше (x_{max}) та найменше (x_{min}) вибіркове значення випадкової величини і розраховують її розмах $R= x_{max} – x_{min}$.
2. Розмах випадкової величини розбивають на k рівних інтервалів. Кількість інтервалів k вибирають в залежності від об'єму вибірки n. Наприклад, якщо n>100 його значення рекомендують приймати рівним $k=9\div15$ ($n<100$ $k=7$). Число інтервалів можна визначить і по формулі Штюргесса $k= 1+3{,}321\cdot\lg(n)$ з округленням одержаного результату до найближчої цілої величини.
3. Визначають ширину інтервалу $h=R/k$, для спрощення розрахунків одержані значення округлюють в любу сторону, трохи збільшуючи або зменшуючи при цьому розмах варіювання.
4. Установлюють границі інтервалів и підраховують число попадань випадкової величини в кожній з вибраних інтервалів m_i, $1\le i\le k$.

5. Визначають частоту попадань для кожного інтервалу як $P_i=m_i/n$. Результати розрахунків зводять в таблицю 1.1.

Таблиця 1.1

Побудова розподілу експериментальних даних

Інтервал	Число замірів в кожному інтервалі m_i	Частота попадань в інтервалі $P_i=m_i/n$
$x_1 \div x_2$	m_1	m_1/n
$x_2 \div x_3$	m_2	m_1/n
…	…	…
$x_i \div x_{i+1}$	m_i	m_i/n
…	…	…
$x_k \div x_{k+1}$	m_k	m_k/n
Перевірка	$\sum_{i=1}^{k} m_i = n$	$\sum_{i=1}^{k} P_i = 1$

Графічною формою представлення безперервної випадкової величини є гістограми, що представлені на рис. 1.2.

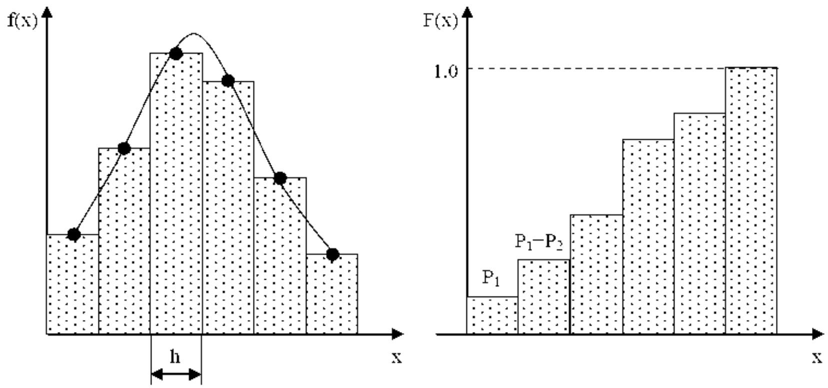

Рис. 1.2. До побудування гістограми випадкової величини: f(x) – щільність розподілу, F(x) – функція розподілу

Послідовність будування гістограми наступна:

1. Визначається величина ординати $f_i=P_i/h$, де P_i – імовірність появи випадкової величини в i-тому інтервалі.
2. В системі координат $f_i=f(x)$ на ширині інтервалу h відкладають величини f_i як висоти і будують прямокутники. Вочевидь, що площа елементарного прямокутника

$$S_i=h\cdot f_i=h\cdot(P_i/h)=P_i=m/n \tag{1.3}$$

рівна відношенню числа дослідів m_i, при яких випадкова величина виявилася усередині цього інтервалу, к загальному числу дослідів n. Площа всієї гістограми $S=\sum_{i=1}^{k} S_i=\sum_{i=1}^{k} P_i=1$. Відповідно, площа, що обмежена гістограмою, рівна одиниці.
3. Будування гістограми інтегральної функції розподілу здійснюється сумовуванням імовірностей: $F(x)=\sum_{i=1}^{k} P_i$.

В подальшому здійснюється зіставлення експериментально одержаного розподілу випадкової величини з теоретичним. Для цього використовують різні критерії: Пирсона, Колмогорова-Смирнова та інші.

Вирішення типового завдання.

Завдання 1.

За допомогою електронного приладу проведено вимірювання тиску в промислову апараті. Всього проведено 65 вимірювань. Результати зведені в таблицю 1.2. Оцінити спроможність чинного приладу проводити вимірювання тиску.

Таблиця 1.2.

Тиск (ат) в промисловому апараті

№ з/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Р, ат	59	48	53	47	57	64	62	65	57	57
№ з/п	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Р, ат	81	83	62	48	65	76	53	61	60	37
№ з/п	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Р, ат	51	63	81	60	77	51	71	57	82	66
№ з/п	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Р, ат	54	47	61	50	57	58	52	57	76	40
№ з/п	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
Р, ат	53	66	71	61	61	55	50	70	59	50

Продовження таблиці 1.2

№ з/п	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
Р, ат	59	73	83	69	67	66	47	56	60	54
№ з/п	61	62	63	64	65					
Р, ат	47	81	76	69	43					

Розв'язання.

1. Знаходять найбільше x_{max} = 83 та найменше x_{min} = 37 вибіркове значення випадкової величини і розраховують її розмах R= x_{max} – x_{min}. =83 – 37 = 46
2. Розмах випадкової величини розбивають на k=10 рівних інтервалів.
3. Визначають ширину інтервалу h=R/k =46/10=4,6. Для спрощення розрахунків одержані значення округлюють до h=5.
4. Установлюють границі інтервалів и підраховують число попадань випадкової величини в кожній з вибраних інтервалів m_i, $1 \le i \le k$.
5. Визначають частоту попадань для кожного інтервалу як $P_i = m_i/n$. Результати розрахунків зводять в таблицю 1.3.

Таблиця 1.3

Побудова розподілу експериментальних даних

Інтервал	Число замірів в кожному інтервалі m_i	Частота попадань в інтервалі $P_i = m_i/n$
35÷39	1	0,0154
40÷44	2	0,0308
45÷49	6	0,0923
50÷54	11	0,1692
55÷59	12	0,1846
60÷64	11	0,1692
65÷69	8	0,1231
70÷74	4	0,0615
75÷79	4	0,0615
80÷85	6	0,0923
Перевірка	$\sum_{i=1}^{k} m_i = 65$	$\sum_{i=1}^{k} P_i = 1$

6. Будують гістограми щільності розподілу f(x) та функції розподілу F(x) випадкової величини. Гістограми відповідно представлені на рис. 1.3 та рис. 1.4.

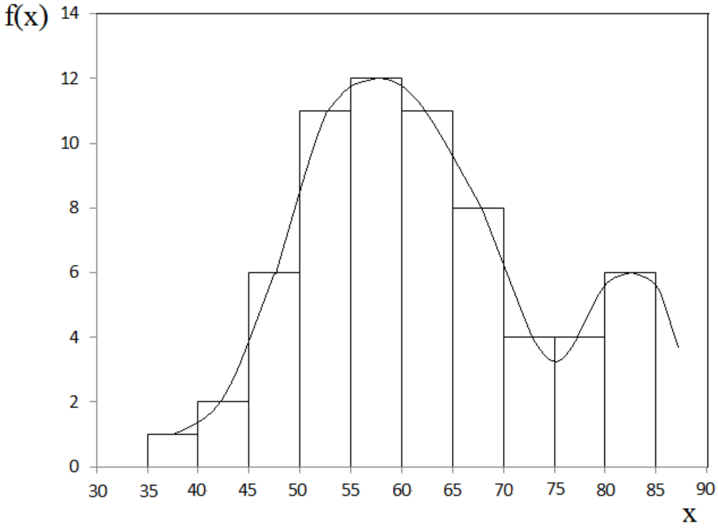

Рис. 1.3. Гістограма щільності розподілу f(x)

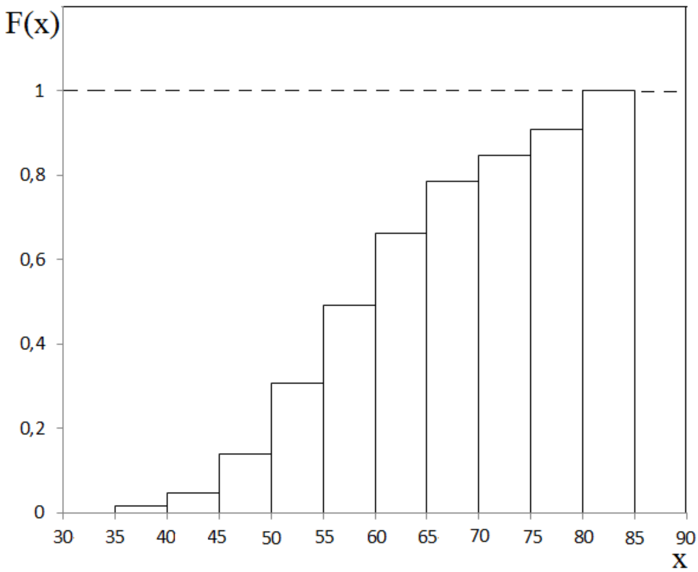

Рис. 1.4. Гістограма функції розподілу F(x)

Висновки. Аналіз побудованих гістограм на рис. 1.3 та рис. 1.4 показує, що вибірка випадкових значень вимірювання тиску електронним приладом в цілому підкоряється закону нормального розподілу випадкової величини (нормальному закону Гаусса). Так в інтервалі 35÷75 випадкові значення задовільно описують криву нормального розподілу, але в інтервалі 75÷85 має місце істотне порушення закону нормального розподілу. Імовірною причиною може бути не достатня точність вимірювального приладу. Тому при вимірюванні значень в інтервалі 75÷85 можна рекомендувати замінити чинний прилад на прилад з вищім класом точності.

Завдання на самостійну роботу.

<u>Завдання 2.</u>

При виплавці переробного чавуну в доменній печі провели хімічні аналізи на вміст кремнію в чавуні. Всього відібрано 50 проб чавуну. Результати аналізів зведені в таблицю 1.4. Необхідно оцінити, підкоряється лі вміст кремнію в чавуні нормальному закону.

Таблиця 1.4.

Вміст кремнію в чавуні

Номер проби	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Вміст Si, %	0,32	0,35	0,45	0,43	0,41	0,51	0,52	0,53	0,57	0,58
Номер проби	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Вміст Si, %	0,59	0,56	0,56	0,58	0,54	0,57	0,61	0,62	0,63	0,64
Номер проби	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Вміст Si, %	0,65	0,66	0,67	0,68	0,69	0,61	0,65	0,62	0,63	0,67
Номер проби	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Вміст Si, %	0,65	0,62	0,68	0,71	0,72	0,78	0,75	0,72	0,79	0,72
Номер проби	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
Вміст Si, %	0,73	0,72	0,79	0,73	0,81	0,82	0,87	0,90	0,95	0,93

Завдання 3.

За результатами обстеження теплообмінника у виробництві аміаку одержані температури охолоджувальної води на виході з теплообмінника. Всього проведено 20 замірів. Температури охолоджувальної води зведені в таблицю 1.5. Необхідно оцінити, підкоряється лі температура охолоджувальної води на виході з теплообмінника нормальному закону.

Таблиця 1.5.

Температури охолоджувальної води на виході з теплообмінника

Номер заміру	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t, ^{o}C	35,9	35,3	42,7	45,2	25,9	35,5	33,4	27,0	35,9	38,8
Номер заміру	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
t, ^{o}C	33,7	38,6	40,9	35,5	44,1	37,4	34,2	30,8	38,4	3133

Контрольні питання.

1. Що таке випадкова величина?
2. В чому полягає відмінність дискретної випадкової величини від безперервної? Наведіть приклади.
3. Який мають вигляд формули та гістограми функції розподілу F(x) та відповідна їй щільність розподілу f(x) випадкової величини?
4. Чому закон нормального розподілу випадкової величини найбільш сприятливий в експериментальній практиці?
5. Як пов’язані між собою функція розподілу та щільність розподілу випадкової величини?
6. З якою метою використовують закон нормального розподілу при обробці даних експериментальних досліджень?
7. Як перевірки узгодженість результатів експерименту закону нормального розподілу (закону Гаусса) графічним методом?
8. Наведіть послідовність побудування гістограми експериментальних даних відповідно до закону нормального розподілу?

2. ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 2

Тема заняття: ПРАВИЛО ТРЬОХ СІГМ ТА ТОЧНІСТЬ СЕРЕДНЬОГО АРИФМЕТИЧНОГО.

Мета і задачі заняття.

Ознайомитися з сутністю та практичним застосуванням правила трьох сігм. Одержати теоретичні знання та практичні навички обробки даних одержаних в експериментальній практиці.

Постановка заняття.

Провести обробку та аналіз одержаних експериментальних даних.

Основні теоретичні відомості.

Попередня обробка результатів вимірювань та спостережень необхідна для того, щоб в подальшому, при будуванні емпіричних залежностей, з найбільшою ефективністю використовувати статистичні методи і коректно аналізувати одержані результати.

Часто навіть старанно ставленні експерименти можуть давати неоднорідні дані, та як в процесі експерименту можуть змінюватися умови проведення досліду. Дані, які відповідають змінним умовам, називають **грубими похибками (помилками)**. Грубі похибки з'являються також при неправильному запису показаній приладу.

Зміст попередньої обробки складається з відсіювання грубих похибок та оцінки вірогідності результатів вимірювання. Другим важливим моментом попередньої обробки даних є також перевірка відповідності результатів вимірювання нормальному розподілу (див. практичне заняття №1).

При обробці статистичних матеріалів, зокрема результатів експериментальних спостережень, велике значення мають середні величини.

У загальному випадку середнє арифметичне значень випадкових величин x_1, x_2,…, x_n, які мають ваги або частоти k_1, k_2,…, k_n, визначається рівністю:

$$\bar{x} = \frac{k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_nx_n}{k_1+k_2+\cdots+k_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} k_ix_i}{\sum_{i=1}^{n} k_i}, \quad (1.1)$$

і називається **середня арифметична зважена**, де n=1, 2, 3 … – кількість випробувань або об'єм вибірки. Якщо вага або частота кожного значення x_i однакові, то $\overleftarrow{x}$ являється **простою середньою арифметичною** або **середньою арифметичною:**

$$\overline{x} = \frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\,. \tag{1.2}$$

При проведені практичних статистичних розрахунків одним з простіших та надійних критеріїв оцінки вибірки, випадкові величини якої підкоряються нормальному закону розподілу, на предмет вмісту серед значень вибірки грубої похибки є правило трьох сігм. Сутність **правила трьох сігм**: якщо випадкова величина розподілена нормально, то абсолютна величина її відхилення від математичного сподівання M(x) не перевищує потроєної середньої арифметичної похибки вимірювання σ, тобто знаходиться в інтервалі (–3σ; +3σ).

Математичне сподівання M(x), що характеризує центр розсіювання, визначається за рівнянням:

$$M(x) = \sum p_i x_i\,, \tag{1.3}$$

де p_i – імовірність появи результату x_i.

Середню квадратичну похибку вимірювання σ розраховують за рівнянням:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(\overline{x}-x_i)^2}{n-1}}\,. \tag{1.4}$$

Правило трьох сігм можна пояснити за допомогою рис. 2.1, з якого видно, що імовірність того, що відхилення значення нормально розподіленої випадкової величини від її математичного сподівання не перевищує потроєної середньої арифметичної похибки вимірювання σ з вірогідністю P=0,9973. Інакше кажучи, з імовірністю 0,9973 значення нормально розподіленою випадкової величини x_i знаходиться в інтервалі (M(x)–3σ; M(x)+3σ) Також вірне і обернене ствердження, якщо розподіл випадкової величини невідомий, але вимога, яка указана в даному правилі виконується, то є підстава припускати, що випадкова величина розподілена нормально.

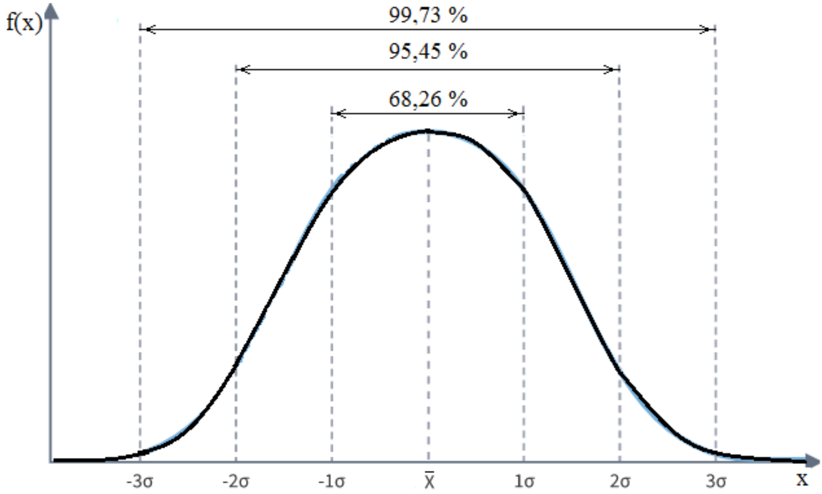

Рис. 2.1. Закон нормального розподілу

Процес обробки вимірювань не може бути рахуватися закінченим, якщо не знайдені точність одержаних результатів(або міру точності), а також середню квадратичну, імовірну та найбільшу імовірну похибки середнього арифметичного.

Оскільки величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$ є випадкові, то і середня арифметична $\bar{x}$ є також випадковою величиною. Слід відзначити, що із одержаних результатів вимірювань середня арифметична є найімовірнішим значенням вимірювальної величини.

Не зупиняючись на виводах, наведемо лише формули, які дозволять оцінити точність середнього арифметичного.

Міра точності окремого вимірювання h характеризує точність вимірювань і від неї залежить характер групування помилок поблизу нуля. Цей параметр розраховують за рівнянням:

$$h = \sqrt{\frac{n-1}{2 \cdot \Sigma(\bar{x}-x_i)^2}}\,. \tag{1.5}$$

Міра точності окремого вимірювання h є параметром нормального закону розподілу випадкової величини, що представлений у вигляді:

$$f(x) = \frac{h}{\sqrt{2\pi}} e^{-h^2x^2}\ .$$

Міра точності окремого вимірювання h з **мірою точності середнього арифметичного H** пов’язані рівнянням:

$$H = h\sqrt{n} \,. \qquad (1.6)$$

Далі розраховують **імовірність похибки окремих вимірювань r,** при імовірності P=0,9973 вона дорівнює**:**

$$r=0{,}675\cdot\sigma, \qquad (1.7)$$

та **імовірність похибки середнього арифметичного r_0**:

$$r_0=0{,}675\cdot\sigma_0. \qquad (1.8)$$

Обробку серії (вибірки) вимірювань слід проводити у наступній послідовності:

1. Визначають середнє арифметичне $\bar{x}$ за рівнянням (1.2).
2. Находять середню квадратичну похибку вимірювання σ за рівнянням (1.4).
3. Визначають найбільш можливу похибку Δ=3σ окремого вимірювання і переконуються, що між результатів вимірювань нема таких , які відрізнялися би від середнього арифметичного більше ніж на Δ. У випадку знайденого значення x_i для якого Δ більше, чім середнє арифметичне, його відкидають та починають обробку заново.
4. Визначають середню квадратичну похибки середнього арифметичного σ_0

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\bar{x}-x_i)^2}{n(n-1)}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \,. \qquad (1.9)$$

5. Розраховують міру точності окремих спостережень h за рівнянням (1.5).
6. Розраховують міру точності середнього арифметичного H за рівнянням (1.6).
7. Розраховують імовірність похибки окремих вимірювань r за рівнянням (1.7).
8. Розраховують імовірність похибки середнього арифметичного r_0 за рівнянням (1.8).

Вирішення типового завдання.

Завдання 1.
Обробити шістнадцять вимірювань, які представляють собою результатами аналізу розчину на вміст в ньому $MgCl_2$. Результати аналізу зведені в таблицю 2.1 (перший та другий стовпчики, вихідні дані).

Таблиця 2.1

Вихідні дані та результати обробки розчину на вміст в ньому $MgCl_2$

Вихідні дані		Перша обробка		Друга обробка		
№ з/п	x_i	$\bar{x} - x_i$	$(\bar{x} - x_i)^2$	x_i	$\bar{x} - x_i$	$(\bar{x} - x_i)^2$
1	102	0	0	102	-2,53	6,4
2	98	4	16	98	1,47	1,2
3	99	3	9	99	0,47	0,2
4	100	2	4	100	-0,53	0,3
5	97	5	25	97	2,47	6,1
6	140	-3,8	1444	–	–	–
7	95	7	49	95	4,47	20,0
8	100	2	4	100	90,53	0,3
9	98	4	16	98	1,47	2,2
10	96	6	36	96	3,47	12,0
11	102	0	0	102	-2,53	6,4
12	101	1	1	101	-1,53	2,3
13	101	1	1	101	-1,53	2,3
14	102	0	0	102	-2,53	6,4
15	99	3	9	99	0,47	0,2
16	102	0	0	102	-2,53	6,4
Σ	1632	0	1614	1492	0,15	73,7

Розв’язання.

1. Находять середнє арифметичне за рівнянням

$$\bar{x} = \frac{1632}{16} = 102{,}0$$

2. Розраховують найбільш можливу похибку окремих вимірювань

$$\Delta = 3 \cdot \sigma = 3 \cdot \sqrt{\frac{\Sigma(\bar{x} - x_i)^2}{n - 1}} = 3 \cdot \sqrt{\frac{1614}{16 - 1}} = 31$$

Порівнявши її з цифрами третього стовпця (першої обробки), видно що шосте спостереження недоброякісне |-38|>31 (див. табл. 2.1). Викидаємо шосте спостереження і розрахування повторюємо (друга обробка).

3. Находять середнє арифметичне

$$\bar{x} = \frac{1492}{15} = 99{,}47$$

4. Розраховують найбільш можливу похибку окремих вимірювань

$$\Delta = 3 \cdot \sigma = 3 \cdot \sqrt{\frac{\Sigma(\bar{x}-x_i)^2}{n-1}} = 3 \cdot \sqrt{\frac{73{,}7}{15-1}} = 6{,}6,$$

де середня квадратична похибка вимірювання σ становить

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(\bar{x}-x_i)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{73{,}7}{15-1}} = 2{,}29.$$

Проводимо оцінку результатів вимірювань шостого стовпчика (див. табл. 2.1). Всі значення < 6,6, що відповідає вимогам – похибка вимірювання за абсолютною величиною не перевищує 3σ (трьох сігм).

Відповідно до правилу трьох сігм всі вимірювальні величини повинні бути заключенні в інтервалі (-3σ;+3σ).

5. Розраховують середньоквадратичну похибку арифметичного середнього

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\bar{x}-x_i)^2}{n(n-1)}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{73{,}7}{15{,}14}} = 0.593 \approx 0{,}6;$$

результат обробки можна записати у вигляді

$\bar{x} = 99{,}5 \pm 0{,}6$ або $\bar{x} = 99{,}5$ з точністю 0,6%.

6. Визначають міру точності окремих спостережень

$$h = \sqrt{\frac{n-1}{2\Sigma(\bar{x}-x_i)^2}} = \sqrt{\frac{14}{2 \cdot 73{,}7}} = 0{,}309.$$

7. Визначають міру точності середнього арифметичного

$$H = h \cdot \sqrt{n} = 0,309 \cdot \sqrt{14} = 1,2.$$

7. Розраховують імовірність похибки окремих вимірювань r.

$$r = 0,675 \cdot \sigma = 0,675 \cdot 2,29 = 1,55$$

8. Розраховують імовірність похибки середнього арифметичного r_o.

$$r_0 = 0,675 \cdot \sigma_0 = 0,675 \cdot 0,6 = 0,41$$

<u>Завдання 2.</u>

Точність газоаналізатора дорівнює 12 %. Скільки дублюючих вимірювань необхідно провести, щоб забезпечити відносну точність 10, 5. 3 та 1 %?

Розв'язання.

Середньоквадратична похибка середньоарифметичного σ_0 та середньоквадратична похибка окремого вимірювання пов'язані залежністю

$$\sigma_0 = \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

тоді число вимірювань n становить

$$n = \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^2,$$

звідки

$$n_{12} = \left(\frac{12}{10}\right)^2 = 1,4; \quad n_5 = 5,8; \quad n_3 = 16; \quad n_1 = 144.$$

<u>Завдання 3.</u>

Точність планіметра, за допомогою якого визначається площа замкнутої кривої становить 6 %. Скільки раз необхідно повторити вимірювання площі, щоб точність середньоарифметичного одержаних результатів була рівна 2 %.

Розв'язання.

Число необхідних вимірювань розраховують з рівняння

$$\sigma_0 = \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

де σ – середньоквадратична похибка окремого вимірювання;
σ_0 – середньоквадратична похибка середньоарифметичного.
Звідси

$$n = \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^2 = \left(\frac{6}{2}\right)^2 = 9 \text{ разів.}$$

Завдання на самостійну роботу.

Завдання 4.
Зразковим манометром установлено тиск в автоклаві 104,2 ат. При випробуванні автоклава технічний манометр показував:
109,9; 105,3; 103,6; 104,4; 104,5; 104,1; 102,1; 103,5; 103,7; 103,9.
З'ясувати, чи нема в цих вимірюваннях помилки та, виключив її, визначити точність вимірювання технічним манометром?

Завдання 5.
Приладом високого класу точності установлена величина тимчасового опору сталі для колони синтезу аміаку 37,5 кг/мм^2. При іспиті приладу для вимірювання опору одержані наступні значення (кг/мм^2):
35, 40, 38, 37, 41,34, 42, 37.
З'ясувати, чи нема в цих вимірюваннях помилки та, виключив її, визначити точність вимірювання приладом?

Завдання 6.
За допомогою приладу одержані наступні дванадцять відкликів (мм):
22,3; 22,4; 22,4; 22,1; 22,3; 22,2; 22,0; 22,3; 23,0; 22,2; 22,4; 22,3.
Точний відлік становить 22,3. Визначити середньоквадратичний відхил для цього приладу.

Завдання 7.
Точність вимірювання тиску в автоклаві за допомогою манометра становить 10 %. Скільки разів необхідно повторити вимірювання тиску, щоб точність середнього арифметичного одержаних результатів була рівна 5 %?

Контрольні питання.

1. Що таке груба похибка?
2. За якою формулою визначається середня арифметична величина?
3. Сформулюйте правило трьох сігм?
4. Що характеризує математичне сподівання?
5. Як розрахувати середню квадратичну похибку вимірювання?
6. Як визначають найбільш можливу похибку окремого вимірювання?
7. Як пов’язані між собою середньоквадратична похибка середньоарифметичного та середньоквадратична похибка окремого вимірювання?
8. Як пов’язані між собою точність окремого вимірювання та точність середнього арифметичного?

3. ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 3

Тема заняття: ОСНОВНІ СПОСОБИ БУДУВАННЯ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ГРАФІКІВ ТА ЗНАХОДЖЕННЯ ЗА НИМИ ЕМПІРИЧНИХ ФОРМУЛ

Мета і задачі заняття.

Ознайомитися із способами будування експериментальних графіків та знаходження за ними емпіричних формул. Одержати теоретичні знання та практичні навички застосування методу вирівнювання та способу середніх в експериментальній практиці.

Постановка заняття.

За одержаними в експерименті дослідними даними побудувати експериментальний графік та визначити за ним емпіричні коефіцієнти формули.

Основні теоретичні відомості.

В процесі експериментальних досліджень отримують статистичний ряд вимірювань двох величин, коли кожному значенню функції y_1, y_2, …, y_n відповідає визначене значення x_1, x_2, … x_n. За даними значеннями можна побудувати криву залежності y від x. Цю ж залежність можна наближено представити емпіричною формулою $y=f(x)$. Очевидно, що вибір тої чи іншої емпіричної формули диктується вимогою найкращого наближення $\varphi(x)$ та $f(x)$ в деякому інтервалі значень $a \le x \le b$.

Функцію $f(x)$ можна виразити різними емпіричними формулами. В деяких задачах в якості $\varphi(x)$ беруть функцію, для якої в заданому інтервалі $a \le x \le b$ найбільше значення величини $|f(x) - \varphi(x)|$ буде найменшим, чім при виборі любої другої емпіричної формули.

В багатьох випадках хід явища, що вивчається, добре описується степеневою, показниковою функцією або багаточленом. Багаточлен степені n має вигляд:

$$y=a+bx+cx^2+ \ldots +mx^n. \quad (3.1)$$

При n=1 багаточлен

$$y=n+mx$$

геометрично зображується прямою лінією.

При n цілому та більшим одиниці рівняння (3.1) приймає форму криву параболічного типу. Окремими формами цього рівняння є:

$$y=mx^n \text{ та } y=a+mx^2.$$

При n<0 рівняння (1) представляє криву гіперболічного типу. До окремих випадків відносяться:

$$y=\frac{a}{x^n}, \quad y=\frac{a}{x^n}+b, \quad \frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1.$$

Показникова функція утворюється при рішенні диференційного рівняння першого порядку і має вигляд:

$$y=ab^x \text{ або } y=ae^{bx}.$$

Перше ніж визначати чисельні значення коефіцієнтів у обраній емпіричній формулі, необхідно перевірити можливість її використання **методом вирівнювання**. Лише після цього можна перейти до відшукування значень постійних коефіцієнтів, які дадуть найкраще наближення дослідних та розрахункових величин.

Метод вирівнювання полягає у перебудові функціє y=φ(x) таким чином, щоб перетворить її у лінійну функцію. Досягається це шляхом заміни змінних x та y новими змінними X=ψ(x, y) та Y=ζ(x, y), які обирають так, щоб дісталось рівняння прямої лінії:

$$Y=A+BX. \qquad (3.2)$$

Розрахував значення X_i та Y_i за заданими x_i та y_i, наносять їх на діаграму з прямокутними координатами (X, Y). Якщо побудовані таким чином точки розташовуються поблизу прямої лінії, то обрана емпірична формула y=φ(x) підходить для характеристики залежності y=f(x).

Після установлення придатності обраної формули для вираження залежності змінних, що вивчається, необхідно визначить чисельні значення коефіцієнтів, що входять до формули. Найкращі результати дає використання способу найменших квадратів, але цей спосіб дуже громіздкий.

У багатьох випадках можна застосувати простий спосіб це **спосіб середніх**, який менш точний, але дає цілком задовільні для інженерних розрахунків результати.

Спосіб середніх полягає в наступному. Використавши метод вирівнювання та одержавши лінійну залежність

$$Y=A+BX,$$

утворюють умовні рівняння $Y_i=A+BX_i$, число n яких рівно числу відповідних значень X_i та Y_i. Умовні рівняння розбивають на дві приблизно рівні групи і рівняння, які входять до кожної групи, складають. Одержують два рівняння:

$$\sum_1^k Y_i = kA + B\sum_1^k X_i\ ;\ \sum_{k+1}^n Y_i = (n-k)A + B\sum_{k+1}^n X_i\ ,$$

З яких знаходять невідомі коефіцієнти А та В.

Групування умовних рівнянь слід проводити таким чином, щоб групи мали рівну або приблизно рівну чисельність рівнянь. Такий спосіб дає найбільш точний результат.

Вирішення типового завдання.

Розглянемо на прикладі застосування метода вирівнювання.

Завдання 1.

При вивченні швидкості хімічної реакції одержані дані, да τ – час від початку досліду, у – кількість речовини у реакційній суміші до моменту τ. Результати досліду зведені в таблицю 3.1 (стовпчики 2 та 3).

Таблиця 3.1

Результати вивчення та обробки методом вирівнювання швидкості реакції

№ з/п	τ	y	lgy
1.	3	57,6	1,7604
2.	6	41,3	1,6222
3.	9	31,0	1,4912
4.	12	22,7	1,3560
5.	15	16,6	1,2204
6.	18	12,2	1,0864
7.	21	8,9	0,9494
8.	24	6,5	0,8129

Розв’язання.
Дані, що представлені в таблиці 3.1, представлені на рис. 3.1. Можна припускати, що для графічного опису даних найбільш характерною буде формула $y=ae^{b\tau}$.

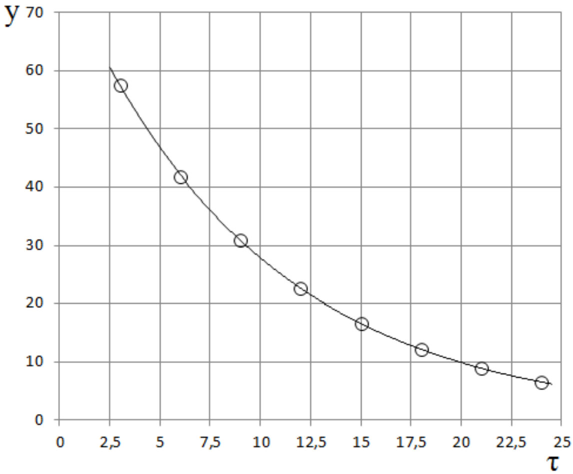

Рис. 3.1. Залежність швидкості хімічної реакції від кількісті речовини у реакційній суміш

Вирівнювання проводим шляхом логарифмування (див. Додаток 1):

$$\ln y=\ln a+b\tau \quad \text{або} \quad \lg y = \lg a + \frac{b}{2.303}\tau \,.$$

Розраховуємо значення lgy (стовпчик 4) та наносим на графік точки в координатах (τ, lgy), див. рисунок 3.2. Ці точки добре укладаються на пряму лінію, що доказує застосування в даному випадку формули $y=ae^{b\tau}$.

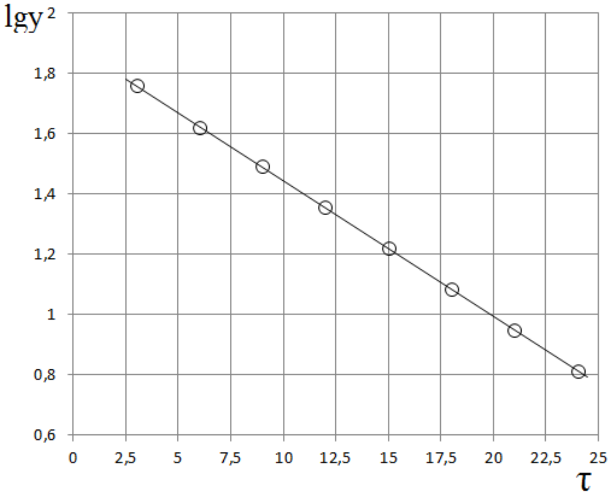

Рис. 3.2. Розрахункові дані, результат застосування метода вирівнювання

Розглянемо застосування способу середніх для відшукування за ним емпіричних формул виду $y=ax^b$ та побудування емпіричних графіків.

Завдання 2.

За результатами дослідів знайти за допомогою способу середніх значення коефіцієнтів, що входять до формули виду $y=ax^b$, де y – швидкість потоку рідини, а x – об'єм рідини. Результати досліду зведені в таблицю 3.2, див. стовпчики 2 та 3.

Таблиця 3.2

Результати дослідів та обробка за способом середніх

№ з/п	y	x	lgy	lgx	$y_{вич}$	δ, %
1.	3,60	2,20	0,5563	0,3424	3,59	-0,3
2.	5,00	3,80	0,6990	0,5798	4,95	-1,0
3.	7,00	7,00	0,8451	0,8451	7,10	1,4
4.	7,70	7,70	0,8865	0,8865	7,51	-2,5
5.	9,30	11,50	0,9685	1,0607	9,52	2,4
6.	11,30	15,20	1,0531	1,1818	11,19	-1,0
7.	12,20	18,00	1,0863	1,2553	12,39	1,6
						$\delta_{сер}$=1,5

Розв’язання.
На рис. 3.4 представлено графік залежності між у та х, з якого видно, що залежність ця нелінійна.

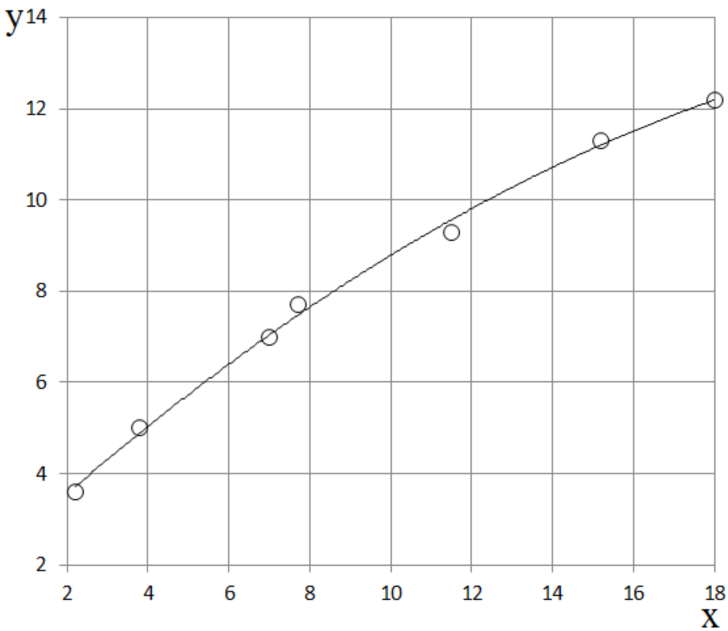

Рис. 3.4. Залежність дослідних даних швидкості потоку рідини від об’єму рідини в координатах (х, у)

Якщо взяти lgy та lgx (див. 4 та 5 стовпчики в таблиці 3.2) та нанести їх в прямокутній системі координат (lgx, lgy), то ця залежність перетворюється у лінійну, див. рис. 3.5. Отже, можна прийняти:

$$\lg y = \lg a + b \cdot \lg x$$

Підставим в це рівняння з таблиці 3.2 стовпчики 4 та 5 і одержим сім рівнянь:

$$0{,}5563 = \lg a + 0{,}3424 \cdot \lg x$$
$$0{,}6990 = \lg a + 0{,}5798 \cdot \lg x$$
$$0{,}8451 = \lg a + 0{,}8451 \cdot \lg x$$

$$0{,}8865 = \lg a + 0{,}8865 \cdot \lg x$$
$$0{,}9685 = \lg a + 1{,}0607 \cdot \lg x$$
$$1{,}0531 = \lg a + 1{,}1818 \cdot \lg x$$
$$1{,}0864 = \lg a + 1{,}2553 \cdot \lg x$$

Складуємо окремо перших три та останніх чотири рівняння, одержим:

$$2{,}1004 = 3\lg a + 1{,}7673 \cdot b$$
$$3{,}9945 = 4\lg a + 4{,}3843 \cdot b$$

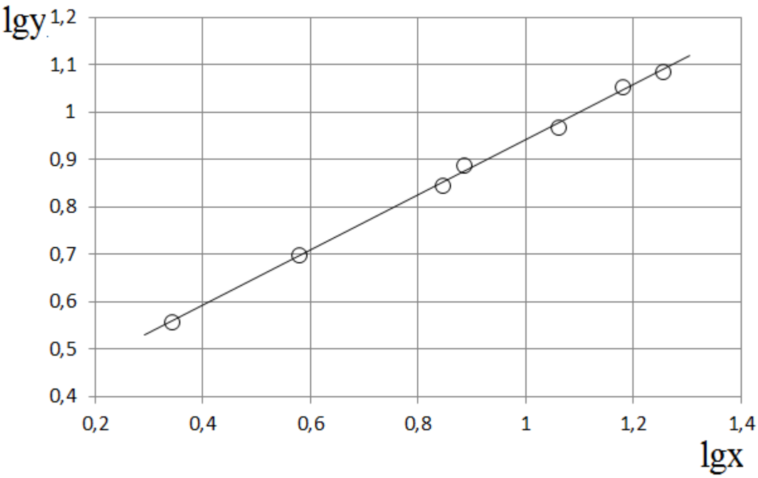

Рис. 3.5. Залежність швидкості потоку рідини від об'єму рідини в координатах (lgx, lgy)

З цієї системи знайдемо:

$$a = 2{,}256,\ b = 0{,}5887.$$

Таким чином, нова емпірична формула буде мати вид:

$$y = 2{,}256 \cdot x^{0{,}5887}$$

Середнє відхилення в δ=1,5 % показує, що експериментальні дані задовільно описуються емпіричною формулою $y=2{,}256\cdot x^{0{,}5887}$.

Завдання на самостійну роботу.

Завдання 3.

В таблиці 3.3 наведені дані залежності коефіцієнта тепловіддачі α (ккал/(м^2·год·^{o}С)) від горизонтальній стінки до киплячої води в залежності від різниці температур Δt (^{o}C) стінки та киплячої води. Позначимо: $\Delta t=x$ та $\alpha=y$. Знайти емпіричну залежність коефіцієнта тепловіддачі від різниці температур та побудувати графік.

Таблиця 3.3

№ з/п	x	y
1.	6,10	3185
2.	7,50	5390
3.	8,88	6860
4.	11,10	10045
5.	12,20	12740

Завдання 4.

За результатами досліду одержані значення перепадів тиску ΔP (кгс/см^2) в залежності від швидкості газу W_o (м/с) в отворах сітчастої тарілки. Знайти емпіричні коефіцієнти формули залежності перепаду тиску ΔP від швидкості газу W_o у вигляді $\Delta P=a\cdot W_o^b$ та побудувати графік. Результати досліду зведені до таблиці 3.4

Таблиця 3.4

Результати дослідів перепадів тиску ΔP від швидкості газу W_o в отворах сітчастої тарілки

№, з/п	W_o, м/с	ΔP , кгс/см^2
1.	5,01	3,0
2.	9,10	10,0
3.	14,20	24,5
4.	19,20	46,0
5.	22,30	60,0
6.	28,60	98,0

Контрольні питання.

1. Якими емпіричними формулами описуються процеси, що відбуваються в машинобудуванні?
2. Яку вимогу ставлять до формули, що описує експериментальні дані?
3. В чому полягає сутність метода вирівнювання?
4. В чому полягає сутність способу середнього?
5. Наведіть послідовність застосування способу середнього при обробці дослідних даних?
6. Як пов’язані між собою метод вирівнювання та спосіб середніх?

4. ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 4

Тема заняття: ЛІНІЙНА ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ТА ІНТЕРПОЛЯЦІЙНА ФОРМУЛА ЛАГРАНЖА.

Мета і задачі заняття.

Ознайомитися з сутністю застосування процесів знаходження проміжних табличних даних за допомогою лінійної інтерполяції та інтерполяційної формули Лагранжа. Одержати теоретичні знання та практичні навички застосування лінійної інтерполяції та інтерполяційної формули Лагранжа.

Постановка заняття.

Відповідно до наданого завдання побудувати лінійну інтерполяцію та інтерполяційну формулу Лагранжа, розрахувати задане проміжне табличне значення та оцінити абсолютну похибку.

Основні теоретичні відомості.

При проведені експериментальних дослідів функцію $y=f(x)$ одержують у вигляді таблиці. Часто виявляється за необхідністю розрахувати значення функції при значенні x, яке не міститься в таблиці. Також трапляються випадки, коли необхідно визначити проміжне значення довідкової функції, яка теж задана таблицею. Ця задача називається **інтерполяцією**.

Інтерполювання табличних значень, різниця між котрими мала, проводиться за допомогою **лінійної інтерполяції**, яка є найбільш простою, найменш точною, але достатньою для інженерного розрахунку. Сутність лінійної інтерполяції полягає в тому, що будь-яку функціональну залежність між суміжними табличними значеннями вважають лінійною, що дозволяє за правилом пропорціональності розрахувати значення самої функції. Графічне пояснення сутності лінійної інтерполяції показано на рис. 4.1, таблиці 4.1 та наведена сама розрахункова формула (4.1).

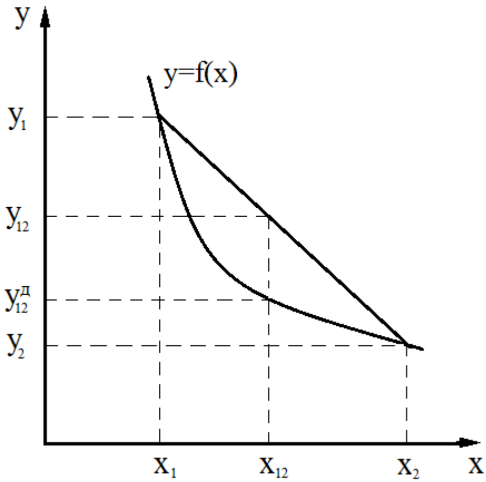

Рис. 4.1. Лінійна інтерполяція: табличні аргументи x_1, x_2 та їх функції y_1, y_2; x_{12} – задане значення аргументу; y_{12} – розрахункове значення функції; $y_{12}^{Д}$ – дійсне значення функції

Таблиця 4.1

Аргумент (x) та його функціональне значення (y)

x_1	x_{12}	x_2
y_1	y_{12}	y_2

Розрахункова формула визначення проміжних табличних значень за лінійною інтерполяцією має вигляд:

$$y_{12} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x_{12} - x_1) + y_1. \tag{4.1}$$

Якщо табличні різниці між значеннями великі та швидко змінюються, то інтерполювання можна здійснити шляхом знаходження наближеного аналітичного представлення даної функції. В цьому разі найбільш часто в інженерній практиці застосовують **інтерполяційну формулу Лагранжа**. Нехай при $x=x_1, x_2, \dots, x_n$ функція приймає, відповідно, значення $y_1, y_2, \dots, y_n$. Лагранж знайшов вираз для полінома степені n–1, який приймає ті ж при $x=a_1, a_2, \dots, a_n$, що і задана нам функція.

Цей поліном має наступний вигляд:

$$y = y_1 \frac{(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\dots(x_1-x_n)} +$$

$$+y_2 \frac{(x-x_1)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\dots(x_2-x_n)} + \dots +$$

$$+y_n \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\dots(x_n-x_{n-1})},$$

де $x_1, x_2, \dots, x_n$ та $y_1, y_2, \dots, y_n$ – значення, які взяти з таблиці даних.

Як правило для інтерполювання достатньо мати чотири значення табличної функції – по дві з обох сторін від місця шуканого значення в таблиці. Для поліному

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2^2 + b_3 x_3^3$$

формула Лагранжа має вигляд:

$$y = y_1 \frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} + y_2 \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} +$$

$$+y_3 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} + y_4 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_1)(x_4-x_3)(x_4-x_3)} \qquad (4.2)$$

Для зручності розрахунків по цій формулі рекомендують заповнювати таблицю 4.2.

Таблиця 4.2

Таблиця, що рекомендована при застосуванні формули Лагранжа

Чисельник					Знаменник				
	x_1	x_2	x_3	x_4		x_1	x_2	x_3	x_4
y_1		$x-x_2$	$x-x_3$	$x-x_4$	x_1		x_1-x_2	x_1-x_3	x_1-x_4
y_2	$x-x_1$		$x-x_3$	$x-x_4$	x_2	x_2-x_1		x_2-x_3	x_2-x_4
y_3	$x-x_1$	$x-x_2$		$x-x_4$	x_3	x_3-x_1	x_3-x_2		x_3-x_4
y_4	$x-x_1$	$x-x_2$	$x-x_3$		x_4	x_4-x_1	x_4-x_2	x_4-x_3	

Оцінка для абсолютної похибки інтерполяційної формули Лагранжа здійснюється за виразом:

$$|R_n(x)| = |f(x) - L_n(x)| \le \frac{f^{n+1}(x)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n), \qquad (4.3)$$

де $f^{n+1}(x)$ – похідна від вихідної функції f(x); $R_n(x)$ – абсолютна похибка; n – степінь полінома.

Вирішення типового завдання.

Розглянемо на прикладі застосування лінійного інтерполювання.

Завдання 1.

За довідковими табличними даними для насиченої водяної пари абсолютний її тиск (P, ат) та теплота пароутворення (r, кДж/кг) пов'язані залежністю, представленою в таблиці 4.3. За допомогою лінійного інтерполювання знайти значення теплоти пароутворення при тиску P=3,685 ат.

Таблиця 4.3

Властивість насиченої водяної пари від абсолютного тиску

P, ат	2	3	4	5
r, кДж/кг	2208	2171	2141	2117

Розв'язання.

Складаємо лінійну інтерполяційну формулу:

$$r_{3,685} = \frac{r_4 - r_3}{P_4 - P_3}\left(r_{3,4} - r_3\right) + r_3 = \frac{2141 - 2171}{4 - 3}(3,685 - 3) + 2171 =$$

$$= 2150,5 \text{ кДж/кг}.$$

Точне значення теплоти пароутворення насиченої водяної пари за довідником при тиску P=3,685 ат складає $r_{3,685}$= 2150,0 кДж/кг.

Розрахуємо відносну похибку:

$$\delta = \left|\frac{(2150,5 - 2150,0)}{2150,5}\right| \cdot 100\% = 0,023\ \%.$$

Розглянемо на прикладі застосування інтерполяційної формули Лагранжа.

Завдання 2.

Дана таблиця 4.4 значень функції y=lnx. Розрахувати значення функції в точці x=3,5.

Таблиця 4.4

Вихідні дані до завдання 2

x	2	3	4	5
y	0,6931	1,0986	1,3863	1,6094

Розв’язання.

Складаємо допоміжну таблицю 4.5.

Таблиця 4.5

Допоміжна таблиця до вирішення завдання 2

Чисельник					Знаменник				
	2	3	4	5		2	3	4	5
0,6931		0,5	-0,5	-1,5	2		-1	-2	-3
1,0986	1,5		-0,5	-1,5	3	1		-1	-2
1,3863	1,5	0,5		-1,5	4	2	1		-1
1,6094	1,5	0,5	-0,5		5	3	2	1	

Застосуємо формулу Лагранжа, маємо:

$$y = 0{,}6931\frac{0{,}5\cdot(-0{,}5)\cdot(-1{,}5)}{(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)} + 1{,}0986\frac{1{,}5\cdot(-0{,}5)\cdot(-1{,}5)}{1\cdot(-1)\cdot(-2)} +$$

$$+1{,}3863\frac{1{,}5\cdot 0{,}5\cdot(-1{,}5)}{2\cdot 1\cdot(-1)} + 1{,}6094\frac{1{,}5\cdot 0{,}5\cdot(-0{,}5)}{3\cdot 2\cdot 1} =$$

$$=-0{,}04332+0{,}61796+0{,}77979-0{,}10059=1{,}2538$$

Розрахуємо абсолютну похибку інтерполяційної формули Лагранжа. Для чого, по-перше, знайдемо похідну четвертого порядку (y^{IV}) функції $y = \ln x$ та, по-друге, розрахуємо її чисельну величину при $x = 3{,}5$:

$$y' = (\ln x)' = \frac{1}{x};\quad y'' = -1\cdot x^{-2};\quad y''' = 2\cdot x^{-3};\quad y^{IV} = -6\cdot x^{-4}.$$

$$y^{IV} = -6\cdot 3{,}5^{-4} = -0{,}03998.$$

Абсолютна похибка за інтерполяційною формулою Лагранжа не перевищує

$$R_3(x) \le \frac{-0{,}03998}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(3{,}5-2)(3{,}5-3)(3{,}5-4)(3{,}5-5) =$$

$$=-0{,}001666\cdot 1{,}5\cdot 0{,}5\cdot(-0{,}5)\cdot(-1{,}5)=-0{,}000987\approx -9{,}37\cdot 10^{-4}.$$

Точне значення $\ln 3{,}5=1{,}2528$.

Завдання 3.

Визначити густину 26 % водного розчину H_3PO_4 при температурі 20 ^0C, використовуючи таблицю 4.6.

Таблиця 4.6

Густина водного розчину H_3PO_4

x (%H_3PO_4)	14	20	35	50
y (густина)	1,0764	1,1134	1,2160	1,3350

Розв’язання.

Складаємо допоміжну таблицю 4.7.

Таблиця 4.7

Допоміжна таблиця до вирішення завдання 3

Чисельник					Знаменник				
	14	20	35	50		14	20	35	50
1,0764		6	-9	-24	14		-6	-21	-36
1,1134	12		-9	-24	20	6		-15	-30
1,2160	12	6		-24	35	21	15		-15
1,3350	12	6	-9		50	36	30	15	

Застосуємо формулу Лагранжа, маємо:

$$y = 1{,}0764\frac{6\cdot(-9)\cdot(-24)}{(-6)\cdot(-21)\cdot(-36)} + 1{,}1134\frac{12\cdot(-9)\cdot(-24)}{6\cdot(-15)\cdot(-30)} +$$

$$+1{,}2160\frac{12\cdot6\cdot(-24)}{21\cdot15\cdot(-15)} + 1{,}3350\frac{12\cdot6\cdot(-9)}{36\cdot30\cdot15} =$$

=-0,3075+1,0680+0,4447-0,0534=1,1527.

Дійсне значення густини 26 % водного розчину H_3PO_4 при температурі 20 ^0C складає 1,1529. Розрахуємо відносну похибку:

$$\delta = \frac{1{,}1527-1{,}1529}{1{,}1527}\cdot 100\% = -0{,}017\ \%\ .$$

Завдання на самостійну роботу.

Завдання 4.

За довідковими табличними даними для насиченої водяної пари абсолютний її тиск (P, ат) та теплота пароутворення (r, кДж/кг) пов’язані залежністю, представленою в таблиці 4.8. За допомогою лінійного інтерполювання знайти значення теплоти пароутворення при тиску P=2,025 ат, P=2,367 ат, P=2,755 ат, P=3,192 ат, P=4,238 ат, Р=4,855 ат та розрахувати відносну похибку, якщо відомі довідкові дані , що наведені в таблиці 4.9.

Таблиця 4.8

Властивість насиченої водяної пари від абсолютного тиску

Р, ат	2	3	4	5
r, кДж/кг	2208	2171	2141	2117

Таблиця 4.9

Властивість насиченої водяної пари від абсолютного тиску

Р, ат	2,025	2,367	2,755	3,192	3,685	4,238	4,855
r, кДж/кг	2207,0	2194,0	2179,0	2165,0	2150,0	2125,0	2120,0

Завдання 5.

Дана таблиця 4.10 значень досліду. Розрахувати значення функції в точці х=3,69.

Таблиця 4.10

Вихідні дані до завдання 5

x	3,50	3,65	3,70	3,90
y	33,1154	38,4747	40,4473	494024

Завдання 6.

Дана таблиця 4.11 значень досліду. Розрахувати значення функції в точці х=11,0.

Таблиця 4.11

Вихідні дані до завдання 6

x	3	7	13	19
y	1,2110	2,1707	2,7762	3,1304

Контрольні питання.

1. Що таке інтерполяція?
2. В яких випадках застосовують інтерполяцію?
3. В чому сутність лінійної інтерполяції?
4. Наведіть формулу лінійної інтерполяції?
5. В чому сутність інтерполяційній формули Лагранжа?
6. Наведіть інтерполяційну формулу Лагранжа?
7. При яких умовах спрощується вид та застосування інтерполяційної формули Лагранжа?

5. ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 5

Тема заняття: ЕКСТРАПОЛЮВАННЯ.

Мета і задачі заняття.

Ознайомитися з сутністю застосування процесу знаходження даних за допомогою першої та другої формул Ньютона, що знаходяться поза одержаних за дослідом табличних даних. Одержати теоретичні знання та практичні навички застосування першої та другої формул Ньютона.

Постановка заняття.

Відповідно до наданого завдання розрахувати за допомогою першої та другої формул Ньютона дані, що знаходяться поза одержаних за дослідом табличних даних.

Основні теоретичні відомості.

В процесі проведення експериментів дослідник може одержувати три типу функціональної залежності:
1. У вигляді рівняння $y=f(x)$.
2. У вигляді графіку.
3. У вигляді таблиці.

Найчастіше функціональну залежність одержують у вигляді таблиці. В такому випадку найбільш часто ставиться вимога знання значення функції, як проміжних табличним значення, так і значенням функції одержаних поза табличним даним.

Спосіб апроксимації (наближення), який оснований на критерії збігу $f(x)$ та $\varphi(x)$ у вузлах x_i, називається **інтерполюванням** (або **інтерполяцією**). Якщо аргумент x, для якого визначається наближене значення функції y, належить відрізку (x_0, x_n), то задача визначення функції в точці x, називається **інтерполюванням у вузькому сенсі.** Якщо аргумент x знаходиться поза відрізка (x_0, x_n), то поставлена задача називається **екстраполюванням.** Пояснення сказано представлено на рис. 5.1.

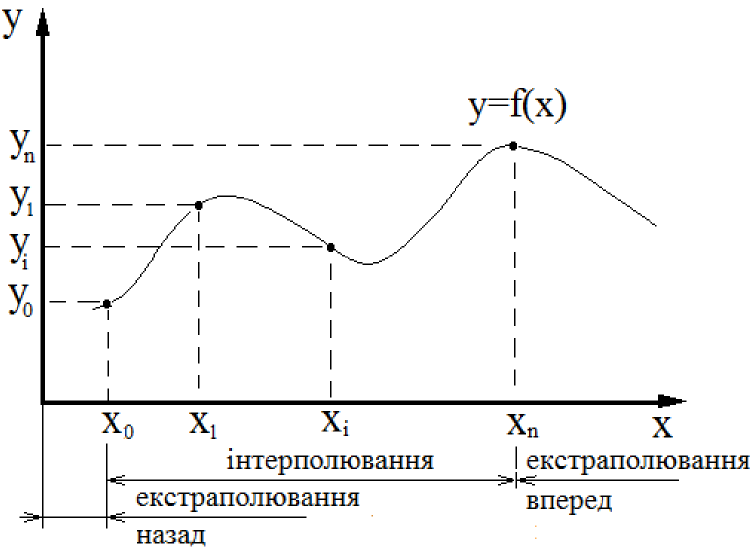

Рис. 5.1. Графічне пояснення понять інтерполювання та екстраполювання

Якщо точка інтерполювання x^* знаходиться на початку або в кінці таблиці, то не завжди є можливість вибрати достатню кількість вузлів зліва та справа від x^* для побудування необхідних кінцевих різниць. В цьому випадку використовують спеціальні форми інтерполяційного багаточлену, наприклад, перший та другий інтерполяційні багаточлени Ньютона.

Перша інтерполяційна формула Ньютона використовується для інтерполювання вперед та екстраполювання назад. Друга інтерполяційна формула Ньютона використовується для інтерполювання назад та екстраполювання вперед.

Треба розуміти, що операція екстраполювання менш точна, чім операція інтерполювання у вузькому сенсі слова.

Перша інтерполяційна форма Ньютона має вигляд:

$$P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \dots + \frac{q(q-1)\dots(q-n-1)}{n!}\Delta^n y_n, \qquad (5.1)$$

де $q = \frac{x-x_0}{h}$ – число кроків, які необхідні для досягання точки x_i виходячи з точки x_0; $h=x_{i+1} - x_i$ – шаг.

Друга інтерполяційна форма Ньютона має вигляд:

$$P_n(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} +$$

$$+\frac{q(q+1)\dots(q+2)}{3!}\Delta^3 y_{n-3} + \cdots \dots + \frac{q(q+1)\dots(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0, \qquad (5.2)$$

де $q = \frac{x-x_n}{h}$.

Вирішення типового завдання.

Розглянемо на прикладі застосування першої та другої формул Ньютона для знаходження даних, що знаходяться поза одержаних за дослідом табличних даних (процес екстраполювання).

Завдання 1.
В таблиці 5.1 (стовпчики 2 та 3) наведено значення функції y=sinx в границях від $x=15^0$ до $x=55^0$ з шагом h=5. За допомогою першої та другої формул Ньютона відповідно знайти $y=\sin 14^0$ та $y=\sin 56^0$.

Розв'язання.
Складаємо таблицю 5.1 різниць функції першого, другого та третього порядків, див. відповідно стовпчики 3, 4, 5. Бачимо, що треті різниці функції практично постійні, тому можна обмежитися ними.

Таблиця 5.1

Значення функції y=sinx та її різниці

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
15	0,2588	*0,0832*	*-0,0026*	*-0,0006*
20	0,3420	0,0806	-0,0032	-0,0006
25	0,4226	0,0774	-0,0038	-0,0006
30	0,5000	0,0736	-0,0044	-0,0005
35	0,5736	0,0692	-0,0049	-0,0005
40	0,6428	0,0642	-0,0054	**-0,0003**
45	0,7071	0,0589	**-0,0057**	
50	0,7660	**0,0532**		
55	**0,8192**			

Для розрахунку $y=\sin 14^0$ приймемо $x_0=15^0$ та $x=14^0$, звідки

$$q=\frac{x-x_0}{h}=\frac{14^0-15^0}{5}=-0{,}2^0.$$

Застосуємо першу інтерполяційну формулу Ньютона, використовуючи з таблиці підкреслені різниці, що виділені курсивним шрифтом:

$$P_3(x)=y_0+q\Delta y_0+\frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0+\frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0.$$

$$\sin 14^0=0{,}2588+(-0{,}2)0{,}0832+\frac{(-0{,}2)(-0{,}2-1)}{1\cdot 2}(-0{,}0026)+$$

$$+\frac{(-0{,}2)(-0{,}2-1)(-0{,}2-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(-0{,}0006)=0{,}2419.$$

Розрахунок на калькуляторі дає $y=\sin 14^0=0{,}24192$.

Для відшукання $y=\sin 55^0$ покладемо $x_n=55^0$ та $x=56^0$, звідки

$$q=\frac{x-x_n}{h}=\frac{56^0-55^0}{5}=0{,}2^0.$$

Для розрахунку $y=\sin 55^0$ застосуємо другу інтерполяційну формулу Ньютона, використовуючи з таблиці підкреслені різниці, що виділені жирним шрифтом:

$$P_3(x)=y_n+q\Delta y_{n-1}+\frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2}+\frac{q(q+1)(q+2)}{3!}\Delta^3 y_{n-3}\,.$$

$$\sin 56^0=0{,}8192+0{,}2\cdot 0{,}0532+\frac{0{,}2\cdot(0{,}2+1)}{1\cdot 2}(-0{,}0057)+$$

$$+\frac{0{,}2\cdot(0{,}2+1)(0{,}2+2)}{1\cdot 2\cdot 3}(-0{,}0003)=0{,}8291.$$

Розрахунок на калькуляторі дає $y=\sin 56^0=0{,}82904$.

<u>Завдання 2.</u>

В таблиці 5.2 (стовпчики 2 та 3) наведено значення функції $y=3^x$ в границях від $x=0{,}50$ до $x=1{,}50$ з шагом $h=0{,}25$. За допомогою першої та другої формул Ньютона відповідно знайти $y=3^{0,48}$ та $y=3^{1,52}$.

Розв'язання.
Складаємо таблицю 5.2 різниць функції першого, другого, третього та четвертого порядків, див. відповідно стовпчики 3, 4, 5 та 6. Бачимо, що четверта різниця функції дуже мала, тому можна обмежитися третім порядком.

Таблиця 5.2

Значення функції $y=3^x$ та її різниці

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0,5	1,732	*0,548*	*0,172*	*0,056*	0,016
0,75	2,280	0,720	0,228	**0,072**	
1,00	3,000	0,948	**0,300**		
1,25	3,948	**1,248**			
1,5	5,196				

Для розрахунку $y=3^{0,48}$ приймемо $x_0=0,5$ та $x=0,48$, звідки

$$q = \frac{x-x_0}{h} = \frac{0,48-0,5}{0,25} = -0,08.$$

Застосуємо першу інтерполяційну формулу Ньютона, використовуючи з таблиці підкреслені різниці, що виділені курсивним шрифтом:

$$P_3(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0.$$

$$3^{0,48} = 1,732 + (-0,08)\cdot 0,548 + \frac{(-0,08)(-0,08-1)}{1\cdot 2}0,122 +$$

$$+\frac{(-0,08)(-0,08-1)(-0,08-2)}{1\cdot 2\cdot 3}0,056 = 1,6918.$$

Розрахунок на калькуляторі дає $y=3^{0,48}=1,6944$.
Для відшукання $y=3^{1,52}$ покладемо $x_n=1,50$ та $x=1,52$, звідки

$$q = \frac{x-x_n}{h} = \frac{1,52-1,50}{0,25} = 0,08.$$

Для розрахунку $y=3^{1,52}$ застосуємо другу інтерполяційну формулу Ньютона, використовуючи з таблиці підкреслені різниці, що виділені жирним шрифтом:

$$P_3(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!}\Delta^3 y_{n-3}\ .$$

$$3^{1,52} = 5,196 + 0,08 \cdot 1,248 + \frac{0,08 \cdot (0,08+1)}{1 \cdot 2} 0,300 +$$

$$+ \frac{0,08 \cdot (0,0,8+1)(0,08+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} 0,072 = 5,31096.$$

Розрахунок на калькуляторі дає $y=3^{1,52}=5,3116$.

Завдання на самостійну роботу.

Завдання 3.

В таблиці 5.3 наведено значення функції y=cosx в границях від $x=10^0$ до $x=50^0$ з шагом h=5. За допомогою першої та другої формул Ньютона відповідно знайти $y=\cos 9^0$ та $y=\cos 51^0$.

Таблиця 5.3

Значення функції y=cosx

x	y
10	0,9848
15	0,9659
20	0,9397
25	0,9063
30	0,8660
35	0,8191
40	0,7660
45	0,7071
50	0,6428

Завдання 4.

В таблиці 5.4 наведено значення функції $y=e^x$ в границях від x=0,40 до x=1,90 з шагом h=0,25. За допомогою першої та другої формул Ньютона відповідно знайти $y=e^{0,38}$ та $y=e^{1,92}$.

Таблиця 5.4

Значення функції $y=e^x$

x	y
0,40	1,4918
0,65	1,9155
0,90	2,4596

Продовження таблиці 5.4

1,15	3,1582
1,40	4,0552
1,65	5,2070
1,90	6,6859

Контрольні питання.

1. Назвіть три способу задання функції?
2. Що називається інтерполяцією?
3. Що називається екстраполюванням?
4. Який параметр впливає на точність інтерполювання?
5. В яких випадках використовують при необхідності інтерполювання перший та другий поліном Ньютона?
6. Для яких цілій використовують першу інтерполяційну формулу Ньютона?
7. Наведіть першу формулу Ньютона?
8. Для яких цілій використовують першу інтерполяційну формулу Ньютона?
9. Наведіть другу формулу Ньютона?

6. ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 6

Тема заняття: МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ.

Мета і задачі заняття.

Ознайомитися з сутністю застосування методу найменших квадратів. Одержати теоретичні знання та практичні навички застосування метода найменших квадратів при обробці дослідних даних.

Постановка заняття.

Відповідно до завдання, що надано у вигляді табличних даних, провести апроксимацію методом найменших квадратів, та визначити коефіцієнти апроксимаційної функції, а також оцінити вибірковий коефіцієнт кореляції.

Основні теоретичні відомості.

Нехай на основі експерименту потребується установити функціональну залежність величини y від x:

$$y=\varphi(x)$$

Нехай в результаті досліду одержані n значень пов'язаних залежністю $y=\varphi(x)$ двох величини x та y, що записані в таблицю 6.:

Таблиця 6.1

Експериментальні дані

x	x_1	x_2	…	x_n
y	y_1	y_2	…	y_n

На площині x0y дані таблиці 6.1. відповідають n точкам $M_i(x_i, y_i)$, де i=1, 2, 3, …, n (рис. 6.1). Вид функції $y=\varphi(x)$ установлюється або з теоретичних розумінь, або на основі характеру розташування на координатній площині точок, що відповідають експериментальнім значенням. Точки M_i називають **експериментальними точками**.

Необхідно установити функціональну залежність $y=\varphi(x)$ між змінними y та x за результатами дослідних даних, що наведені в таблиці 6.1.

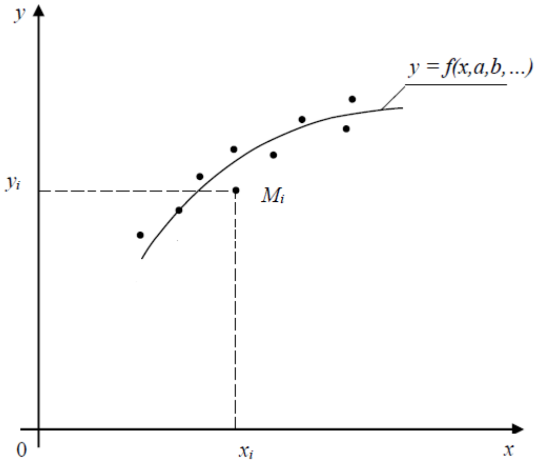

Рис. 6.1. Експериментальні точки

Застосування метода інтерполяції в даному випадку не доцільне, так як дані, що одержані в результату досліду непевні, вони містять неусунуті похибки вимірювання. Більш того, збіг значень у вузлах не відповідає збігу характерів поведінки вихідної та інтерполяційної функцій. Тому, необхідно знайти такий метод підбору емпіричної формули, який дозволить знайти не тільки саму формулу, а і оцінити похибку підгону.

В загальному випадку необхідно знайти не тільки саму залежність y від x, а і деякі параметри a, b, c, …, так, щоб вони найкращім чином описували процес, що розглядається.

Постановка задачі. Знайти апроксимаційну функцію

$$y=\varphi(x, a, b, c, \dots), \qquad (6.1)$$

таку, щоб в точках $x=x_i$, вона приймала значення за можливістю близькі до табличних, тобто графік шуканої функції повинен проходити якомога ближче до експериментальним точкам. Причому вид самої функції відомий і задача полягає саме в знаходженні коефіцієнтів a, b, c, … .

Для відшукання коефіцієнтів a, b, c, … у функції $y=\varphi(x, a, b, c, \dots)$ застосовується **метод найменших квадратів**, сутність якого складається в наступному. Між шуканою функцією та табличними значеннями в точках спостерігається відхилення. Позначимо їх

$$\Delta y_i = y_i - \varphi(x, a, b, c, \ldots), \tag{6.2}$$

де i=1, 2, 3, …, n.

Вибираємо значення коефіцієнтів a, b, c, … так, щоб сума квадратів відхилень приймала мінімальне значення, тобто

$$S(a, b, c, \ldots) = \sum_{i=1}^{n} (\Delta y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} [y_i - \varphi(x_i, a, b, c, \ldots)]^2 \to \min. \tag{6.3}$$

Сума $S(a, b, c, \ldots)$ є функція декількох змінних. Необхідною ознакою екстремуму функції декількох змінних складається в тому, що перетворюються в нуль частинні похідні:

$$S'(a)=0;\ S'(b)=0;\ S'(c)=0, \ldots \tag{6.4}$$

Розглянемо декілька випадків визначення функції $y=\varphi(x, a, b, c, \ldots)$.
1. Нехай

$$y=ax+b. \tag{6.5}$$

Функція S(a, b) виразу (6.3) в такому випадку прийме вигляд:

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (ax_i + b)]^2. \tag{6.6}$$

Ця функція з двома змінними a та b. Числа x_i та y_i – задані числа з таблиці 6.1. Відповідно

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial x} &= -2\sum_{i=1}^{n} [y_i - (ax_i + b)] x_i = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial b} &= -2\sum_{i=1}^{n} [y_i - (ax_i + b)] = 0, \end{aligned}\right\}$$

тобто система рівнянь (6.3) приймає вигляд:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} y_i x_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - b\sum_{i=1}^{n} x_i &= 0, \\ \sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i - bn &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{6.7}$$

Одержали систему двох лінійних рівнянь з двома невідомими a та b.
Система має єдиний розв'язок, який знаходиться за формулою Крамера:

$$a = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)},$$

$$b = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i - a\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i. \qquad (6.8)$$

Підставим визначені значення a та b в рівняння (6.5), в результаті одержимо рівняння шуканої лінійної функції y=ax+b із знаними коефіцієнтами a та b.

Для оцінки сили лінійного зв'язку розрахується вибірковий коефіцієнт кореляції:

$$r^* = \frac{a \cdot \sigma_x}{\sigma_y} = a \cdot \sqrt{\frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}{n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} y_i)^2}}, \qquad (6.9)$$

де σ_x, σ_y – вибірні середньоквадратичні відхилення..
Якщо
0,99≤| r^* |≤1,00 – дуже добра кореляція;
0,95≤| r^* |≤0,99 – доба кореляція;
0,90≤| r^* |≤0,95 – задовільна кореляція;
| r^* |≤0,90 – незадовільна кореляція, із чого випливає, що необхідно переглянути лінійну апроксимацію з заміною на поліном деякого степеню.

2. Нехай за апроксимаційну функцію взято поліном другого степеню.

$$y=ax^2+bx+c. \qquad (6.10)$$

В такому випадку вираз (6.3) має вигляд:

$$S(a,b,c) = \sum_{i=1}^{n}\left[y_i - (a{x_i}_i^2 + b + c)\right]^2. \qquad (6.11)$$

Це функція трьох змінних a, b та c. Система рівнянь прийме вид:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}\lfloor y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)\rfloor x_i = 0, \\ \sum_{i=1}^{n}\lfloor y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)\rfloor x_i^2 = 0, \\ \sum_{i=1}^{n}\lfloor y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)\rfloor = 0, \end{aligned}\right\}$$

або в розгорнутому вигляді:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} y_i x_i^2 - a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 - b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 - c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} y_i x_i^2 - a\sum_{i=1}^{n} x_i^3 - b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - c\sum_{i=1}^{n} x_i = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - b\sum_{i=1}^{n} x_i - cn = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (6.12)$$

Одержуємо систему лінійних рівнянь для визначення невідомих a, b та c. Аналогічно випадку двох коефіцієнтів, система (6.12) також має єдиний розв'язок.

Якщо вирішити систему лінійних рівнянь (6.12), знайдемо значення коефіцієнтів a, b та c і одержим шукану квадратичну залежність $y=ax^2+bx+c$.

Вирішення типового завдання.

Розглянемо на прикладі застосування методу найменших квадратів з лінійною апроксимацією дослідних табличних даних у вигляді рівняння y=ax+b з визначенням коефіцієнтів апроксимації a та b.

Завдання 1.

За результатами дослідження одержані експериментальні дані, що зведені в таблицю 6.2 (стовпчики 1, 2 та 3). Необхідно методом найменших квадратів знайти апроксимаційну функцію у вигляді y=ax+b, та оцінити силу лінійного кореляційного зв'язку. За допомогою програми для роботи з електронними таблицями Microsoft Excel побудувати в площині x0y графік одержаної функції, нанести її функціональну залежність та експериментальні точки. Зіставити розрахункові результати, що одержані із рівнянь (6.8) та допомогою Microsoft Excel.

Розв'язання.

Таблиця 6.2

Експериментальні дані та їх апроксимаційна обробка

n	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2	y_i^2
1	0	2,1	0,0	0,0	4,41
2	1	2,4	2,4	1,0	5,76
3	2	2,6	5,2	4,0	6,76
4	4	2,8	11,2	16,0	7,84
5	5	3,0	15,0	25,0	9,00
Σ 5	12	12,9	33,8	46,0	33,77

Знайдемо залежність y від x у вигляді лінійної функції: y=ax+b. Розрахуємо значення коефіцієнтів a та b за допомогою рівнянь (6.8). Попередньо розрахували за звели в таблицю 6.2 проміжні величини рівнянь $x_i y_i$, x_i^2, y_i^2.

$$a = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)} = \frac{5 \cdot 33{,}8 - 12 \cdot 12{,}9}{5 \cdot 46 - 12^2} = 0{,}165,$$

$$b = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i - a\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{5}12{,}9 - 0{,}165\frac{1}{5}12 = 2{,}184.$$

Таким чином, a=0,165, b=2,184.

Отже, шукана лінійна апроксимаційна функція буде мати наступний вигляд: y=0,165x+2,184.

Побудуємо в площині x0y графік одержаної функції та нанесемо експериментальні точки:

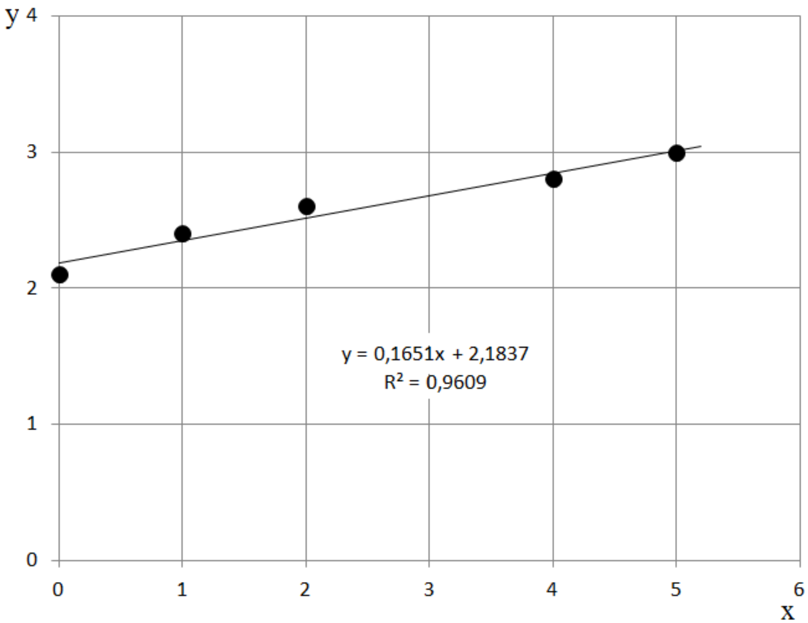

Рис. 6.2. Графік одержаної функції одержаної за допомогою Excel та експериментальні точки

Проведемо оцінку сили лінійного зв'язку, розрахувавши вибірковий коефіцієнт регресії за рівнянням (6.9):

$$r^* = a \cdot \sqrt{\frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}} = 0{,}165 \cdot \sqrt{\frac{5 \cdot 46 - 12^2}{5 \cdot 33{,}7 - 12{,}9^2}} = 0{,}9796.$$

Висновок. Кореляційна регресія добра, так як вибірковий коефіцієнт регресії становить 0,9796. Розрахункові результати, що одержані із рівнянь (6.8), (6.9) та допомогою Microsoft Excel мають добру узгодженість.

Завдання на самостійну роботу.

Завдання 2.

За результатами дослідження одержані експериментальні дані, що зведені в таблицю 6.3. Необхідно методом найменших квадратів знайти апроксимаційну функцію у вигляді y=ax+b, та оцінити силу лінійного кореляційного зв'язку. За допомогою програми для роботи з електронними таблицями Microsoft Excel побудувати в площині x0y графік одержаної функції, нанести її функціональну залежність та експериментальні точки. Зіставити розрахункові результати, що одержані із рівнянь (6.8) та допомогою Microsoft Excel.

Таблиця 6.3

Дослідні дані

n	x_i	y_i
1	1,0	1,8
2	2,0	1,9
3	3,0	3,3
4	4,0	4,8
5	5,0	3,8

Завдання 3.

За результатами дослідження одержані експериментальні дані, що зведені в таблицю 6.4. Необхідно методом найменших квадратів знайти апроксимаційну функцію у вигляді y=ax+b, та оцінити силу лінійного кореляційного зв'язку. За допомогою програми для роботи з електронними таблицями Microsoft Excel побудувати в площині x0y графік одержаної функції, нанести її функціональну залежність та експериментальні точки. Зіставити розрахункові результати, що одержані із рівнянь (6.8) та допомогою Microsoft Excel.

Таблиця 6.4

Дослідні дані

n	x_i	y_i
1	1,0	1,8
2	2,0	1,9
3	3,0	3,3
4	4,0	4,8
5	5,0	3,8

Завдання 4.

За результатами дослідження одержані експериментальні дані, що зведені в таблицю 6.5. Необхідно методом найменших квадратів знайти апроксимаційну функцію у вигляді y=ax+b, та оцінити силу лінійного кореляційного зв'язку. За допомогою програми для роботи з електронними таблицями Microsoft Excel побудувати в площині x0y графік одержаної функції, нанести її функціональну залежність та експериментальні точки. Зіставити розрахункові результати, що одержані із рівнянь (6.8) та допомогою Microsoft Excel.

Таблиця 6.5

Дослідні дані

n	x_i	y_i
1	1,0	4,3
2	2,0	5,3
3	3,0	6,5
4	4,0	7,4
5	5,0	8,7

Завдання 5.

За результатами дослідження одержані експериментальні дані, що зведені в таблицю 6.6. Необхідно методом найменших квадратів знайти апроксимаційну функцію у вигляді y=ax+b, та оцінити силу лінійного кореляційного зв'язку. За допомогою програми для роботи з електронними таблицями Microsoft Excel побудувати в площині x0y графік одержаної функції, нанести її функціональну залежність та експериментальні точки. Зіставити розрахункові результати, що одержані із рівнянь (6.8) та допомогою Microsoft Excel.

Таблиця 6.6

Дослідні дані

n	x_i	y_i
1	0,0	33,5
2	10,0	37,0
3	20,0	41,2
4	30,0	46,1
5	40,0	50,0
6	50,0	52,8
7	60,0	56,8
8	70,0	64,3
9	80,0	69,9

Завдання 6.

За результатами дослідження одержані експериментальні дані, що зведені в таблицю 6.7. Необхідно методом найменших квадратів знайти апроксимаційну функцію у вигляді $y=ax+b$, та оцінити силу лінійного кореляційного зв'язку. За допомогою програми для роботи з електронними таблицями Microsoft Excel побудувати в площині x0y графік одержаної функції, нанести її функціональну залежність та експериментальні точки. Зіставити розрахункові результати, що одержані із рівнянь (6.8) та допомогою Microsoft Excel.

Таблиця 6.7

Дослідні дані

n	x_i	y_i
1	1,0	3,0
2	2,0	4,0
3	3,0	2,5
4	5,0	0,5

Контрольні питання.

1. Що таке експериментальні точки?
2. В чому сутність метода найменших квадратів?
3. В яких випадках застосовують при апроксимації дослідних даних метод найменших квадратів?
4. В якому випадку застосовують лінійну, а в якому поліноміальну апроксимації при вирішенні задачі методом найменших квадратів?
5. Яким коефіцієнтом оцінюють силу лінійного зв'язку при визначенні лінійних коефіцієнтів методом найменших квадратів?

7. ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 7

Тема заняття: ОСНОВИ РЕГРЕСІЙНОГО АНАЛІЗУ. ПОВНИЙ ФАКТОРНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ

Мета і задачі заняття.

Ознайомитися з сутністю застосування повного факторного експерименту та регресійного аналізу. Одержати теоретичні знання та практичні навички застосування повного факторного експерименту та регресійного аналізу.

Постановка заняття.

За планом ПФЕ необхідно побудувати рівняння регресії та перевірити одержану модель на адекватність і провести її інтерпретацію.

Основні теоретичні відомості.

Процес визначення явного виду рівняння регресії одержав назву **регресійного аналізу.** Для різних математичних планів експерименту рівняння регресії містить різні складові:

а) для планів першого порядку рівняння регресії включає лінійні ефекти та парні взаємодії:

$$y=b_0+b_1X_1+ b_2X_2+\ldots+ b_nX_n+ b_{12}X_1X_2+\ldots+ b_{n-1}X_{n-1}X_n; \qquad (7.1)$$

б) для планів другого порядку рівняння регресії включає лінійні ефекти, парні взаємодії та квадратичні ефекти:

$$y = b_0 + b_1X_1 + \cdots + b_nX_n + b_{12}X_1X_2 + \cdots + b_{n-1,n}X_{n-1}X_n + b_{11}X_1^2 + + \cdots + b_{nn}X_n^2; \qquad (7.2)$$

де b_0 –вільний член рівняння регресії; b_{12}, $b_{n-1,n}$, $b_{11}\ldots$ b_{nn} – коефіцієнти регресії; X_n –умовне значення фактору x_n.

Припустимо, що вивчається вплив ряду факторів на z_i (i=1,…k) на деяку величину у. Для цього проводяться експерименти за певним планом, який дозволяє реалізувати всі можливі комбінації факторів. Причому кожен з факторів розглядається на двох фіксованих рівнях (верхньому та нижньому). Число всіх експериментів в такому випадку буде рівно $n=2^k$, де кількість факторів, вивчається. Постановка дослідів за таким планом зветься **повним факторним експериментом типу 2^k** (ПФЕ 2^k). План експериментів записується у вигляді матриці планування, в якій за певним порядком перераховують різні комбінації факторів на двох рівнях. Наприклад, в табл. 7.1 наведена матриця планування ПФЕ 2^3 для трьох факторів: z_1, z_2, z_3. Знак «+» каже, що за час досліду значення фактору встановлюють на верхньому рівні, а знак «–» показує, що значення фактору встановлюють на нижньому рівні.

Таблиця 7.1

Матриця планування ПФЕ 2^3

Значення фактору	z_1	z_2	z_3
1	+	+	+
2	–	+	+
3	+	–	+
4	–	–	+
5	+	+	–
6	–	+	–
7	+	–	–
8	–	–	–

При проведені експериментів одержують значення дослідної величини y для кожного досліду (або серії дослідів). Далі переходять до побудування математичної моделі. Під моделлю розуміють вид функції $y=f(z_1, z_2, z_3)$, яка зв'язує параметр, що вивчається, зі значеннями факторів, які лежать в інтервалі між верхнім та нижнім рівнями. Цю функцію називають **рівнянням регресії**. За накопиченому різними дослідниками досліду роботи з різними моделями можна рахувати, що самими простими моделями являються алгебраїчні поліноми. Для обробки результатів експериментів і подальшого визначення коефіцієнтів регресії приводять до одного масштабу. Це досягається за допомогою кодування змінних. Позначимо нижній рівень фактору z_i через z_i^-, а верхній рівень фактору через z_i^+. Тоді нові кодовані змінні x_i будуть визначатися через z_i за формулою

$$X_i = \frac{z_i - z_i^0}{\varepsilon_i}, \qquad (7.3)$$

де z_i – натуральне значення і-го фактору; z_i^0 – натуральне значення і-го фактору на основному рівні; ε_i – інтервал варіювання і-го фактору. При такому кодуванні всі нові змінні будуть приймати значення від -1 до +1. Лінійне рівняння регресії відносно нових змінних має вигляд:

$$y=b_0+b_1X_1+ b_2X_2+\ldots+ b_kX_k. \qquad (7.4)$$

Якщо потребується вивчити вплив парних взаємодій різних факторів на дослідний параметр, то рівняння регресії записують у вигляді (7.1). Перш ніж визначати коефіцієнти обраної моделі, матрицю планування записують відносно нових змінних. Далі матрицю доповнюють (якщо це вимагає вид обраного рівняння регресії) стовпцями знаків «+» та «–», що відповідають рівнянням, на яких будуть знаходитися взаємодії факторів. Знаки цих стовбців одержують за допомогою вихідної матриці планування (табл. 7.2).

Таблиця 7.2

Матриця планування для обробки результатів ПФЕ

Значення фактору	Фактори			Взаємодії			Результати дослідів			Середнє результатів
	x_1	x_2	x_3	x_{12}	x_{13}	x_{23}	y_1	y_2	y_3	$y_{середнє}$
1	+	+	+	+	+	+				
2	–	+	+	–	–	+				
3	+	–	+	–	+	–				
4	–	–	+	+	–	–				
5	+	+	–	+	–	–				
6	–	+	–	–	+	–				
7	+	–	–	–	–	+				
8	–	–	–	+	+	+				

Зазвичай проводять декілька серій дослідів для кожного експерименту. Це необхідно для перевірки рівняння на адекватність. **Адекватність** – це здатність моделі передбачати результати експерименту в деякій області зі заданою точністю. Результати дослідів в кожному j-му експерименті (j=1, …, n) записуються в правому стовбці матриці планування. У останньому стовбці записуються середні вибірні значення одержаних результатів для кожної серії дослідів. Якщо кожен експеримент повторили m раз, то в матриці буде записано m стовбців $y_1, y_2,\ldots, y_m$.

Наприклад, в таблиці 7.2 видно, що кожний експеримент повторявся три рази, тобто m=3. Коефіцієнти рівняння регресії знаходяться за допомогою метода найменших квадратів. Так як матриця планування ПФЕ 2^k повинна задовольняти певним вимогам, то формули, які визначають коефіцієнти рівняння регресії, достатньо прості.

$$b_0 = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \bar{y}_j, \tag{7.5}$$

$$b_i = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_{ij} \cdot \bar{y}_j, \tag{7.6}$$

$$b_{im} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_{ij} \cdot x_{jm} \cdot \bar{y}_j. \tag{7.7}$$

Деякі з коефіцієнтів регресії можуть виявитися дуже малими – незначущими. Щоб установити значущій коефіцієнт або ні, необхідно насамперед розрахувати оцінку дисперсії, з якою він находиться:

$$S_{\{y\}}^2 = \frac{1}{N}\sum_{j-1}^{N} S_j^2. \tag{7.8}$$

Для перевірки відтворюваності дослідів знаходиться відношення найбільшої з оцінок дисперсій к сумі всіх оцінок дисперсій (розрахункове значення **критерію Кохрена**):

$$G_p = \frac{\max S_j^2}{\sum_{j=1}^{N} S_j^2}. \tag{7.9}$$

Табульовані значення критерію Кохрена G_T наведені в додатку 3. Для находження G_T необхідно знати рівень значимості p, загальну кількість оцінок дисперсій N та число ступенів свободи f, зв’язаних з кожних з них, причому f=k–1. При виконанні умови $G_P \leq G_T$ досліди вважаються відтворювальні, а оцінки дисперсій – однорідними. Якщо досліди невідтворювальні, то можна досягти відтворюваності виявом та усунення джерел нестабільності експерименту, а також використанням найбільш точних методів та засобів вимірювання. Нарешті, якщо ніякими засобами нема як досягти відтворюваності, то математичні методи планування к такому експерименту застосувати неможна.

Слід відмітити, що за допомогою ПФЕ всі коефіцієнти визначаються з однаковою похибкою. Значимість кожного коефіцієнта рівняння регресії установлюється за допомогою **критерію Стьюдента** (додаток 4), розраховуючи його розрахункове значення:

$$t_p = \frac{|b|}{\sqrt{S^2_{\{y\}}}}, \tag{7.10}$$

де b – коефіцієнт рівняння регресії, для котрого установлюється значимість. Кожне розрахункове значення t_p порівнюють з табличним значенням критерія Стьюдента $t_т$, яке вибирають для заданого рівняння значимості p при числі ступеня свободи f=N(k-1).

Якщо виконується вимога $t_p \geq t_т$, то коефіцієнт вважається значимим. У супротивному випадку коефіцієнт регресії незначимий, і відповідний член можна виключити з рівняння регресії. Одержав рівняння регресії, слід перевірити його адекватність за допомогою **критерію Фішера** (додаток 5), який представляє собою відношення

$$F_p = \frac{\max(S^2_{ад}; S^2_y)}{\min(S^2_{ад}; S^2_y)}, \tag{7.11}$$

де $S^2_{ад}$ – оцінка дисперсії адекватності, яка розраховується як

$$S^2_{ад} = \frac{1}{N-B}\sum_{j=1}^{N}\left(y_j^e - y_j^p\right)^2, \tag{7.12}$$

де y^e, y^p – експериментальне та розрахункове значення функції відгуку, що одержане в j-му досліді; B – кількість коефіцієнтів в рівнянні регресії. При розрахунку розрахункового значення критерію Фішера за формулою (7.11) у чисельнику вказується більша, а в знаменнику менша з оцінок дисперсій. Рівняння регресії адекватно описує результати експерименту, якщо виконується вимога $F_P < F_T$, де F_T – табличне значення критерію Фішера для прийнятого рівня значимості p і числа ступеня свободи f_1 чисельника та f_2 – знаменника. Якщо гіпотеза об адекватності відкидається, то необхідно перейти до більш складної формі або провести експеримент з меншим інтервалом варіювання факторів.

Аналіз результатів передбачає інтерпретацію одержаної моделі. Інтерпретацію моделі можна проводити тільки тоді, коли вона записана в кодованих змінних. Тільки в цьому випадку на коефіцієнти не впливає масштаб факторів і ми можемо за величиною коефіцієнтів судити о степені впливу того чи іншого фактору. Чим більша абсолютна величина коефіцієнту, тим більше фактор впливає на відклик (вивчаючий параметр). Отже можна розташувати фактори за величиною їх впливу. Знак «+» у коефіцієнта свідчить, що зі збільшенням значення фактору росте величина відклику, а при «–» убуває.

Для одержання математичної моделі в натурних перемінних z_i в рівняння регресії замість x_i необхідно підставити їх у вираз. При переході к натурним змінним коефіцієнти рівняння змінюються, і в такому випадку зникає можливість інтерпретації впливу факторів за величиною та знакам коефіцієнтів. Проте якщо рівняння адекватно, то за його допомогою можна визначити значення дослідної величини, не проводячи експерименту та надаючи факторам значення, які повинні знаходитися між нижнім та верхнім рівнями.

Вирішення типового завдання.

Завдання 1.

Для дослідження впливу на міцність склеювання технічної тканини поставлено експеримент за планом ПФЕ 2^3, причому кожен експеримент повторювався три рази (табл. 7.3). В якості факторів, що впливають на міцність y (кгс/см^2), були обрані наступні: z_1 – кількість клею, що наносилось (г/см^2) , z_2 – час активації клею (с); z_3 – тиск пресування (кгс/см^2).

Необхідно побудувати рівняння регресії та перевірити одержаною модель на адекватність і провести її інтерпретацію.

Таблиця 7.3

Вихідна матриця планування ПФЕ 2^3

Значення фактору	Фактори			Результати		
	z_1	z_2	z_3	y_1	y_2	y_3
1	+	+	+	7,4	8,4	6,4
2	–	+	+	8,6	7,0	7,8
3	+	–	+	12,3	9,0	9,3
4	–	–	+	5,8	5,8	5,7
5	+	+	–	18,8	17,0	15,2
6	–	+	–	8,4	8,4	6,0
7	+	–	–	11,8	7,0	9,4
8	–	–	–	10,5	7,8	8,1

Виконання завдання виконати в наступному порядку:

1) кодують змінні;

2) добудовують матриці планування в кодованих змінних з урахуванням парних взаємодій і доповнюються стовбцями середніх значень відклика;

3) розраховують коефіцієнти рівняння регресії;

4) перевіряються розраховані коефіцієнти на значимість, попередньо визначаючи дисперсію відтворюваності, і виходить рівняння регресії в кодованих змінних;
5) перевіряється одержане рівняння на адекватність;
6) проводиться інтерпретація одержаної моделі;
7) виписується рівняння регресії в натурних змінних.

Розв’язання.

1. Для кожного фактору приймаєм основний рівень, інтервал варіювання і залежність кодованої змінної x_i від натурального z_i. Оформлюємо результати в таблицю 7.4.

Таблиця 7.4

Кодування факторів

Фактори	Нижній рівень	Верхній рівень	Основний рівень	Інтервал варіювання
z_1	0,06	0,02	0,04	0,02
z_2	300	60	180	120
z_2	8	2	5	3
Залежність кодованої величини від натурної $x_1 = \frac{z_1 - 0{,}04}{0{,}02} = 50z_1 - 2, \quad x_2 = \frac{z_2 - 180}{120}, \quad x_3 = \frac{z_3 - 5}{3}$				

2. Розраховуємо середні вибірні результатів для кожного експерименту:

$$\bar{y}_1 = \frac{1}{3}(7{,}4 + 8{,}4 + 6{,}4) = 7{,}4 \qquad \bar{y}_5 = \frac{1}{3}(18{,}8 + 17 + 15{,}2) = 17$$

$$\bar{y}_2 = \frac{1}{3}(8{,}6 + 7 + 7{,}8) = 7{,}8 \qquad \bar{y}_6 = \frac{1}{3}(8{,}4 + 8{,}4 + 6) = 7{,}6$$

$$\bar{y}_3 = \frac{1}{3}(12{,}3 + 9 + 9{,}3) = 10{,}2 \qquad \bar{y}_7 = \frac{1}{3}(11{,}8 + 7 + 9{,}4) = 9{,}4$$

$$\bar{y}_4 = \frac{1}{3}(5{,}8 + 5{,}8 + 5{,}7) = 5{,}77 \qquad \bar{y}_8 = \frac{1}{3}(10{,}2 + 7{,}8 + 8{,}1) = 8{,}8$$

Будуємо матрицю планування з урахуванням всіх взаємодій та середніх значень відклику (табл. 7.5).

Таблиця 7.5

Матриця планування для обробки результатів

№ з/п	Фактори			Взаємодії				Результати дослідів	Середнє результатів
	x_1	x_2	x_3	x_{12}	x_{31}	x_{23}	x_{123}	y_1 y_2 y_3	$y_{середнє}$
1	+	+	+	+	+	+	+	7,4 8,4 6,4	7,4
2	–	+	+	–	–	+	–	8,6 7,0 7,8	7,8
3	+	–	+	–	+	–	–	12,3 9,0 9,3	10,2
4	–	–	+	+	–	–	+	5,8 5,8 5,7	5,77
5	+	+	–	+	–	–	–	18,8 17,0 15,2	17,0
6	–	+	–	–	+	–	+	8,4 8,4 6,0	7,6
7	+	–	–	–	–	+	+	11,8 7,0 9,4	9,4
8	–	–	–	+	+	+	–	10,5 7,5 8,1	8,8

3. Розраховуємо коефіцієнти рівняння регресії:

$$b_0 = \frac{1}{8}\sum_{j=1}^{8}\bar{y}_j = \frac{1}{8}(7{,}4 + 7{,}8 + 10{,}2 + 5{,}77 + 17 + 7{,}6 + 9{,}4 + 8{,}8) = 9{,}25,$$

$$b_1 = \frac{1}{8}\sum_{j=1}^{8}x_{i1}\bar{y}_j = \frac{1}{8}(7{,}4 - 7{,}8 + 10{,}2 + 5{,}77 + 17 - 7{,}6 + 9{,}4 - 8{,}8) = 1{,}75,$$

$$b_2 = \frac{1}{8}\sum_{j=1}^{8}x_{i2}\bar{y}_j = \frac{1}{8}(7{,}4 + 7{,}8 - 10{,}2 - 5{,}77 + 17 - 7{,}6 - 9{,}4 - 8{,}8) = 0{,}7,$$

$$b_3 = \frac{1}{8}\sum_{j=1}^{8}x_{i3}\bar{y}_j = \frac{1}{8}(7{,}4 + 7{,}8 + 10{,}2 + 5{,}77 - 17 - 7{,}6 - 9{,}4 - 8{,}8) = -1{,}45,$$

$$b_{12} = \frac{1}{8}\sum_{j=1}^{8}x_{i1}x_{j2}\bar{y}_j = \frac{1}{8}(7{,}4 - 7{,}8 - 10{,}2 + 5{,}77 + 17 - 7{,}6 - 9{,}4 + 8{,}8) = 0{,}5,$$

$$b_{13} = \frac{1}{8}\sum_{j=1}^{8}x_{i1}x_{j3}\bar{y}_j = \frac{1}{8}(7{,}4 - 7{,}8 + 10{,}2 - 5{,}77 - 17 + 7{,}6 - 9{,}4 + 8{,}8) = -0{,}75,$$

$$b_{23} = \frac{1}{8}\sum_{j=1}^{8}x_{i2}x_{j3}\bar{y}_j = \frac{1}{8}(7{,}4 + 7{,}8 - 10{,}2 - 5{,}77 - 17 - 7{,}6 + 9{,}4 + 8{,}8) = -0{,}9,$$

$$b_{123} = \frac{1}{8}\sum_{j=1}^{8}x_{i1}x_{j2}x_{j3}\bar{y}_j = \frac{1}{8}(7{,}4 - 7{,}8 - 10{,}2 + 5{,}77 - 17 + 7{,}6 + 9{,}4 - 8{,}8) = -1{,}7.$$

4. Знаходимо дисперсію відтворюваності (табл. 7.6).

Таблиця 7.6

Розрахунок дисперсій

j	1	2	3	4	5	6
	y_1 y_2 y_3	y_j	$(y_{j1}-y)^2$	$(y_{j2}-y)^2$	$(y_{j3}-y)^2$	S_j^2
1	7,4 8,4 6,4	7,4	0	0	1	1
2	8,6 7,0 7,8	7,8	0,64	0,64	0	0,64
3	12,3 9,0 9,3	10,2	1,21	1,44	0,81	1,73
4	5,8 5,8 5,7	5,77	0,0009	0,0009	0,0049	0,0034
5	18,8 17,0 15,2	17,0	3,24	0	3,24	3,24
6	8,4 8,4 6,0	7,6	0,64	0,64	2,56	1,92
7	11,8 7,0 9,4	9,4	5,76	5,76	0	5,76
8	10,5 7,8 8,1	8,8	2,89	1	0,49	2,19

Підсумовуємо елементи стовбця 6 таблиці 7.6, одержуємо:

$$\sum_{j=1}^{8} S_j^2 = 16{,}48335.$$

Звідси одержуємо дисперсію відтворюваності:

$$S_{\{y\}}^2 = \frac{1}{8}\sum_{j=1}^{8} S_j^2 = \frac{16{,}48335}{8} = 2{,}06.$$

5. Визначаємо середнє квадратичне відхилення коефіцієнтів:

$$S_{\{y\}} = \sqrt{\frac{S_{\{y\}}^2}{n\cdot m}} = \sqrt{\frac{2{,}06}{8\cdot 3}} = 0{,}293.$$

З таблиць розподілу Стьюдента (додаток 4) за числом ступенів свободи $n(m-1)=8\cdot 2=16$ при рівні значимості $\alpha=0{,}05$ знаходимо $t_{кр}=2{,}12$. Отже, $t_{кр}\cdot S_{\{y\}}=2{,}12\cdot 0{,}293=0{,}52$. Порівнюючи одержане значення з коефіцієнтами рівняння регресії, бачимо, що всі коефіцієнти крім $b_{1,2}$ більше за абсолютною величиною 0,52. Отже, всі коефіцієнти крім $b_{1,2}$ значимі. Припускаючи $b_{1,2}=0$, одержуємо рівняння регресії в кодованих змінних:

$$y=9{,}25+175x_1+0{,}7\,x_2-1{,}45\,x_3-0{,}75\,x_1\,x_3-0{,}9\,x_2\,x_3-1{,}7\,x_1\,x_2\,x_3.$$

6. Перевіримо одержане рівняння на адекватність за критерієм Фішера. Так як дисперсія відтворюваності знайдена в попередньому пункті, то для визначення розрахункового значення критерію $F_{разр}$ необхідно розрахувати залишкову дисперсію $S_{зал}^2$. Для цього знайдемо значення параметра, що вивчається, за одержаним рівнянням регресії $\tilde{y}_j$

($j=1,\ldots,8$), підставляючи +1 або –1 замість x_i відповідно до номеру j експерименту з таблиці 7.5.

$$\tilde{y}_1 = 9{,}25 + 1{,}75 + 0{,}7 - 1{,}45 - 0{,}75 - 0{,}9 - 1{,}7 = 6{,}9;$$

$$\tilde{y}_2 = 9{,}25 + 1{,}75(-1) + 0{,}7 - 1{,}45 - 0{,}75(-1) - 0{,}9 - 1{,}7(-1) = 8{,}3;$$

$$\tilde{y}_3 = 9{,}25 + 1{,}75 + 0{,}7(-1) - 1{,}45 - 0{,}75 - 0{,}9(-1) - 1{,}7(-1) = 10{,}7;$$

$$\tilde{y}_4 = 9{,}25 + 1{,}75(-1) + 0{,}7 - 1{,}45 - 0{,}75(-1) - 0{,}9 - 1{,}7(-1) = 8{,}3;$$

$$\tilde{y}_5 = 9{,}25 + 1{,}75 + 0{,}7 - 1{,}45(-1) - 0{,}75(-1) - 0{,}9(-1) - 1{,}7(-1) = 16{,}5$$

$$\tilde{y}_6 = 9{,}25 + 1{,}75(-1) + 0{,}7 - 1{,}45(-1) - 0{,}75 - 0{,}9(-1) - 1{,}7 = 8{,}1;$$

$$\tilde{y}_7 = 9{,}25 + 1{,}75 + 0{,}7(-1) - 1{,}45(-1) - 0{,}75(-1) - 0{,}9 - 1{,}7 = 9{,}85;$$

$$\tilde{y}_8 = 9{,}25 + 1{,}75(-1) + 0{,}7(-1) - 1{,}45(-1) - 0{,}75 - 0{,}9 - 1{,}7(-1) = 8{,}3.$$

Знаходимо залишкову дисперсію:

$$S^2_{\text{зал}} = \frac{3}{8-7}\sum_{j=1}^{8}\left(\tilde{y}_j - \bar{y}_j\right)^2 = 3[(6{,}9-7{,}4)^2] + (8{,}3-7{,}8)^2 +$$
$$+(10{,}7-10{,}2)^2 + (5{,}3-5{,}77)^2 + (16{,}5-17)^2 + (8{,}1-7{,}6)^2 +$$
$$+(9{,}85-9{,}4)^2 + (8{,}3-8{,}8)^2 = 5{,}77.$$

Розрахункове значення критерію Фішера $F_{\text{розр}}$:

$$F_{\text{розр}} = \frac{S^2_{\text{зал}}}{S^2_{\{y\}}} = \frac{5{,}77}{2{,}06} = 2{,}8.$$

Табличне значення критерію $F_{\text{таб}}$ знаходимо з таблиці критичних точок розподілу Фішера (додаток 5) при рівні значимості α=0,05 за відповідним ступенем свободи $k_1=n-r=8-7=1$ та $k_2=n(m-1)=8\cdot2=16$. $F_{\text{таб}}$=4,49. Так як $F_{\text{розр}}=2{,}8< F_{\text{таб}}=4{,}49$, то рівняння регресії адекватно.

7. Проведемо інтерпретацію одержаної моделі:

$$y=9{,}25+175x_1+0{,}7\,x_2-1{,}45\,x_3-0{,}75\,x_1\,x_3-0{,}9\,x_2\,x_3-1{,}7\,x_1\,x_2\,x_3.$$

З рівняння видно, що найбільш сильній вплив надає фактор x_1 – кількість клею, що наноситься, так як він має найбільшій за абсолютною величиною коефіцієнт. Після нього за силою впливу на відклик йдуть: потрійна взаємодія всіх факторів x_1 x_2 x_3; фактор x_3 – тиск пресу при склеюванні; парна взаємодія x_2 x_3 – поєднує час активації клею та рівня тиску; парна взаємодія x_1 x_3 – поєднує кількість клею, що наноситься та рівня тиску; фактор x_2 – час активації клею. Так як коефіцієнти при x_1 та x_2 позитивні, то збільшення цих факторів збільшує відклик, тобто збільшується міцність. Коефіцієнти при x_3, x_1 x_3, x_2 x_3, x_1 x_2 x_3 від'ємні, це значить, що зі зменшенням фактору x_3 та перелічених взаємодій значення відклику буде зростати, а зі збільшенням – убувати.

8. Запишімо рівняння регресії в натурних змінних, підставляючи замість x_i їх вирази через z_i, які беремо з таблиці 7.4:

$$y = 9{,}25 + 1{,}75(50z_1 - 2) + 0{,}7\frac{z_2 - 180}{120} - 1{,}45\frac{z_3 - 5}{2} -$$

$$-0{,}75(50z_1 - 2)\frac{z_3-5}{3} - 0{,}9\frac{z_2-180}{120}\cdot\frac{z_3-5}{3} - 1{,}7(50z_1 - 2)\frac{z_2-180}{120}\cdot\frac{z_3-5}{3}.$$

Після перетворення це рівняння бути мати вигляд:

$$y = 10{,}87 - 62{,}5z_1 - 0{,}029z_2 - 1{,}23z_3 + 1{,}18z_1z_2 + 30z_1z_2 +$$

$$+0{,}007z_2z_3 - 0{,}236z_1z_2z_3.$$

Завдання на самостійну роботу.

<u>Завдання 2.</u>

На основі експериментальних даних вивести математичну модель в кодованих та натуральних значеннях.

Для вивчення залежності деякої величини від впливу факторів були поставлені експерименти за планом ПФЕ 2^3. В якості факторів, які впливають на відклик, були обрані наступні (табл. 7.7):

Таблиця 7.7

Фактори

Рівні факторів	Фактори		
	X_1	X_2	X_3
Нижній	6	40	0,22
Основний	10	80	0,40
Верхній	14	120	0,31

Таблиця 7.8

Варіант 1

$У_1$	$У_2$	$У_3$	$У_4$
0,12	0,10	0,11	0,12
0,06	0,06	0,06	0,08
0,20	0,18	0,22	0,20
0,18	0,16	0,18	0,16
0,14	0,12	0,14	0,16
0,11	0,12	0,10	0,10
0,24	0,23	0,24	0,21
0,20	0,22	0,20	0,18

Таблиця 7.9

Варіант 2

$У_1$	$У_2$	$У_3$	$У_4$
0,12	0,12	0,11	0,12
0,06	0,07	0,06	0,08
0,20	0,18	0,21	0,20
0,18	0,16	0,18	0,17
0,13	0,12	0,14	0,16
0,11	0,12	0,11	0,10
0,24	0,23	0,22	0,21
0,20	0,21	0,20	0,18

Таблиця 7.10

Варіант 3

$У_1$	$У_2$	$У_3$
0,12	0,11	0,12
0,06	0,06	0,08
0,20	0,21	0,20
0,18	0,18	0,17
0,12	0,14	0,16
0,12	0,11	0,10
0,23	0,22	0,21
0,21	0,20	0,18

Контрольні питання.

1. Поясність поняттям регресійний аналіз?
2. Які складові містять рівняння регресії?
3. Що представляє собою повний факторний експеримент (ПФЕ)?
4. Що розуміють під математичною моделлю при ПФЕ?
5. Поясність поняття перевірка рівняння на адекватність?
6. В чому сутність критерію Кохрена?
7. В чому сутність критерію Стьюдента?
8. В чому сутність критерію Фішера?
9. Наведіть план проведення регресійного аналізу за ПФЕ?

8. КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ РОБОТИ ЗДОБУВАЧА ВИЩОЇ ОСВІТИ НА ПРАКТИЧНОМУ ЗАНЯТТІ

Характер виконаної роботи	Розподіл балів
Робота виконана повністю без помилок або допущено не більше трьох незначних недоліків	90 ÷ 100
Робота виконана повністю, але при наявності в неї не більше однієї негрубої помилки та одного недоліка або не більш чотирьох недоліків	74 ÷ 89
Правильно виконано 60-74 % всіх завдань або допущена одна груба помилка та три недоліки, або при наявності п’ятьох недоліків	60 ÷ 73

Перелік помилок:

1) груба помилка – незнання визначень, основних понять та формул; невміння виділити в рішенні головне, застосовувати знання для рішення задач; невірне направлення ходу рішення задачі; незнання прийомів рішення задач, аналогічних раніше вирішеним;

2) негруба помилка – неточності формулювань, визначень, поняття; неповне охоплення основних властивостей, ознак, визначних понять; неточності графіків, креслень; нераціональне рішення задачі; незначні похибки в рішенні, які не мають вирішального значення;

3) недоліки – нераціональні записи при розрахунку та прийоми розрахунків, перетворень в рішенні задач; незначні похибки розрахунків; недбалість при записуванні, виконанні креслень, графіків, правопису.

9. СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Основи методології та організації наукових досліджень: Навч. посібник для студентів, курсантів, аспірантів та ад’юнтів / за ред. А.Є. Конверського. – К.: Центр учбової літератури, 2010 – 352 с.
2. Бірта Г.О. Методології та організації наукових досліджень. [Текст]: навч. посіб. / Г.О. Бірта, Ю.Г. Бургу. – К.: Центр учбової літератури, 2014. – 142 с.
3. Батунер Л.М. Математические методы в химической технике / Л.М. Батунер, М.Е.Позин. – М.: Химия, 1968. – 824 с.
4. Романенко В.Н. Книга для начинающего исследователя-химика / В.Н. Романенко, А.Г. Орлов, Г.В. Никитина. – Л.: Химия. – 280 с.
5. Демидович Б.П. Основы вычислительной математики / Б.П. Демидович, И.А. Марон. – М.: Наука, 1966. – 664 с.
6. Вирченко Н.А. Графики функций. Справочник / Н.А. Вирченко, И.И. Ляшко, К.И. Швецов. 2-е изд. стереот. – К.: Наукова думка, 1979. – 320 с.
7. Данилина Н.И. и др. Вычислительная математика: Учеб. пособие для техникумов / Н.И. Данилина, Н.С. Дубровская, О.П. Кваша, Г.Л. Смирнов. – М.: Высш. шк., 1985. – 472 с.
8. Пискунов Н.С. Дифференциальные и интегральные исчисления / Н.С. Пискунов. – М.: Наука. – Т. 2. – 1972. – 456 с.
9. Бондарь А.Г. Планирование эксперимента в химической технологии / А.Г. Бондарь, Г.А. Статюха. – Киев: Вища школа, 1976. – 183 с.
10. Бродский В.З. Введение в факторное планирование эксперимента / В.З. Бродский. – М.: Наука, 1976. – 223 с.
11. Шенк Х. Теория инженерного эксперимента / Х. Шенк. – М.: Мир, 1972. – 382 с.

ДОДАТКИ

Додаток 1.

Формули та властивості логарифмів

Логарифм числа b за основою а ($\log_{\mathrm{a}} \mathrm{b}$) називається таке число с, що $\mathrm{b} = \mathrm{a}^{\mathrm{c}}$, тобто записи $\log_{\mathrm{a}} \mathrm{b} = \mathrm{c}$ та $\mathrm{b} = \mathrm{a}^{\mathrm{c}}$ рівносильні. Логарифм має смисл, якщо a>0, a≠1, b>0.
ln – натуральний логарифм, логарифм за основою е, де е – число Ейлера.
lg– десятковий логарифм, логарифм за основою 10.

1. $\mathrm{a}^{\log_{\mathrm{a}} \mathrm{b}} = \mathrm{b}$
2. $\log_{\mathrm{a}} \mathrm{a} = 1$, a>0, a≠1
3. $\log_{a} 1 = 0$, a>0, a≠1
4. $\log_{\mathrm{a}}(\mathrm{b} \cdot \mathrm{c}) = \log_{\mathrm{a}} \mathrm{b} + \log_{\mathrm{a}} \mathrm{c}$
5. $\log_{\mathrm{a}} \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{c}} = \log_{\mathrm{a}} \mathrm{b} - \log_{\mathrm{a}} \mathrm{c}$
6. $\log_{\mathrm{a}} \mathrm{b}^{\mathrm{p}} = \mathrm{p} \log_{\mathrm{a}} \mathrm{b}$
7. $\log_{\mathrm{a}^{\mathrm{k}}} \mathrm{b} = \frac{1}{\mathrm{k}} \log_{\mathrm{a}} \mathrm{b}$
8. $\log_{\mathrm{a}} \mathrm{b} = \frac{1}{\log_{\mathrm{b}} \mathrm{a}}$
9. $\log_{\mathrm{a}} \mathrm{b} = \frac{\log_{\mathrm{c}} \mathrm{b}}{\log_{\mathrm{c}} \mathrm{a}}$

Додаток 2

Таблиця основних формул диференціювання

1.	y=const	$y'=0$	9.	y=arcsinx	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
2.	$y=x^{\alpha}$	$y'=\alpha x^{\alpha-1}$	10.	y=arccosx	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
3.	$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	11.	y=arctgx	$y' = \frac{1}{1+x^2}$
4.	$y = \frac{1}{x}$	$y' = -\frac{1}{x^2}$	12.	y=arcctgx	$y' = -\frac{1}{1+x^2}$
5.	y=sinx	$y'=\cos x$	13.	$y=a^x$	$y'=a^x \ln a$
6.	y=cosx	$y'=-\sin x$	14.	$y=e^x$	$y'=e^x$
7.	y=tgx	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$	15.	$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x}\log_a e$
8.	y=ctgx	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	16.	y=lnx	$y' = \frac{1}{x}$

Загальні правила диференціювання

1. $y=Cu(x)$	$y'=C\,u'(x)$, C=const
2. $y=u+v-w$	$y'= u'+ v'-w'$
3. $y=uv$	$y'= u'v+u\,v'$
4. $y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u'v - u\,v'}{v^2}$
5. $\begin{cases} y = f(x) \\ u = \varphi(x) \end{cases}$	$y'_x = f'_x(u)\varphi'_x(x)$
6. $y=u^v$	$y' = vu^{v-1}u' + u^v v' \ln u$

Додаток 3

Критичні значення коефіцієнта Кохрена (G-критерій) для надійної імовірності p=95 % і числа ступенів свободи V

k	Число ступенів свободи V										
	1	2	3	4	5	6	8	10	16	36	∞
2	9985	9750	9392	9057	8772	8534	8159	7880	7341	6602	5000
3	9669	8709	0797	7454	7071	6771	6333	6025	5466	4748	3333
4	9065	7679	6841	6287	5895	5598	5175	4884	4366	3720	2500
5	8412	6838	5981	5441	5065	4783	4387	4118	3645	3066	2000
6	7808	6161	5321	4803	4447	4184	3817	3568	3135	2612	1667
7	7271	5612	4800	4307	3974	3726	3384	3154	2756	2278	1429
8	6798	5157	4377	3910	3595	3362	3043	2829	2462	2022	1250
9	6385	4775	4027	3584	7276	3067	2768	2568	2226	1820	1111
10	6020	4450	3733	3311	3029	2823	2541	2353	2032	1655	1000
12	5410	3924	3264	2880	2624	2439	2187	2020	1737	1403	0833
15	4709	3346	2758	2419	2195	2034	1815	1671	1429	1144	0667
20	3894	2705	2205	1921	1735	1602	1422	1303	1108	0879	0500
24	3434	2354	1907	1656	1493	1374	1216	1113	0942	0743	0417
30	2929	1980	1593	1377	1237	1137	1001	0921	0771	0604	0333
40	2370	1576	1259	1082	0968	0887	5950	0713	0595	0462	0250
60	1737	1131	0895	0765	0682	0623	0552	0497	0411	0316	0167
120	0998	0632	0495	0419	0371	0337	0292	0266	0218	0165	0083
∞	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000

Всі значення менші за одиницю, тому в таблиці наведені лише десятинні знаки, які слідують після зап’ятої , перед якою при використанні таблиці необхідно ставити нуль цілих. k – число вимірювань.

Наприклад при k=6, V=3, маємо $G_{0,95}$=0,5321.

Додаток 4

Критичні значення коефіцієнту Стьюдента (t-критерію) для різній надійній імовірності p (%) та числа ступенів свободи V

V	p, %							
	80	90	95	98	99	99,5	99,8	99,9
1	3,0777	6,3138	12,7062	31,8205	63,6567	127,3213	318,3088	636,6192
2	1,8856	2,9200	4,3027	6,9646	9,9248	14,0890	22,3271	31,5991
3	1,6377	2,3534	3,1824	4,5407	5,8409	7,4533	10,2145	12,9240
4	1,5332	2,1318	2,7764	3,7469	4,6041	5,5976	7,1732	8,6103
5	1,4759	2,0150	2,5706	3,3649	4,0321	4,7733	5,8934	6,8688
6	1,4398	1,9432	2,4469	3,1427	3,7074	4,3168	5,2076	5,9588
7	1,4149	1,8946	2,3646	2,9980	3,4995	4,0293	4,7853	5,4079
8	1,3968	1,8595	2,3060	2,8965	3,3554	3,8325	4,5008	5,0413
9	1,3830	1,8331	2,2622	2,8214	3,2498	3,6897	4,2968	4,7809
10	1,3722	1,8125	2,2281	2,7638	3,1693	3,5814	4,1437	4,5869
11	1,3634	1,7959	2,2010	2,7181	3,1058	3,4966	4,0247	4,4370
12	1,3562	1,7823	2,1788	2,6810	3,0545	3,4284	3,9296	4,3178
13	1,3502	1,7709	2,1604	2,6503	3,0123	3,3725	3,8520	4,2208
14	1,3450	1,7613	2,1448	2,6245	2,9768	3,3257	3,7874	4,1405
15	1,3406	1,7531	2,1314	2,6025	2,9467	3,2860	3,7328	4,0728
16	1,3368	1,7459	2,1199	2,5835	2,9208	3,2520	3,6862	4,0150
17	1,3334	1,7396	2,1098	2,5669	2,8982	3,2224	3,6458	3,9651
18	1,3304	1,7341	2,1009	2,5524	2,8784	3,1966	3,6105	3,9216
19	1,3277	1,7291	2,0930	2,5395	2,8609	3,1737	3,5794	3,8834
20	1,3253	1,7247	2,0860	2,5280	2,8453	3,1534	3,5518	3,8495
21	1,3232	1,7207	2,0796	2,5176	2,8314	3,1352	3,5272	3,8193
22	1,3212	1,7171	2,0739	2,5083	2,8188	3,1188	3,5050	3,7921
23	1,3195	1,7139	2,0687	2,4999	2,8073	3,1040	3,4850	3,7676
24	1,3178	1,7109	2,0639	2,4922	2,7969	3,0905	3,4668	3,7454
25	1,3163	1,7081	2,0595	2,4851	2,7874	3,0782	3,4502	3,7251
26	1,3150	1,7056	2,0555	2,4786	2,7787	3,0669	3,4350	3,7066
27	1,3137	1,7033	2,0518	2,4727	2,7707	3,0565	3,4210	3,6896
28	1,3125	1,7011	2,0484	2,4671	2,7633	3,0469	3,4082	3,6739
29	1,3114	1,6991	2,0452	2,4620	2,7564	3,0380	3,3962	3,6594
30	1,3104	1,6973	2,0423	2,4573	2,7500	3,0298	3,3852	3,6460
32	1,3086	1,6939	2,0369	2,4487	2,7385	3,0149	3,3653	3,6218
34	1,3070	1,6909	2,0322	2,4411	2,7284	3,0020	3,3479	3,6007
36	1,3055	1,6883	2,0281	2,4345	2,7195	2,9905	3,3326	3,5821

Продовження додатку 4

V	p, %							
	80	90	95	98	99	99,5	99,8	99,9
38	1,3042	1,6860	2,0244	2,4286	2,7116	2,9803	3,3190	3,5657
40	1,3031	1,6839	2,0211	2,4233	2,7045	2,9712	3,3069	3,5510
42	1,3020	1,6820	2,0181	2,4185	2,6981	2,9630	3,2960	3,5377
44	1,3011	1,6802	2,0154	2,4141	2,6923	2,9555	3,2861	3,5258
46	1,3002	1,6787	2,0129	2,4102	2,6870	2,9488	3,2771	3,5150
48	1,2994	1,6772	2,0106	2,4066	2,6822	2,9426	3,2689	3,5051
50	1,2987	1,6759	2,0086	2,4033	2,6778	2,9370	3,2614	3,4960
55	1,2971	1,6730	2,0040	2,3961	2,6682	2,9247	3,2451	3,4764
60	1,2958	1,6706	2,0003	2,3901	2,6603	2,9146	3,2317	3,4602
65	1,2947	1,6686	1,9971	2,3851	2,6536	2,9060	3,2204	3,4466
70	1,2938	1,6669	1,9944	2,3808	2,6479	2,8987	3,2108	3,4350
80	1,2922	1,6641	1,9901	2,3739	2,6387	2,8870	3,1953	3,4163
90	1,2910	1,6620	1,9867	2,3685	2,6316	2,8779	3,1833	3,4019
100	1,2901	1,6602	1,9840	2,3642	2,6259	2,8707	3,1737	3,3905
110	1,2893	1,6588	1,9818	2,3607	2,6213	2,8648	3,1660	3,3812
120	1,2886	1,6577	1,9799	2,3578	2,6174	2,8599	3,1595	3,3735
130	1,2881	1,6567	1,9784	2,3554	2,6142	2,8557	3,1541	3,3669
140	1,2876	1,6558	1,9771	2,3533	2,6114	2,8522	3,1495	3,3614
150	1,2872	1,6551	1,9759	2,3515	2,6090	2,8492	3,1455	3,3566
160	1,2869	1,6544	1,9749	2,3499	2,6069	2,8465	3,1419	3,3524
170	1,2866	1,6539	1,9740	2,3485	2,6051	2,8441	3,1389	3,3487
180	1,2863	1,6534	1,9732	2,3472	2,6034	2,8421	3,1361	3,3454
190	1,2860	1,6529	1,9725	2,3461	2,6020	2,8402	3,1337	3,3425
200	1,2858	1,6525	1,9719	2,3451	2,6006	2,8385	3,1315	3,3398
250	1,2849	1,6510	1,9695	2,3414	2,5956	2,8322	3,1232	3,3299
300	1,2844	1,6499	1,9679	2,3388	2,5923	2,8279	3,1176	3,3233
350	1,2840	1,6492	1,9668	2,3370	2,5899	2,8249	3,1137	3,3185
400	1,2837	1,6487	1,9659	2,3357	2,5882	2,8227	3,1107	3,3150
450	1,2834	1,6482	1,9652	2,3347	2,5868	2,8209	3,1084	3,3123
500	1,2832	1,6479	1,9647	2,3338	2,5857	2,8195	3,1066	3,3101
550	1,2831	1,6476	1,9643	2,3331	2,5848	2,8184	3,1051	3,3083
600	1,2830	1,6474	1,9639	2,3326	2,5840	2,8175	3,1039	3,3068

Додаток 5

Значення критерію Фішера (F-критерія) для рівня значимості q=5 %
(V_1 – число ступенів свободи більшої дисперсії;
V_2 – число ступенів свободи меншої дисперсії)

V_2	V_1											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	236,8	238,9	240,5	241,9	245,9	248,0
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,43	19,45
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,70	8,66
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,86	5,80
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,62	4,56
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	3,94	3,87
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,51	3,44
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,22	3,15
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,01	2,94
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,85	2,77
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,72	2,65
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,62	2,54
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,53	2,46
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,46	2,39
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,40	2,33
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,35	2,28
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,31	2,23
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,27	2,19
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,23	2,16
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,20	2,12
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,18	2,10
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,15	2,07
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,13	2,05
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,11	2,03
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,09	2,01
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,07	1,99
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20	2,06	1,97
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,04	1,96
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,03	1,94
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,01	1,93

Продовження додатку 5

Значення критерію Фішера (F-критерія) для рівня значимості q=2 %
(V_1 – число ступенів свободи більшої дисперсії;
V_2 – число ступенів свободи меншої дисперсії)

V_2	V_1											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20
1	1012,5	1249,5	1350,5	1405,8	1440,6	1464,5	1481,8	1495,0	1505,3	1513,7	1539,1	1551,9
2	48,51	49,00	49,17	49,25	49,30	49,33	49,36	49,37	49,39	49,40	49,43	49,45
3	20,62	18,86	18,11	17,69	17,43	17,25	17,11	17,01	16,93	16,86	16,66	16,55
4	14,04	12,14	11,34	10,90	10,62	10,42	10,27	10,16	10,07	10,00	9,78	9,67
5	11,32	9,45	8,67	8,23	7,95	7,76	7,61	7,50	7,42	7,34	7,12	7,01
6	9,88	8,05	7,29	6,86	6,58	6,39	6,25	6,14	6,05	5,98	5,76	5,65
7	8,99	7,20	6,45	6,03	5,76	5,58	5,44	5,33	5,24	5,17	4,95	4,84
8	8,39	6,64	5,90	5,49	5,22	5,04	4,90	4,79	4,70	4,63	4,42	4,30
9	7,96	6,23	5,51	5,10	4,84	4,65	4,52	4,41	4,33	4,26	4,04	3,92
10	7,64	5,93	5,22	4,82	4,55	4,37	4,23	4,13	4,04	3,97	3,76	3,64
11	7,39	5,70	4,99	4,59	4,34	4,15	4,02	3,91	3,83	3,76	3,54	3,43
12	7,19	5,52	4,81	4,42	4,16	3,98	3,85	3,74	3,66	3,59	3,37	3,25
13	7,02	5,37	4,67	4,28	4,02	3,84	3,71	3,60	3,52	3,45	3,23	3,11
14	6,89	5,24	4,55	4,16	3,90	3,72	3,59	3,48	3,40	3,33	3,11	3,00
15	6,77	5,14	4,45	4,06	3,81	3,63	3,49	3,39	3,30	3,23	3,02	2,90
16	6,67	5,05	4,36	3,97	3,72	3,54	3,41	3,30	3,22	3,15	2,93	2,82
17	6,59	4,97	4,29	3,90	3,65	3,47	3,34	3,23	3,15	3,08	2,86	2,74
18	6,51	4,90	4,22	3,84	3,59	3,41	3,27	3,17	3,09	3,02	2,80	2,68
19	6,45	4,84	4,16	3,78	3,53	3,35	3,22	3,12	3,03	2,96	2,74	2,63
20	6,39	4,79	4,11	3,73	3,48	3,30	3,17	3,07	2,98	2,91	2,70	2,58
21	6,34	4,74	4,07	3,69	3,44	3,26	3,13	3,02	2,94	2,87	2,65	2,53
22	6,29	4,70	4,03	3,65	3,40	3,22	3,09	2,99	2,90	2,83	2,61	2,49
23	6,25	4,66	3,99	3,61	3,36	3,19	3,05	2,95	2,87	2,80	2,58	2,46
24	6,21	4,63	3,96	3,58	3,33	3,15	3,02	2,92	2,83	2,77	2,55	2,43
25	6,18	4,59	3,93	3,55	3,30	3,13	2,99	2,89	2,81	2,74	2,52	2,40
26	6,14	4,56	3,90	3,52	3,28	3,10	2,97	2,86	2,78	2,71	2,49	2,37
27	6,11	4,54	3,87	3,50	3,25	3,07	2,94	2,84	2,76	2,69	2,46	2,34
28	6,09	4,51	3,85	3,47	3,23	3,05	2,92	2,82	2,73	2,66	2,44	2,32
29	6,06	4,49	3,83	3,45	3,21	3,03	2,90	2,80	2,71	2,64	2,42	2,30
30	6,04	4,47	3,81	3,43	3,19	3,01	2,88	2,78	2,69	2,62	2,40	2,28

Продовження додатку 5

Значення критерію Фішера (F-критерія) для рівня значимості q=1 %
(V_1 – число ступенів свободи більшої дисперсії;
V_2 – число ступенів свободи меншої дисперсії)

V_2	V_1											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20
1	4052,2	4999,5	5403,4	5624,6	5763,6	5859,0	5928,4	5981,1	6022,5	6055,8	6157,3	6208,7
2	98,50	99,00	99,17	99,25	99,30	99,33	99,36	99,37	99,39	99,40	99,43	99,45
3	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,35	27,23	26,87	26,69
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,55	14,20	14,02
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,46	10,29	10,16	10,05	9,72	9,55
6	13,75	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,56	7,40
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62	6,31	6,16
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81	5,52	5,36
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26	4,96	4,81
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85	4,56	4,41
11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54	4,25	4,10
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30	4,01	3,86
13	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	3,82	3,66
14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,66	3,51
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,52	3,37
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,41	3,26
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,31	3,16
18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60	3,51	3,23	3,08
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52	3,43	3,15	3,00
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46	3,37	3,09	2,94
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,64	3,51	3,40	3,31	3,03	2,88
22	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35	3,26	2,98	2,83
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,54	3,41	3,30	3,21	2,93	2,78
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,26	3,17	2,89	2,74
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,85	3,63	3,46	3,32	3,22	3,13	2,85	2,70
26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,42	3,29	3,18	3,09	2,81	2,66
27	7,68	5,49	4,60	4,11	3,78	3,56	3,39	3,26	3,15	3,06	2,78	2,63
28	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,36	3,23	3,12	3,03	2,75	2,60
29	7,60	5,42	4,54	4,04	3,73	3,50	3,33	3,20	3,09	3,00	2,73	2,57
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07	2,98	2,70	2,55

Навчальне видання

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до практичних занять
з дисципліни
«ДЕТАЛІ МАШИН»
для здобувачів першого рівня вищої освіти
денної та заочної форм навчання
за спеціальностями
131 «Прикладна механіка» та
133 «Галузеве машинобудування»
(Електронне видання)

Укладачі:
Олександр Володимирович Шевченко

Редактор О.В. Шевченко
Комп'ютерна верстка О.В. Шевченко

Підписано до друку ________
Формат . Папір типограф. Гарнітура Times
Печатка офсетна. Ум.друк.аркушів Навч.вид.л.
Наклад_____прим. Вид.№_____Зам.______Безкоштовно

Видавництво: СНУ ім.Володимира Даля

Свідоцтво про реєстрацію: серія ДК № 1620 від 18.12.03 р.
Адреса видавництва: 01042, м. Київ, вул. Іоанна Павла II, 17
адреса електронної пошти uni@.snu.edu.ua,
офіційний web-сайт https://snu.edu.ua
E-mail: vidavnictvoSNU.ua@gmail.com